



حكومة إقليم كردستان - العراق
وزارة التربية - المديرية العامة للمناهج والطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب
الصف الحادي عشر العلمي

الطبعة السابعة
٢٠١٥ م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع

عثمان پیرداود کواز

آمانج اسماعیل عبدي

الفصل

1

Geometry

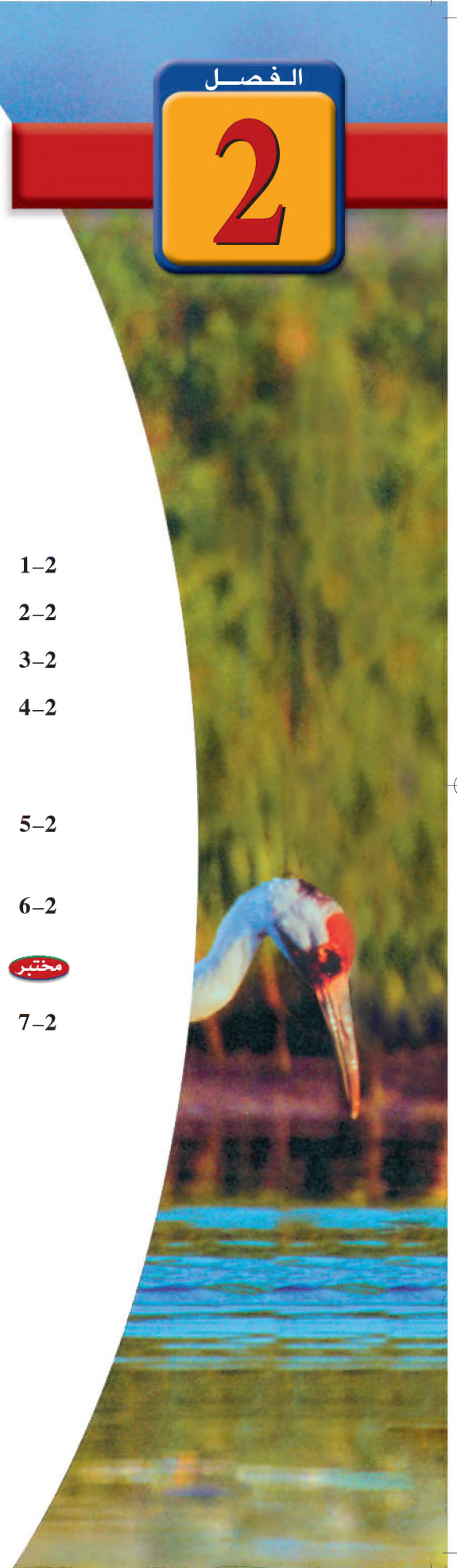
الهندسة

- 3..... **هل أنت مستعد؟ Are You Ready?**
- 4..... **دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview**
- 5..... **الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math**
- 6..... **1-1 الفضاء الإحداثي 3D Coordinate System**
- 12..... **مختبر التكنولوجيا: إنشاء المضلعات المنتظمة**
- 14..... **2-1 المضلعات Polygons**
- 21..... **3-1 التماسك الهندسي Dilation**
- 27..... **4-1 المتجهات Vectors**
- 36..... **اختبار جزئي (الدروس 1-4) Quiz**
- 37..... **5-1 مساحة الدائرة والمضلعات المنتظمة Area of Circles and Regular Polygons**
- 43..... **6-1 بعض قوانين الفضاء Formulas in Three Dimensions**
- 51..... **7-1 الكرة Sphere**
- 59..... **8-1 القطاعات الدائرية والأقواس Sectors and Arcs**
- 65..... **دليل الدراسة: مراجعة Chapter Review Study Guide: Chapter Review**
- 67..... **اختبار الفصل Chapter Test**
- 68..... **اختبار تراكمي Cumulative Assessment**

أنظمة المعادلات والمتباينات الخطية

Systems of Linear Equations and Inequalities

71.....	هل أنت مستعد؟ Are You Ready?	
72.....	دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview	
73.....	الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math	
74.....	المتباينات الخطية بمجهولين Linear Inequalities in 2 Unknowns	1-2
83.....	النماذج الخطية Linear Models	2-2
92.....	أنظمة المتباينات الخطية Systems of Linear Inequalities	3-2
98.....	البرمجة الخطية Linear Programming	4-2
106.....	اختبار جزئي (الدروس 4-1) Quiz	
	حل الأنظمة الخطية بثلاثة مجاهيل	5-2
107.....	Solving Linear Systems in 3 Unknowns	
115.....	القياسات الإحصائية Statistical Measurements	6-2
124.....	التكنولوجيا: جمع المعطيات اختبارياً	مختبر
125.....	التوزيعات الثنائية Binomial Distributions	7-2
135.....	دليل الدراسة: مراجعة Study Guide: Chapter Review	
137.....	اختبار الفصل Chapter Test	
138.....	اختبار تراكمي Cumulative Assessment	



الفصل

3

Matrices

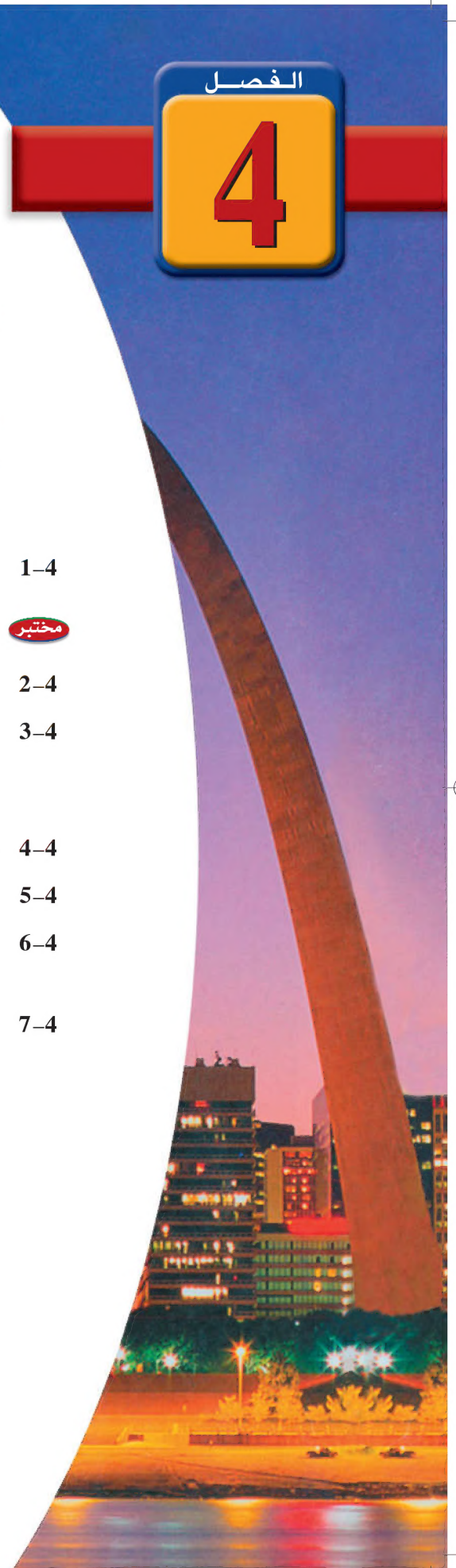
المصفوفات

141.....	هل أنت مستعد؟ Are You Ready?	
142.....	دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview	
143.....	الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math	
144.....	المصفوفات Matrices	1-3
152.....	ضرب المصفوفات Multiplying Matrices	2-3
161.....	المصفوفات والتحويلات الهندسية Matrices and Geometrical Transformations	3-3
167.....	المحددات وقاعدة كرامر Determinants and Cramer's Rule	4-3
176.....	اختبار جزئي (الدروس 1-4) Quiz	
177.....	مقلوب المصفوفة Matrix Inverse	5-3
186.....	التكنولوجيا: حل نظام خطي باستعمال برنامج Excel	مختبر
187.....	الأعداد المركبة Complex Numbers	6-3
193.....	العمليات على الأعداد المركبة Operations with Complex Numbers	7-3
201.....	دليل الدراسة: مراجعة Study Guide: Chapter Review	
203.....	اختبار الفصل Chapter Test	
204.....	اختبار تراكمي Cumulative Assessment	

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

207.....	هل أنت مستعد؟ Are You Ready?	
208.....	دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview	
209.....	الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math	
210.....	الدوال الأسية والنمو والتراجع Exponential Functions, Growth and Decay	1-4
218.....	التكنولوجيا: استكشاف الدوال العكسية	مختبر
219.....	الدالة العكسية Inverse Function	2-4
226.....	الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions	3-4
233.....	اختبار جزئي (الدروس 1-3) Quiz	
234.....	خصائص اللوغاريتم Properties of Logarithm	4-4
242.....	اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithm	5-4
249.....	المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities	6-4
256.....	النماذج الأسية واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Models	7-4
263.....	دليل الدراسة: مراجعة Study Guide: Chapter Review	
265.....	اختبار الفصل Chapter Test	
266.....	اختبار تراكمي Cumulative Assessment	



الفصل

5

خصائص الدوال

Properties of Functions

269.....	هل أنت مستعد؟ Are You Ready?	
270.....	دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview	
271.....	الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math	
272.....	الدوال المتفرعة القاعدة Piecewise Functions	1-5
282.....	التكنولوجيا: استكشاف الفروق والنسب	مختبر
283.....	تحويلات الدوال Transforming Functions	2-5
292.....	اختبار جزئي (الدروس 1-3) Quiz	
293.....	العمليات على الدوال Operations with Functions	3-5
300.....	النماذج الرياضية Mathematical Models	4-5
309.....	دليل الدراسة: مراجعة Study Guide: Chapter Review	
311.....	اختبار الفصل Chapter Test	
312.....	اختبار تراكمي Cumulative Assessment	

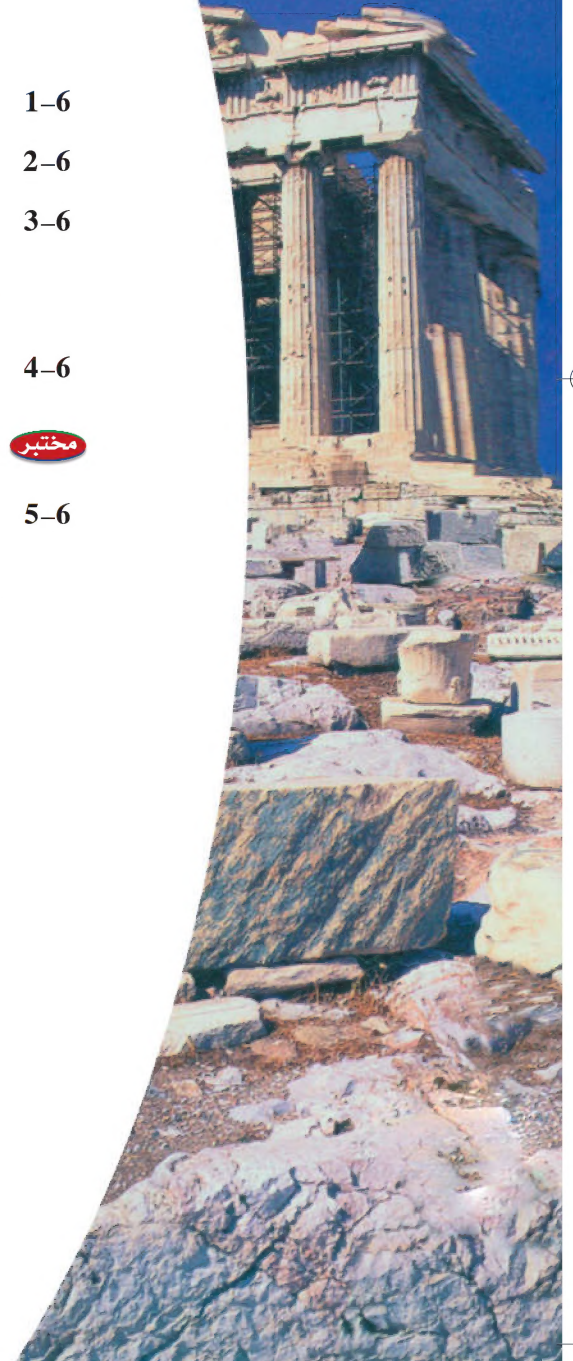
المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

الفصل

6

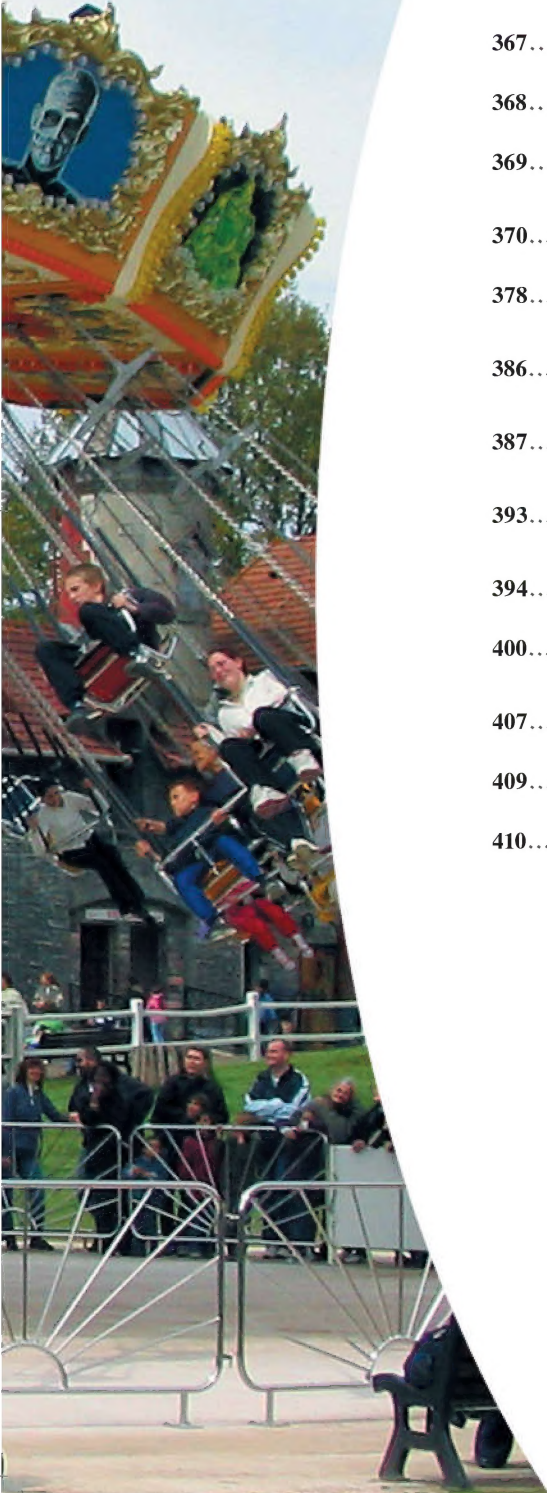
315.....	هل أنت مستعد؟ Are You Ready?	
216.....	دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل Study Guide: Preview	
317.....	الرياضيات قراءة وكتابة Reading and Writing Math	
318.....	مدخل إلى المتتاليات Introduction to Sequences	1-6
325.....	المتسلسلات Series	2-6
333.....	المتتاليات والمتسلسلات الحسابية Arithmetic Sequences and Series	3-6
342.....	اختبار جزئي (الدروس 1-3) Quiz	
343.....	المتتاليات والمتسلسلات الهندسية Geometric Sequences and Series	4-6
352.....	التكنولوجيا: استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية	مختبر
353.....	الاستقراء الرياضي Mathematical Induction	5-6
361.....	دليل الدراسة: مراجعة Study Guide: Chapter Review	
363.....	اختبار الفصل Chapter Test	
364.....	اختبار تراكمي Cumulative Assessment	



علم المثلثات

Trigonometry

- 367..... هل أنت مستعد؟ **Are You Ready?**
- 368..... دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل **Study Guide: Preview**
- 369..... الرياضيات قراءة وكتابة **Reading and Writing Math**
- 370..... قانون الساين وقانون الكوساين **1-7** Low of Sine and Low of Cosine
- 378..... الدوال المثلثية **2-7** Trigonometric Functions
- 386..... **مختبر** التكنولوجيا: المتطابقات المثلثية بيانياً
- 387..... المتطابقات المثلثية الأساسية **3-7** Fundamental Trigonometric Identities
- 393..... اختبار جزئي (الدروس 3-1) **Quiz**
- 394..... متطابقات المجموع والفرق **4-7** Sum and Difference Identities
- 400..... متطابقات الضعف والنصف **5-7** Double-Angle and Half-Angle Identities
- 407..... دليل الدراسة: مراجعة **Study Guide: Chapter Review**
- 409..... اختبار الفصل **Chapter Test**
- 410..... اختبار تراكمي **Cumulative Assessment**



Geometry

الهندسة

الفصل

1

الفصل الأول

الدروس

- | | |
|--------|--------------------------|
| 1-1 | الفضاء الإحداثي |
| مُختبر | إنشاء المضلّعات المنتظمة |
| 2-1 | المضلّعات |
| 3-1 | التناسب الهندسي |
| 4-1 | المتّجهات |

اختبار جزئي

- | | |
|-----|-----------------------------------|
| 5-1 | مساحة الدائرة والمضلّعات المنتظمة |
| 6-1 | بعض قوانين الفضاء |
| 7-1 | الكرة |
| 8-1 | القطاعات الدائرية |

الأجسام الذهبية

تبيّن الصورة عددًا من رباعيّات الوجوه المتداخلة. يُمكنك استعمال البسوط لصنع نماذج لرباعيّات الوجوه ولأجسام هندسيّة أخرى.

هل أنت مستعد؟

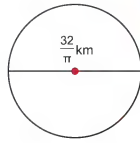
المُفردات

اربط كل مفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

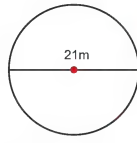
- | | | | |
|---|----------------|----|---|
| 1 | متوازي الأضلاع | أ | المسافة حول الدائرة |
| 2 | نصف القطر | ب | نسبة محيط الدائرة إلى قطرها |
| 3 | باي π | ج | جميع أضلاعه متطابقة |
| 4 | محيط الدائرة | د | المسافة بين مركز الدائرة ونقطة تقع عليها |
| | | هـ | رباعي كل ضلع من أضلاعه مواز للضلع المقابل |

محيط الدائرة ومساحتها

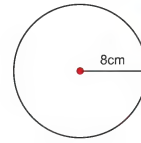
جد مساحة كل دائرة ومحيطها.



7



6



5

حساب المسافة وتحديد منتصف قطعة مستقيمة

جد طول القطعة المستقيمة \overline{AB} وجد إحداثي منتصفها.

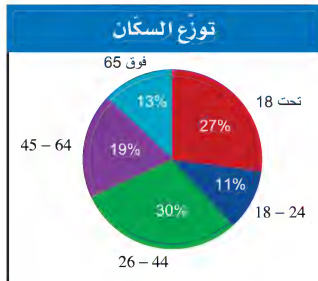
10 $A(0, 1)$ و $B(-3, 4)$

9 $A(-4, -4)$ و $B(2, -3)$

8 $A(-3, 2)$ و $B(5, 6)$

الدوائر البيانية

تُظهر الدائرة البيانية المقابلة توزع السكان في مدينة، وعددهم 400 000 نسمة، وفق أعمارهم.



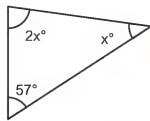
11 ما عدد السكان الذين تقع أعمارهم بين 18 و 24 سنة؟

12 ما عدد السكان الذين تقل أعمارهم عن 18 سنة؟

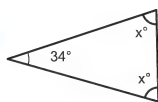
13 ما النسبة المئوية للسكان الذين تزيد أعمارهم على 44 سنة؟

14 ما عدد السكان الذين تزيد أعمارهم على 44 سنة؟

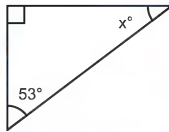
مجموع قياسات زوايا المثلث



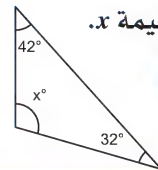
18



17



16



15

جد قيمة x .

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

3D coordinate system	الفضاء الإحداثي
convex	المحدّب
concave	المقعّر
regular polygon	المضلع المنتظم
enlargement	التكبير
compression	التصغير
vector	المتجه
apothem	العامد
center of the circle	مركز الدائرة
center of a regular polygon	مركز المضلع المنتظم
central angle	الزاوية المركزيّة
polyhedron	متعدد الوجوه
arc length	طول القوس
circular sector	القطاع الدائري
circular segment	القطعة الدائريّة

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية:

1. تعرّف المستوى الإحداثي، كيف تساعدك هذه المعرفة على تصوّر الفضاء الإحداثي؟
2. معنى كلمة منتظم أنه يلتزم النظام. ماذا يعني تعبير **المضلع المنتظم** في رأيك؟
3. عندما يقوم طبيب العيون بتوسيع عينك، فإن حدقتها تُصبح أكبر. ما معنى أن يكون شكل هندسي **تكبيراً** لشكل هندسي آخر؟
4. يُعرّف البعض المتجه على أنه قطعة مستقيمة موجهة. كيف تستعمل هذا التعريف لتفهم ما يعنيه **المتجه**؟
5. توجي كلمة عامد بوجود تعامد. هل ترى في تعريف **العامد** ما يؤكّد هذا الإيحاء؟
6. ما تعنيه كلمة مساحة؟ ما هي **مساحة الكرة** برأيك؟
7. أن تصف شيئاً بأنه مركزي يعني أنه موجود في المركز. كيف يساعدك ذلك على فهم تعبير **الزاوية المركزيّة** في الدائرة، وفي المضلع المنتظم؟

في الماضي

درست سابقاً

- المستوى الإحداثي.
- المثلثات وزواياها.
- التحويلات الهندسية مثل السحب والدوران.
- القطع المستقيمة.
- حساب محيط الدائرة ومساحتها.
- قانون المسافة وإحداثي المنتصف في المستوى الإحداثي.
- استعمال الدائرة لحل التمارين

في هذا الفصل

سوف تتعلّم

- الفضاء الإحداثي.
- المضلعات وزواياها.
- تحويلاً هندسياً يُغيّر القياسات.
- القطع المستقيمة الموجهة أو المتجهات.
- المضلعات المنتظمة وحساب مساحاتها.
- قانون المسافة وإحداثي المنتصف في الفضاء الإحداثي.
- القطاعات والقطع الدائريّة وحساب مساحاتها وحساب طول القوس.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لبناء أساس قوي للدراسات العليا.
- لدراسة أمور تتعلّق بموضوعات تتعلّمها.
- لحل مسائل تتعلّق بالهندسة الداخليّة والعمارة.
- لحساب المسافات وتفسير المعلومات الواردة في الصحف والمجلات.
- في الحياة اليوميّة.

الرياضيات

قراءة وكتابة



استراتيجية للقراءة: القراءة لحل مسألة

عندما تباشر قراءة نص مسألة لحلها قد تشعر بالإحباط تجاه ما تقرأ. عندما تنتهي من تمييز مختلف أجزاء المسألة وتترجمها إلى لغة الرياضيات، ستكتشف أن المسألة شبيهة بمسائل سبق لك حلها.

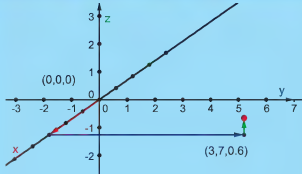
إرشادات للقراءة

- ✓ اقرأ كل جملة ببطء. دُون ما تعنيه الكلمات مع تقدّمك في القراءة.
- ✓ اترجم الكلمات والجمل إلى لغة الرياضيات.
- ✓ ارسم مخططاً. عنون المخطط لكي يُخبرك عما يمثله.
- ✓ اقرأ المسألة مجدداً قبل أن تباشر بحلها.

في نهاية يوم من التّزّه في الجبال، أقام فريق المتزّهرين مخيماً على بعد 3 km شرقاً من نقطة الانطلاق و 7 km شمالاً، ويرتفع عنها 0.6 km. احسب المسافة بين المخيم ونقطة الانطلاق.

استعمل الإرشادات أعلاه لفهم المسألة المقابلة

رسم مخطط



ترجمة النص إلى الرياضيات

يُمكن تمثيل نقطة الانطلاق بنقطة الأصل $(0, 0, 0)$. كما يُمكن تمثيل المخيم بالنقطة $(3, 7, 0.6)$. يُمكن حساب المسافة باستعمال قانون المسافة في الفضاء الإحداثي.

تمييز الكلمات المفاتيح

في نهاية يوم من التّزّه في الجبال، أقام فريق المتزّهرين مخيماً يقع على بعد 3 km شرقاً من نقطة الانطلاق و 7 km شمالاً ويرتفع عنها 0.6 km. احسب المسافة بين المخيم ونقطة الانطلاق.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (7-0)^2 + (0.6-0)^2} \approx 7.6$$

المسافة بين المخيم ونقطة الانطلاق هي 7.6 km تقريباً.

استعمل قانون المسافة في الفضاء الإحداثي لحساب المسافة بين المخيم ونقطة الانطلاق.

حاول

استعمل في المسألة أدناه الإرشادات التالية للقراءة. تحل المسألة.

- حدّد الكلمات - المفاتيح.
- ترجم كل جملة إلى الرياضيات.
- ارسم مخططاً يُمثّل المسألة.

1. أسطوانة ارتفاعها 4m ونصف قطرها 9m. ما أثر مضاعفة كل من هذين القياسين على حجم الأسطوانة؟



الفضاء الإحداثي

3D Coordinate system

1-1

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك الفوز في مسابقة العثور على الكنز باستعمال نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد، يساعدك على تحديد المواقع على الأرض.

الأهداف

يُمثّل النقاط والمعادلات الخطية في الفضاء الإحداثي.

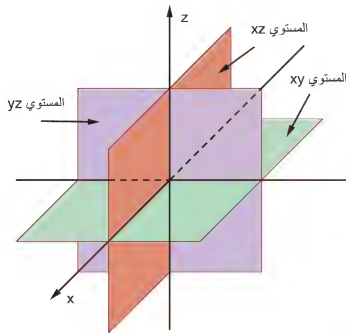
المفردات

Vocabulary

الفضاء الإحداثي

3D Coordinate system

المحور الثالث
z-axis



يُستعمل نظام GPS (الثلاثي الأبعاد) لتحديد المواقع عبر تحديد خطي الطول والعرض حيث يوجد الموقع، وتحديد ارتفاعه.

فكما أن المستوي الإحداثي هو المستوي المصحوب بنظام إحداثيات يتحدّد موقع كل نقطة فيه بعددين هما الإحداثي الأول x والإحداثي الثاني y ، فإن الفضاء الإحداثي هو الفضاء المصحوب بنظام إحداثيات يتحدّد موقع كل نقطة فيه بثلاثة أعداد، هي الإحداثي الأول x -coordinate، الإحداثي الثاني y -coordinate، والإحداثي الثالث z -coordinate.

يتضمّن الفضاء الإحداثي 3 محاور هي المحور الأول x -axis، والمحور الثاني y -axis، والمحور الثالث z -axis. تحدّد هذه المحاور 3 مستويات إحداثية هي: المستوي xy والمستوي yz والمستوي zx .

مثال 1 رسم نقاط في الفضاء الإحداثي

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

أ النقطة $A(2, 3, -2)$

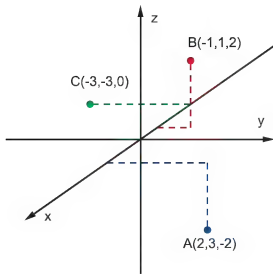
تحرك انطلاقاً من نقطة الأصل وحدتين إلى الأمام على المحور الأول، ثم 3 وحدات إلى اليمين باتجاه مواز للمحور الثاني، ثم وحدتين إلى الأسفل باتجاه مواز للمحور الثالث.

ب النقطة $B(-1, 1, 2)$

تحرك انطلاقاً من نقطة الأصل وحدة إلى الوراء على المحور الأول، ثم وحدة إلى اليمين باتجاه مواز للمحور الثاني، ثم وحدتين إلى الأعلى باتجاه مواز للمحور الثالث.

ج النقطة $C(-3, -3, 0)$

تحرك انطلاقاً من نقطة الأصل 3 وحدات إلى الوراء على المحور الأول، ثم 3 وحدات إلى اليسار باتجاه مواز للمحور الثاني.



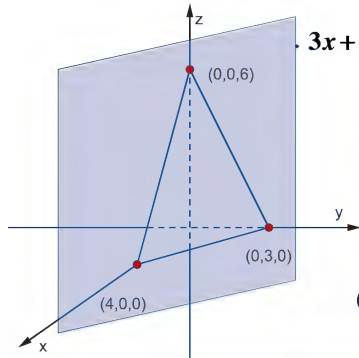
1. ارسم كل نقطة



أ النقطة $D(1, 3, -1)$ **ب** النقطة $E(1, -3, 1)$ **ج** النقطة $F(0, 0, 3)$

تذكر أن معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي هي معادلة خطية، $ax+by+c=0$ بالمتغيرين x و y ؛ وأن جميع النقاط (x, y) ، في المستوى الإحداثي، التي تحقق إحداثياتها هذه المعادلة الخطية تُشكّل هذا المستقيم. كما أن معادلة المستوى في الفضاء الإحداثي، هي معادلة خطية، $ax+by+cz+d=0$ بالمتغيرات x و y و z ؛ وأن جميع النقاط (x, y, z) ، في الفضاء الإحداثي، التي تحقق إحداثياتها هذه المعادلة الخطية تُشكّل هذا المستوى. وبما أن ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تكفي لتحديد مستوى في الفضاء، فإن رسم تقاطعات المستوي، صاحب المعادلة $ax+by+cz+d=0$ ، مع محاور الإحداثيات الثلاثة، كاف لتمثيل هذه المعادلة في الفضاء الإحداثي.

تمثيل معادلة خطية في الفضاء الإحداثي



مثّل في الفضاء الإحداثي المعادلة الخطية $3x+4y+2z=12$.

الخطوة 1 جد تقاطعات المستوي مع محاور الإحداثيات.

مع المحور الأول: $x=4$ ؛ $3x+4y+2z=12$ ؛ $3(4)+4y+2z=12$ ؛ $12+4y+2z=12$ ؛ $4y+2z=0$ ؛ $2z=-4y$ ؛ $z=-2y$ ؛ $z=0$ ؛ $y=3$ ؛ $z=0$ ؛ $(0,3,0)$

مع المحور الثاني: $y=3$ ؛ $3x+4y+2z=12$ ؛ $3x+12+2z=12$ ؛ $3x+2z=0$ ؛ $3x=-2z$ ؛ $x=-\frac{2}{3}z$ ؛ $x=0$ ؛ $z=6$ ؛ $x=0$ ؛ $y=0$ ؛ $z=6$ ؛ $(0,0,6)$

مع المحور الثالث: $z=6$ ؛ $3x+4y+2z=12$ ؛ $3x+4y+12=12$ ؛ $3x+4y=0$ ؛ $3x=-4y$ ؛ $x=-\frac{4}{3}y$ ؛ $x=0$ ؛ $y=0$ ؛ $z=6$ ؛ $x=0$ ؛ $y=0$ ؛ $z=6$ ؛ $(0,0,6)$

الخطوة 2 ارسم النقاط $(0,0,6)$ و $(0,3,0)$ و $(4,0,0)$ ثم ارسم المستوي الذي يمر في هذه النقاط.

مثال 2

مُساعدة

لكي تجد تقاطع مستوي مع أحد المحاور، عوّض عن إحداثي المحاورين الآخرين بـ 0، وحلّ المعادلة الناتجة.

2. مثّل في الفضاء الإحداثي المعادلة الخطية $x-4y+2z=4$.

نقطة مراقبة



تطبيق على التكنولوجيا

مثال 3

من بين ألعاب الحاسوب الشائعة، لعبة تمثيل أدوار يقوم كل لاعب فيها ببناء حضارة. يُعطى، في البدء، كل لاعب 100 قطعة ذهبية لشراء الموارد. بعد ذلك، يتنافس اللاعبون لإبقاء حضاراتهم على قيد الحياة. من قواعد اللعبة أن ثمن وحدة الطعام قطعان ذببتيان، وثمان وحدة الخشب 3 قطع ذهبية، وثمان وحدة الحجارة 5 قطع ذهبية. اكتب معادلة خطية بثلاثة متغيرات لتمثيل الوضع.

أرمز بالمتغير f لكمية الطعام، وبالمتغير w لكمية الخشب، وبالمتغير s لكمية الحجارة.

$$100 \text{ قطعة ذهبية} = \text{ثمان الطعام} + \text{ثمان الخشب} + \text{ثمان الحجارة}$$

$$100 = 2f + 3w + 5s$$

ب استعمل الجدول المقابل لتحديد كمية الحجارة التي يستطيع كل لاعب أن يشتريها.

اللاعب	كمية الطعام	كمية الخشب	كمية الحجارة
دانا	20	10	
زانا	15	15	
خسرو	40	5	
بيشرو	25	10	

$$\text{دانا : } 2(20)+3(10)+5s=100 \text{ ؛ } s=6$$

$$\text{زانا : } 2(15)+3(15)+5s=100 \text{ ؛ } s=5$$

$$\text{خسرو : } 2(40)+3(5)+5s=100 \text{ ؛ } s=1$$

$$\text{بيشرو : } 2(25)+3(10)+5s=100 \text{ ؛ } s=4$$

يستطيع دانا أن يشتري 6 وحدات حجارة

بينما يستطيع زانا شراء 5 وحدات وخسرو وحدة واحدة وبيشرو 4 وحدات.

3. قرّر آزاد القيام برحلة سيراً على الأقدام في عطلة نهاية الأسبوع. اشترى، تحضيراً لرحلته، مصابيح ثمن الواحد منها 3 500 دينار، وفطائر ثمن الواحدة 1 500 دينار، وزجاجات ماء ثمن الواحدة منها 750 ديناراً. دفع آزاد 60 500 دينار ثمناً لمشترياته.



أ) اكتب معادلة خطية بثلاثة متغيرات لتمثيل الحالة.

ب) اشترى آزاد 4 مصابيح و 24 زجاجة ماء. كم فطيرة يكون قد اشترى؟

فكر وناقش

1. افترض أن نقطة الأصل في الفضاء الإحداثي الذي أنت فيه تقع أمامك، أسفل الزاوية اليسرى من قاعة الصف. افترض أن طول وحدة القياس على محاور الإحداثيات يساوي قدماً واحدة. قدر إحداثيات موقع رأسك.
2. صِف مستويًا له تقاطعان فقط مع محاور الإحداثيات.
3. كن منظمًا انسخ المخطط المقابل، ثم أكمله معنويًا كل محور وكل مستوي وكل نقطة.



التمارين

1-1

تمارين موجّهة

1 مفردات وضح الفرق بين المستوي الإحداثي والفضاء الإحداثي.

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

5 $(-1, 2, 4)$

4 $(1, 4, 5)$

3 $(0, 0, 2)$

2 $(-3, -2, 1)$

مثّل كل معادلة في الفضاء الإحداثي.

8 $1.5x + 3y - 2z = -6$

7 $5x - 2y - 4z = 10$

6 $x + y + z = 3$

9 خطوات متعدّدة الحمولة القصوى لشاحنة شركة

التوزيع الوطنية هي طن واحد. تبلغ كتلة الثلاجة kg 75

وكتلة غسالة الصحون kg 50 وكتلة الفرن kg 100.

أ) اكتب معادلة بثلاثة متغيرات لتمثيل الحالة.

ب) أكمل الجدول الذي يبيّن عدد كل نوع من الآلات

الثلاث التي يُمكن للشاحنة نقلها.

ج) تقدير قدر أكبر عدد ممكن من الآلات يُمكن للشاحنة أن تنقله.



تمارين وحل مسائل

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

- 10 (2, -4, 3) 11 (-1, 1, 4) 12 (3, 0, 0) 13 (1, -2, 0)
14 (-3, -3, -3) 15 (5, 0, 2) 16 (0, -3, 2) 17 (-4, -1, 1)

تمارين حرة

انظر المثال	حل التمارين
1	17-10
2	23-18
3	24

مثل كل معادلة في الفضاء الإحداثي.

- 18 $x + y - z = -1$ 19 $2x - y + 2z = 4$ 20 $x + \frac{1}{2}y + z = -2$
21 $5x + y - z = -5$ 22 $8x + 6y + 4z = 24$ 23 $3x - 3y + 2.5z = 7.5$

24 **أحواض السمك** مع هفال 80 000 دينار ليشتري أسماكاً يضعها في حوض السمك. ثمن السمكة الحمراء 10 000 دينار، والسوداء 15 000 دينار، والرمادية 2 500 دينار.

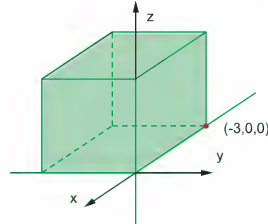
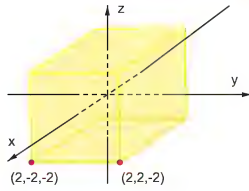
رمادية	سوداء	حمراء
■	2	2
10	1	■
2	■	3
■	1	5

أ اكتب معادلة بثلاثة متغيرات لتمثيل الحالة.

ب أكمل الجدول الذي يبين أعداد السمك التي يُمكن لهفال شراؤها.

25 **رياضة** تحسب للاعب كرة السلة النقاط بحسب ثلاثة أنواع من الرميات. رمية بنقطة رمية حرة ورمية بنقطتين ورمية بثلاث نقاط. سجل أحد اللاعبين 60 نقطة، 20 منها من رميات النقطة. حدّد عدد الرميات الممكنة من النوعين الآخرين.

هندسة حدّد إحداثيات رؤوس كل مكعب.



أسعار البلاط (ثمن البلاطة)

- موزاييك: 1 500 دينار
حجر: 2 000 دينار
سيراميك: 4 000 دينار
خشب: 6 000 دينار

28 **عمارة** خصّص المهندس 8 ملايين دينار لتبليط قاعة يلزمها 2 000 بلاطة. قرّر اختيار 3 أنواع من البلاط: الخشب والسيراميك والحجر. اشترى 400 بلاطة من السيراميك. هل يُمكن للمهندس تبليط ما تبقى من أرض القاعة بالتساوي بين الخشب والحجر؟ أوضّح إجابتك.

29 **تفكير ناقد** هل يُمثل التحرك على خط مستقيم ذهاباً وإياباً تحركاً ثنائي البعدين؟ أوضّح إجابتك.

30 **اكتب** اتصل بك زميلك هاتفيّاً وطلب أن تشرح له كيف يرسم الفضاء الإحداثي. كيف تشرح له؟

مُساعدَة

في الفضاء الإحداثي، يكون:
 الـوَرَاء باتجاه القيم السالبة
 للمحور x .
 الأمام باتجاه القيم الموجبة
 للمحور x .
 اليمين باتجاه القيم الموجبة
 للمحور y .
 اليسار باتجاه القيم السالبة
 للمحور y .
 فوق باتجاه القيم الموجبة
 للمحور z .
 تحت باتجاه القيم السالبة
 للمحور z .

31 يستعمل المهندسون الفضاء الإحداثي لتصميم مشاريع البناء التي يقومون بها. وضع المهندس مصباحاً في النقطة $(7, 12, 10)$ في تصميم تتمثل فيه أرض العمارة بالمستوي xy ، كما أن وحدة القياس على المحورين الأول والثاني تمثل قدماً واحدة.

أ قرر المهندس تعليق مصباحين جديدين يبعد كل منهما 4 أقدام عن المصباح الأول: أحدهما في الاتجاه الموجب للمحور الأول والآخر في الاتجاه الموجب للمحور الثاني. ما إحداثيات موقع كل من نقطتي تعليق المصباحين؟

ب يتدلى كل من المصباحين قدماً ونصفاً تحت نقطة تثبيته. ما إحداثيات كل من المصباحين؟

ج قرر المهندس رفع أرضية البناء 4 أقدام. ما الإحداثيات الجديدة للمصباح الأول؟

32 **خطأ في التحليل** فيما يلي طريقتان لحساب تقاطع المستوي $-5x + 3z = 15$ مع المحور الأول. حدّد الطريقة الخطأ، وأوضح أين الخطأ.

ب

$$\begin{aligned} -5x + 3z &= 15 \\ -5 \times 0 + 3z &= 15 \\ 3z &= 15 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

أ

$$\begin{aligned} -5x + 3z &= 15 \\ -5x + 3 \times 0 &= 15 \\ -5x &= 15 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

تحضير للاختبار

33 أي نقطة تقع وراء النقطة $(1, 1, 4)$ بخمس وحدات؟

- أ $(-4, 1, 4)$ ب $(1, -4, 9)$ ج $(2, 3, 6)$ د $(6, 6, 9)$

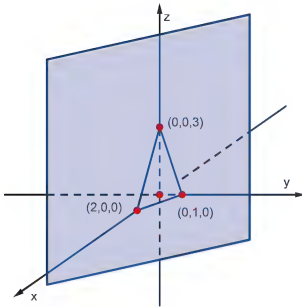
34 أي معادلة يُمثل الرسم المقابل؟

أ $x + 2y + 3z = 6$

ب $2x + y + 3z = 6$

ج $3x + 6y + 2z = 6$

د $6x + 3y + 2z = 6$



35 أي نقطة تُشكّل تقاطع المستوي $2x - 4y + 3z = -12$ مع المحور الثاني؟

أ $(0, -3, 0)$

ب $(0, 0, -3)$

ج $(0, 3, 0)$

د $(3, 0, 0)$

36 جد تقاطع المستوي $5x - 2y - 4z = -3$ مع المحور الثالث.

تحدّ وتوسّع

عندما تقتصر المعادلة الخطية على متغيرين في الفضاء الإحداثي، فإنها تتمثل بمستوى موازٍ لأحد محاور الإحداثيات. حدد المحور الذي يُوازي كل مستوى.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1 \quad \text{40}$$

$$x + z = 3 \quad \text{39}$$

$$y - 2z = 4 \quad \text{38}$$

$$x + y = 2 \quad \text{37}$$

اكتب معادلة للمستوي بمعرفة تقاطعاته مع محاور الإحداثيات.

مع المحور x	مع المحور y	مع المحور z
4	2	-1
25	50	10

41

42

مراجعة لولبية

اذكر اسم الجسم الهندسي بمعرفة عدد أضلاعه وعدد رؤوسه. (الصفوف السابقة)

$$5 \text{ رؤوس و } 8 \text{ أضلاع} \quad \text{43} \quad 6 \text{ رؤوس و } 9 \text{ أضلاع} \quad \text{44} \quad \text{بلا رؤوس ولا أضلاع} \quad \text{45}$$

46 جمع التبرّعات نظّم نادي التضامن لأعضائه رحلة بالدراجات طولها 1920 km. قطع الأعضاء 120 km يومياً. كم يوماً استغرقت الرحلة. (الصفوف السابقة)

حلّ كل نظام خطي. (الصفوف السابقة)

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \quad \text{49}$$

$$\begin{cases} 6x - y = 5 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \quad \text{48}$$

$$\begin{cases} 5y = x \\ \frac{2}{5}x + 7y = 18 \end{cases} \quad \text{47}$$

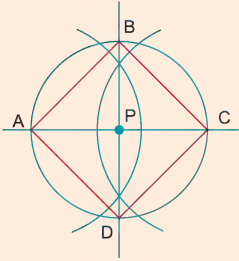
إنشاء المضلعات المنتظمة

Constructing regular polygons



سوف تتعلم في هذا النشاط كيف تُنشئ مضلعاً منتظماً باستعمال الدائرة المحيطة به.

نشاط 1

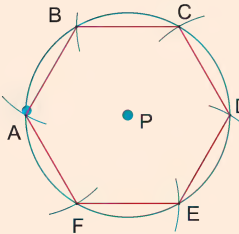


- 1 أنشئ دائرة مركزها النقطة P ثم ارسم القطر \overline{AC} .
- 2 أنشئ محور القطر \overline{AC} وسَمِّ B و D نقطتي تقاطعه مع الدائرة.
- 3 ارسم \overline{AB} و \overline{BC} و \overline{CD} و \overline{DA} . حصلت على رباعي متطابق الأضلاع. وهو أيضاً متطابق الزوايا. إنه مضلع منتظم من 4 أضلاع (مربع).

حاول

- 1 صف طريقة أخرى لرسم مضلع منتظم من 4 أضلاع.
- 2 تقع رؤوس الرباعي المنتظم على دائرة واحدة. ما العلاقة بين الرباعي والدائرة؟
- 3 الثماني المنتظم مضلع ثماني متطابق الأضلاع ومتطابق الزوايا. استعمل منصفات الزوايا لإنشاء ثماني منتظم انطلاقاً من الرباعي المنتظم الذي أنشأته في النشاط 1.

نشاط 2



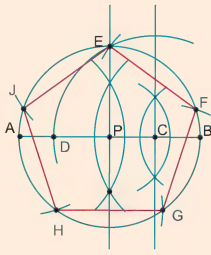
- 1 أنشئ دائرة مركزها النقطة P ، ثم ارسم نقطة A عليها.
- 2 حافظ على انفراج الفرجال بقدر نصف القطر. انطلق من النقطة A لترسم على الدائرة نقاطاً متساوية البعد إحداها عن الأخرى. سَمِّ هذه النقاط B و C و D و E و F .
- 3 ارسم \overline{AB} و \overline{BC} و \overline{CD} و \overline{DE} و \overline{EF} و \overline{FA} . حصلت على سداسي متطابق الأضلاع. وهو أيضاً متطابق الزوايا. إنه سداسي منتظم.

حاول

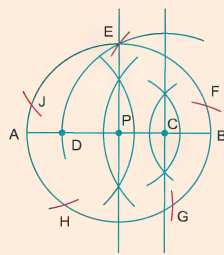
- 4 برّر كون المضلع $ABCDEF$ سداسياً منتظماً (توجيه: ارسم الأقطار \overline{AD} و \overline{BE} و \overline{CF} . أي نوع من المثلثات حصلت عليه؟).
- 5 المضلع الاثنا عشري المنتظم مضلع من 12 ضلعاً متطابقاً و12 زاوية متطابقة. استعمل السداسي المنتظم لإنشاء مضلع اثني عشري منتظم. أوضح طريقته.

نشاط 3

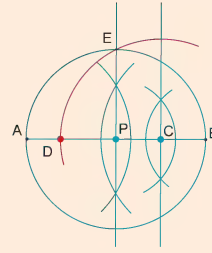
- 1 أنشئ دائرة مركزها النقطة P ، ثم ارسم القطر \overline{AB} .
- 2 أنشئ محور \overline{AB} وسمِّ E إحدى نقطتي تقاطع المحور مع الدائرة.
- 3 أنشئ منتصف نصف القطر \overline{PB} ، وسمِّه C .
- 4 افتح الفرجار بمقدار CE . ضع رأس الفرجال عند C وارسم قوساً يقطع \overline{AB} عند نقطة تسميها D .
- 5 افتح الفرجار بمقدار ED . انطلق من النقطة E لترسم على الدائرة نقاطاً متساوية البعد إحداها عن الأخرى. سمِّ هذه النقاط F و G و H و J .
- 6 ارسم \overline{EF} و \overline{FG} و \overline{GH} و \overline{HJ} و \overline{JE} . حصلت على خماسي متطابق الأضلاع. وهو أيضاً متطابق الزوايا. إنه خماسي منتظم.



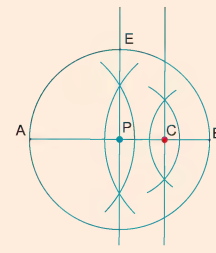
الخطوة 6



الخطوة 5



الخطوة 4



الخطوات من 1 إلى 3

حاول

- 6 العشاري المنتظم مضلع من 10 أضلاع، متطابق الأضلاع ومتطابق الزوايا. استعمل الخماسي المنتظم لإنشاء مضلع عشاري منتظم. أوضح طريقتك.
- 7 احسب قياس كل زاوية في المضلعات المنتظمة التي أنشأتها في النشاطات من 1 إلى 3 وأكمل الجدول التالي:

المضلعات المنتظمة				
عدد الأضلاع	3	4	5	6
قياس كل زاوية	60°			
مجموع قياسات الزوايا	180°			

- 8 اكتب مقولة ما القاعدة العامة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع منتظم من n ضلعاً.
- 9 اكتب مقولة ما القاعدة العامة لإيجاد قياس كل من الزوايا الداخلية لمضلع منتظم من n ضلعاً.

المضلّعات

Polygons

2-1



لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يدخل النور إلى عدسة آلة التصوير عبر فتحة تكوّنّها مجموعة من الشفرات، بحيث تتخذ شكل مضلع. (انظر المثال 5).

الأهداف

يُصنّف المضلّعات بالاستناد إلى أضلاعها وزواياها. يجد قياسات الزوايا الداخلية والخارجية لمضلع ويستعملها.

المفردات

Vocabulary

ضلع المضلع
Side of a polygon
رأس المضلع
Vertex of a polygon

القطر
Diagonal

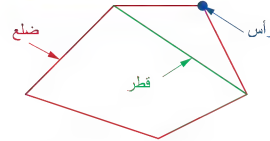
المضلع المنتظم
Regular polygon

المقعّر
Concave

المحدّب
Convex

عدد الأضلاع	الاسم
3	مثلث
4	رباعي
5	خماسي
6	سداسي
7	سباعي
8	ثماني
9	تساعي
10	عشاري
11	أحد عشري
12	اثنا عشري

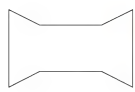
تذكّر أن المضلع شكل هندسي مغلق في المستوي، يتألف من 3 قطع مستقيمة أو أكثر بحيث لا تكون قطعتان منها على استقامة واحدة، وبحيث تتقاطع كل قطعة مستقيمة مع قطعتين مستقيمتين فقط، واحدة عند كل طرف من طرفيها. كل قطعة من هذه القطع المستقيمة هو ضلع Side للمضلع. كل طرف مشترك بين ضلعين هو رأس Vertex للمضلع. كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين من رؤوس المضلع هي قطر Diagonal له.



تستطيع تسمية مضلع بعد أضلاعه. يُبين الجدول بعضاً من هذه التسميات. فالمضلع ABCDE أعلاه خماسي.

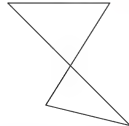
مثال 1 تمييز المضلّعات

اذكر إن كان الشكل مضلعاً أم لا. سمّه إن كان مضلعاً.



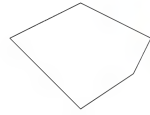
ج

مضلع، ثماني



ب

ليس بمضلع



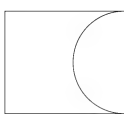
ا

مضلع، خماسي

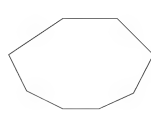
تذكّر

المضلع شكل هندسي مغلق في المستوي يتألف من 3 قطع مستقيمة أو أكثر تتقاطع عند أطرافها فقط.

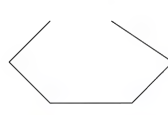
1. اذكر إن كان الشكل مضلعاً أم لا. سمّه إن كان مضلعاً.



ج

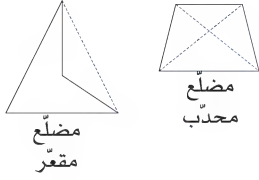


ب



ا

المضلع المنتظم Regular polygon مضلع جميع أضلاعه متطابقة (أي لها الطول نفسه) وجميع زواياه متطابقة (أي لها القياس نفسه).



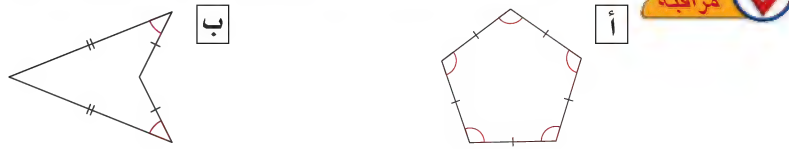
المضلع المقعر **Concave** مضلع يتضمن قطراً على الأقل تقع بعض نقاطه خارج المضلع. المضلع المحدب **Convex** مضلع تقع جميع أقطاره داخل المضلع. المضلع المنتظم هو دوماً محدب.

مثال 2 تصنيف المضلعات

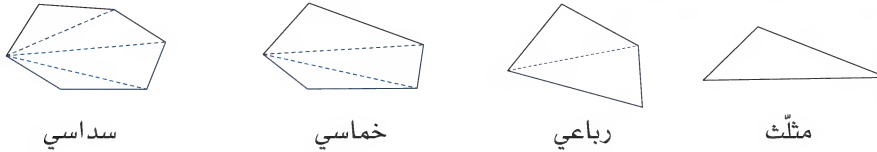
اذكر إن كان المضلع منتظماً أم لا، وإن كان محدباً أم مقعراً.



2. اذكر إن كان المضلع منتظماً أم لا، وإن كان محدباً أم مقعراً.



لكي تجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب، ارسم جميع أقطاره التي تنطلق من رأس واحد من رؤوسه. يُنشئ ذلك عدداً من المثلثات. مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع هو مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلثات كلها.



تذكر

وفقاً لمبرهنة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث، فإن هذا المجموع هو 180 درجة.

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$(1) \times 180^\circ = 180^\circ$
رباعي	4	2	$(2) \times 180^\circ = 360^\circ$
خماسي	5	3	$(3) \times 180^\circ = 540^\circ$
سداسي	6	4	$(4) \times 180^\circ = 720^\circ$
مضلع من n ضلعاً	n	$n-2$	$(n-2) \times 180^\circ$

يتبين في كل مضلع أن عدد المثلثات، الناتجة عن رسم الأقطار المنطلقة من أحد رؤوسه، يقل 2 عن عدد الأضلاع n . ينتج من ذلك أن مجموع قياسات زوايا تلك المثلثات هو $(n-2) \times 180^\circ$.

مبرهنة 1-1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب له n ضلعاً هو $(n-2) \times 180^\circ$.



سوف نقتصر فيما بعد على المضلعات المُحدَّبة.

مثال 3 إيجاد قياسات الزوايا الداخلية لمضلع وإيجاد مجموعها

أ جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لثمانية

$$(n-2) \times 180^\circ \quad \text{مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلع.}$$

$$(8-2) \times 180^\circ \quad \text{عوّض عن } n \text{ بقيمته.}$$

$$1080^\circ \quad \text{بسّط.}$$

ب جد قياس كل زاوية داخلية في تساعي منتظم.

الخطوة 1 جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية للتساعي المنتظم.

$$(n-2) \times 180^\circ \quad \text{مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلع.}$$

$$(9-2) \times 180^\circ = 1260^\circ \quad \text{عوّض عن } n \text{ بقيمته.}$$

الخطوة 2 جد قياس زاوية داخلية واحدة.

$$\frac{1260^\circ}{9} = 140^\circ \quad \text{اقسم المجموع على 9 لأن جميع الزوايا متطابقة.}$$

ج جد قياس كل زاوية داخلية في الرباعي المقابل.

$$(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ \quad \text{مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلع.}$$

$$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360^\circ \quad \text{مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية لمضلع.}$$

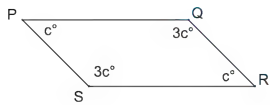
$$c + 3c + c + 3c = 360$$

$$8c = 360$$

$$c = 45$$

$$m\hat{P} = m\hat{R} = 45^\circ$$

$$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45^\circ) = 135^\circ$$



عوّض.

جمع الحدود المتشابهة.

اقسم كل طرف على 8.

أ 3. جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع له 15 ضلعاً.

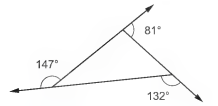
ب جد قياس كل زاوية داخلية في عشاري منتظم.

نقطة
مراقبة

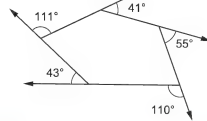
تذكّر

الزاوية الخارجية لمثلث هي الزاوية الواقعة بين أحد أضلاع المثلث وامتداد أحد الضلعين المجاورين له.

تم قياس كل زاوية خارجية في كل مضلع من المضلعات المقابلين. لاحظ أن مجموع قياسات الزوايا الخارجية في كل مضلع كان 360° .



$$147^\circ + 81^\circ + 132^\circ = 360^\circ$$



$$43^\circ + 111^\circ + 41^\circ + 55^\circ + 110^\circ = 360^\circ$$

مبرهنة 2-1 مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع

مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع محدّب هو 360° .

اعلم

احفظ

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجية لمضلع وإيجاد مجموعها

أ جد قياس كل زاوية خارجية لسداسي منتظم.

للسداسي 6 أضلاع و 6 رؤوس.

مجموع قياسات الزوايا الخارجية هو 360°

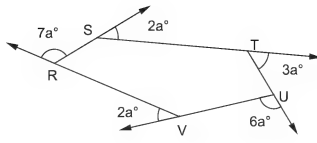
مبرهنة مجموع قياسات الزوايا

الخارجية لمضلع.

اقسم على 6 لأن للسداسي المنتظم 6

قياس كل زاوية خارجية هو $\frac{360^\circ}{6}$ أو 60°

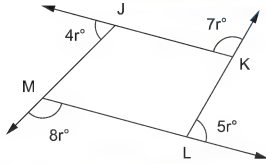
قياس كل زاوية خارجية في سداسي منتظم هو 60° . زوايا خارجية متطابقة.



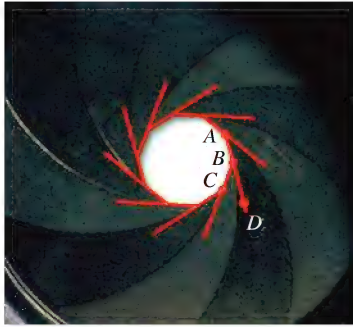
ب جد قيمة a في المضلع المقابل.

مبرهنة مجموع الزوايا الخارجية لمضلع.
جمع الحدود المتشابهة.
اقسم كل طرف على 20.

$$\begin{aligned} 7a^\circ + 2a^\circ + 3a^\circ + 6a^\circ + 2a^\circ + 7a^\circ &= 360^\circ \\ 20a &= 360 \\ a &= 18 \end{aligned}$$



أ جد قياس كل زاوية خارجية في مضلع اثني عشري منتظم.
ب جد قيمة r في المضلع المقابل.



مثال 5 تطبيق على التصوير

تُشكّل 10 شفرات فتحة آلة التصوير. تتراكب الشفرات لكي تُشكّل مضلعاً عُشارياً منتظماً. ما قياس \widehat{CBD} ؟

\widehat{CBD} زاوية خارجية في عُشاري منتظم. مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع هو 360° بالاستناد إلى مبرهنة مجموع الزوايا الخارجية لمضلع. إذن:

للعشاري المنتظم 10 زوايا خارجية متطابقة،
لذا اقسم 360° على 10.

$$m\widehat{CBD} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

5. ماذا لو... افترض أن عدد الشفرات كان 8 بدلاً من 10. كم سيكون قياس كل زاوية خارجية؟



فكر وناقش

- ارسم خماسياً محدّباً وخماسياً مقعّراً. أوضح الفرق بين المضلعين.
- أوضح السبب الذي يمنعك من استعمال $\frac{360^\circ}{n}$ لإيجاد قياس زاوية خارجية في مضلع غير منتظم.
- انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل خلية مقداراً لإيجاد القيمة المحددة لمضلع منتظم له n ضلعاً.

الزوايا الخارجية	الزوايا الداخلية	مجموع قياسات الزوايا
		قياس كل زاوية



2-1 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات هل يكفي تطابق الأضلاع لكي يكون المضلع منتظماً؟ أوضّح جوابك وأسند به مثال.

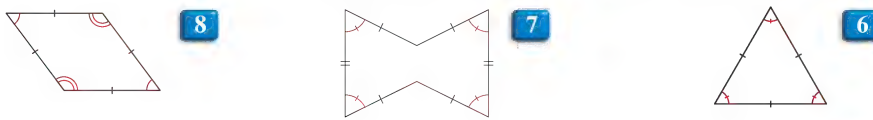
1 انظر المثال

اذكر إن كان كل شكل مضلعاً أم لا. سمّ الشكل إذا كان مضلعاً.



2 انظر المثال

اذكر إن كان المضلع منتظماً أم لا، وإن كان محدّباً أو مقعّراً.

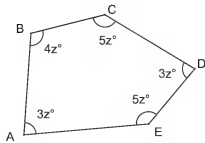


3 انظر المثال

9 جد قياس كل زاوية داخلية في الخماسي المقابل.

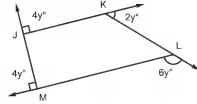
10 جد قياس كل زاوية داخلية في مضلع اثني عشري منتظم.

11 جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب من 20 ضلعاً.



12 جد قيمة y في المضلع المقابل.

13 جد قياس كل زاوية خارجية في خماسي منتظم.



5 انظر المثال

سلامة عامة استعمل إشارة السير

المقابلة لحل التمرينين 14 و 15.

14 سمّ المضلع بحسب عدد أضلاعه.

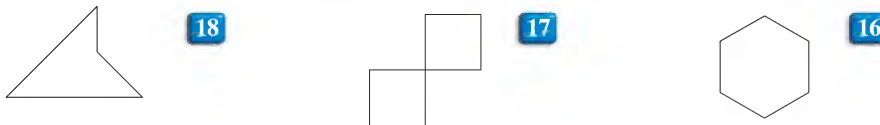
15 جد $m\hat{Q}$ و $m\hat{S}$ علمًا بأن \hat{P} و \hat{R} و \hat{T}

زوايا قائمة وبأن $\hat{Q} \cong \hat{S}$.



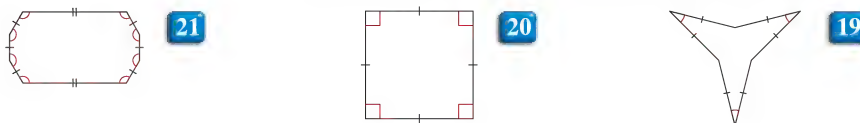
تمارين وحلّ مسائل

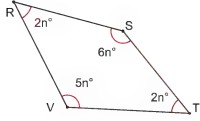
اذكر إن كان الشكل المرسوم مضلعاً أم لا. سمّ الشكل إذا كان مضلعاً.



تمارين حرة	
انظر	لحل
المثال	التمارين
1	18-16
2	21-19
3	24-22
4	26-25
5	28-27

اذكر إن كان المضلع منتظماً أم لا، وإن كان محدّباً أو مقعّراً.





22 جد قياس كل زاوية داخلية في المضلع المقابل.

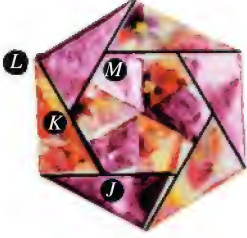
23 جد قياس كل زاوية داخلية في مضلع منتظم من 18 ضلعاً.

24 جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لسباعي.

25 جد قياس كل زاوية خارجية في تساعي منتظم.

26 قياسات الزوايا الخارجية لخماسي هي

$2a^\circ, 8a^\circ, 10a^\circ, 4a^\circ, 6a^\circ$ ما قيمة a ؟

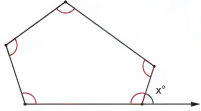


استعمل الصورة المقابلة لحل التمرينين 27 و 28.

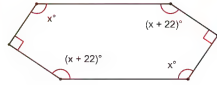
27 جد $m\widehat{JKM}$

28 جد $m\widehat{MKL}$

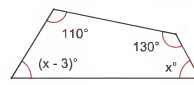
الجبر جد قيمة x في كل شكل.



31



30



29

جد عدد أضلاع المضلع المناسب للوصف.

32 قياس كل زاوية داخلية يساوي قياس كل زاوية خارجية.

33 قياس كل زاوية داخلية يساوي 4 أضعاف قياس كل زاوية خارجية.

34 قياس كل زاوية خارجية يساوي $\frac{1}{8}$ قياس كل زاوية داخلية.

سمّ المضلع المنتظم الذي يساوي مجموع زواياه الداخلية كلاً من التالي.

2520° 38

1800° 37

900° 36

540° 35

خطوات متعددة ما عدد أضلاع مضلع منتظم وما قياس زاويته الداخلية، علماً أن قياس

زاويته الخارجية هو:

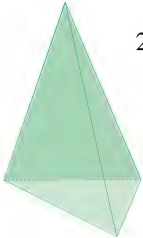
24° 42

36° 41

72° 40

120° 39

43 خطأ في التحليل أي استنتاج خاطئ؟ أين الخطأ؟



لا تمثل الصورة المقابلة مضلعاً

تمثل الصورة المقابلة مضلعاً

44 تقدير ارسم المضلع المحدد بالنقاط $D(4, 0)$ $C(-1, 2)$ $B(-4, -1)$ $A(-2, -6)$

$E(3, -5)$. قدر قياس كل زاوية داخلية. ماذا تقول عن زوايا هذا المضلع؟ استعمل المنقلة

لقياس هذه الزوايا وتحقق من مقولتك.

45 فيما يلي بعض المعطيات عن الزوايا في قطعة الكوارتز المقابلة.

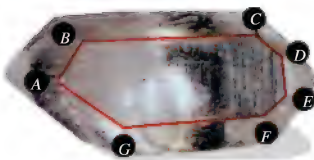
$m\widehat{E} = m\widehat{D} = 130^\circ$, $m\widehat{B} = 125^\circ$, $m\widehat{A} = 95^\circ$

$m\widehat{C} = m\widehat{F} = m\widehat{G}$

أ سمّ المضلع $ABCDEFG$.

ب ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع؟

ج جد $m\widehat{F}$

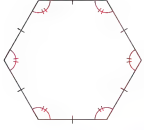


46 مضلع منتظم محيطه 45 m وطول ضلع من أضلاعه 7.5 m. سمّ هذا المضلع.

ارسم:

47 رباعياً منتظماً 48 سباعياً مقعراً غير منتظم

49 خماسياً محدباً غير منتظم 50 مضلعاً أضلاعه متطابقة وزواياه غير متطابقة



51 اكتب استعمل مفردات الدرس لكي تطلق على المضلع المقابل كل الصفات الممكنة

52 تفكير ناقد إلى أي شكل هندسي يقترب مضلع منتظم بتزايد عدد أضلاعه؟



تحضير للاختبار

53 أي أوصاف تنطبق على الشكل المقابل؟



I. رباعي II. مقعر III. منتظم
(أ) فقط I (ب) فقط II (ج) I و II (د) I و III

54 أي وصف لا ينطبق على مضلع منتظم من 16 ضلعاً.

(أ) مضلع محدب (ب) جميع أضلاعه متطابقة
(ج) مجموع قياسات زواياه الداخلية 2880° (د) مجموع زواياه الخارجية 360°

55 ما $m\hat{C}$ في رباعي ABCD علماً بأن $m\hat{A}=45^\circ$ و $m\hat{B}=111^\circ$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$

(أ) 24° (ب) 68° (ج) 102° (د) 136°

تحدّ وتوسع

56 تشكّل قياسات الزوايا الداخلية لخماسي محدب متتالية أعداد يزيد كل منها،

باستثناء الأول، 4 عن سابقه. جدّ قياسات زوايا هذا الخماسي.

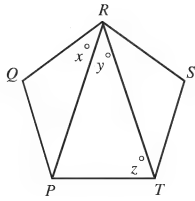
57 جدّ قيم x و y و z في الخماسي المقابل علماً بأنه منتظم.

58 خطوات متعددة المضلع ABCDEFGHJK عشاري منتظم. تم تمديد

الضلعين AB و DE لكي يلتقيا عند النقطة L خارج المضلع. جدّ $m\hat{BLD}$.

59 تفكير ناقد هل تصح مبرهنة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع على

مضلع مقعر؟ ارسم شكلاً لإسناد جوابك.



مراجعة لولبية

حلّ كل معادلة باستعمال التحليل. (الصفوف السابقة)

60 $x^2 + 3x - 10 = 0$ 61 $x^2 - x - 12 = 0$ 62 $x^2 - 12x = -35$

في التمارين من 63 إلى 65، يُعطى طولاً ضلعين من أضلاع مثلث. عليك أن تجد حدّين

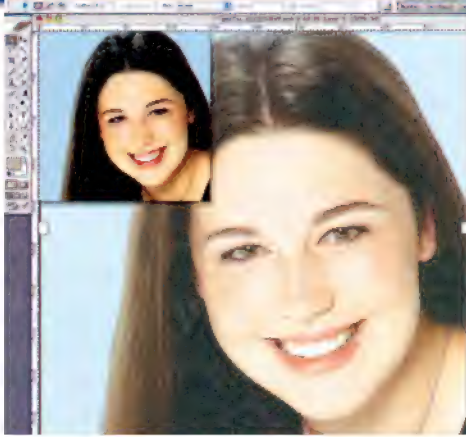
يقع بينهما طول الضلع الثالث x . (الصفوف السابقة)

63 4 : 4 64 12 : 6 65 7 : 3

في مثلث قائم 90-60-30، جدّ: (الصفوف السابقة)

66 طول الوتر علماً بأن طول الضلع الأصغر للزاوية القائمة 6.

67 طول الضلع الأكبر للزاوية القائمة علماً بأن طول الوتر 10.



التناسب الهندسي

Dilation

3-1

الأهداف

يُطبّق خصائص التشابه في
المستوي الإحداثي.
يُبرهن تشابه شكلين هندسيين
باستعمال الإحداثيات.

المفردات

Vocabulary

التناسب الهندسي
Dilation

نسبة التحويل
Scale factor

من يستعمل هذا الأمر؟

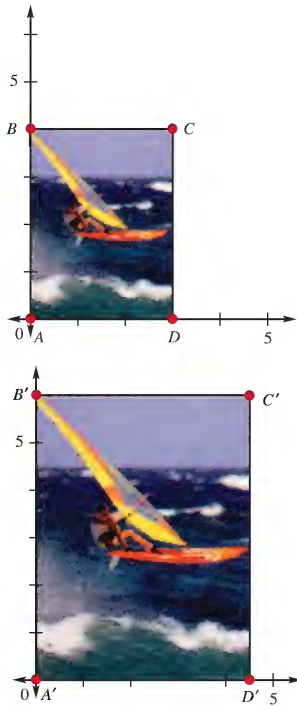
تستعمل برمجيات الحاسوب
الإحداثيات للتكبير والتصغير.

تعتمد أكثر الصور التي تراها على الإنترنت
بنية (format) JPEG، لأنها تسهل تبادل
الصور وانتقالها. عندما تجرّ بواسطة الماوس
زاوية صورة من بنية JPEG بهدف تكبيرها أو تصغيرها، تحسب البرمجية قياسات الصورة الناتجة
باستعمال الإحداثيات والتشابه.

التناسب الهندسي Dilation تحويل هندسي يُغيّر قياسات شكل هندسي مع المحافظة على هيئته.
الأصل والصورة في هذا التحويل هما شكلان متشابهان. **نسبة** هذا التحويل الهندسي **Scale factor**
هي عدد حقيقي موجب $k \neq 1$ يُبين كم تم تكبير (أو تصغير) الصورة قياساً على الأصل. صورة
النقطة (x, y) بتناسب هندسي نسبته k هي النقطة (kx, ky) . يكون التناسب الهندسي تكبيراً إذا
كان $k > 1$ ويكون تصغيراً إذا كان $k < 1$.

تطبيق على برمجيات الحاسوب

مثال 1



يُبين الشكل المقابل موقع صورة من بنية JPEG.

ارسم حدود الصورة الناتجة من تحويل الصورة
الأصلية بتكبير نسبته $\frac{3}{2}$.

الخطوة 1 اضرب إحداثيات كل رأس من رؤوس الأصل،
في $\frac{3}{2}$ في $D(3, 0)$ ، $C(3, 4)$ ، $B(0, 4)$ ، $A(0, 0)$

المستطيل

المستطيل

ABCD

A'B'C'D'

$$A(0, 0) \rightarrow A'(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}) \rightarrow C'(\frac{9}{2}, 6)$$

$$D(3, 0) \rightarrow D'(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}) \rightarrow D'(\frac{9}{2}, 0)$$

الخطوة 2 ارسم النقاط $A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$ ، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$
ثم ارسم المستطيل.

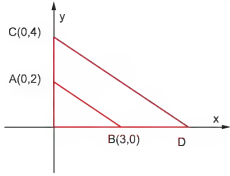
1. **ماذا لو...** ارسم حدود الصورة الناتجة من تحويل الصورة الأصلية
بتصغير نسبته $\frac{1}{2}$.





إيجاد إحداثيات شكل هندسي مشابه لشكل مُعطى

مثال 2



جِدْ إحداثيي النقطة D ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل النقطة B إلى النقطة D ، ونوعه؛ علماً بأن المثلثين AOB و COD متشابهان.

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \text{بما أن المثلثين متشابهان فإن}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{OD}$$

عوّض عن كل قياس معروف بقيمته.

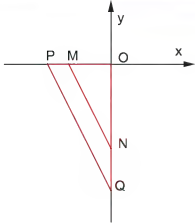
خاصية الضرب المتعامد.

$$2OD = 12 \quad \text{أو}$$

اقسم كل طرف على 2.

$$OD = 6$$

بما أن D تقع على المحور الأول. فإن إحداثيها الثاني يساوي 0. وبما أن $OD = 6$ فإن إحداثيها الأول يساوي 6. إحداثيا D هما $(6, 0)$. بما أن $(6, 0) = (3 \times 2, 0 \times 2)$ فإن نسبة التحويل هي 2. إنه تكبير.

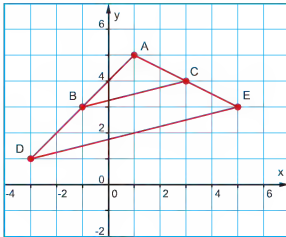


2. المثلثان POQ و MON متشابهان حيث
 $Q(0, -30)$ ، $P(-15, 0)$ ، $M(-10, 0)$
 جِدْ إحداثيي N ونسبة التناسب الهندسي،
 ثم حدّد نوعه.



البرهنة إحداثياً على تشابه مثلثين

مثال 3



المعطى: $C(3, 4)$ ، $B(-1, 3)$ ، $A(1, 5)$ ،
 $E(5, 3)$ ، $D(-3, 1)$

المطلوب: برهن تشابه المثلثين ABC و ADE .
 الخطوة 1 ارسم النقاط، ثم المثلثين.

الخطوة 2 استعمل قانون المسافة لحساب أطوال الأضلاع.

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{5}$$

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AE = \sqrt{(5-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AD = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

الخطوة 3 جِدْ نسبة التشابه.

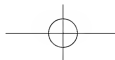
$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بما أن $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ وبما أن $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE}$ فإن المثلثين متشابهان.

3. المعطى: $V(4, 3)$ ، $U(-5, 3)$ ، $T(0, 1)$ ، $S(-3, 1)$ ، $R(-2, 0)$

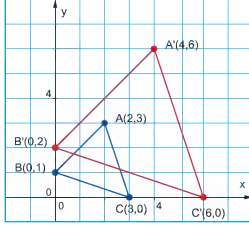
المطلوب: برهن تشابه المثلثين RUV و RST .



استعمال مبرهنة SSS لتشابه المثلثات

مثال 4

ارسم المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بتكبير نسبته 2.
تحقق من تشابه المثلثين.



الخطوة 1 اضرب إحداثيات كل نقطة في 2 لتجد إحداثيات المثلث $A'B'C'$.

$$A(2, 3) \rightarrow A'(2 \times 2, 3 \times 2) \rightarrow A'(4, 6)$$

$$B(0, 1) \rightarrow B'(0 \times 2, 1 \times 2) \rightarrow B'(0, 2)$$

$$C(3, 0) \rightarrow C'(3 \times 2, 0 \times 2) \rightarrow C'(6, 0)$$

الخطوة 2 ارسم المثلث $A'B'C'$.

الخطوة 3 استعمال قانون المسافة لحساب أطوال الأضلاع.

$$A'B' = \sqrt{(4-0)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

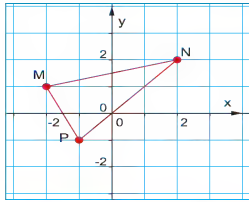
$$B'C' = \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$A'C' = \sqrt{(6-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad AC = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

الخطوة 4 جد نسبة التشابه.

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$$

بما أن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ فإن المثلثين $A'B'C'$ و ABC متشابهان.



4. ارسم صورة المثلث MNP بتكبير نسبته 2.
تحقق من أن هذا المثلث وصورته بالتكبير متشابهان.



فكر وناقش

- إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(0, 0)$ ، $K(0, 2)$ ، $L(3, 0)$. إحداثيات رؤوس صورة هذا المثلث بتناسب هندسي هي $J'(0, 0)$ ، $K'(0, 8)$ ، $L'(12, 0)$. كيف تجد نسبة التناسب الهندسي؟ وكيف تحدّد نوعه؟
- كن منظماً انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. دَوِّن في كل إطار ما هو مطلوب.

التعريف	الخاصية
التكبير والتصغير	
مثال	مثال مضاد

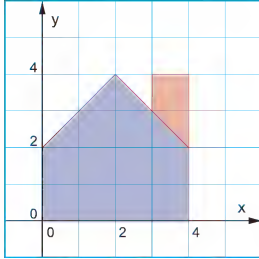


التمارين

3-1

تمارين موجّهة

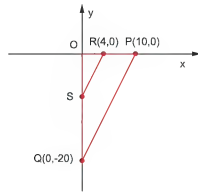
1 مفردات نسبة قياسات صورة شكل هندسي بتكبير أو تصغير هي ؟ . (التناسب الهندسي، نسبة التناسب الهندسي).



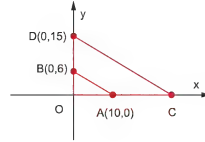
2 تصميم بياني Graphic Design صمّم أحد المهندسين الشكل المقابل ليكون شعاراً لإحدى المؤسسات. طلب مدير المؤسسة من المهندس تكبير هذا الشعار بنسبة 2. ارسم الشعار بعد تكبيره.

انظر المثال 1

4 المثلثان ROS و POQ متشابهان. جد إحداثي S ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلث POQ إلى المثلث ROS . ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



3 المثلثان AOB و COD متشابهان. جد إحداثي C ونسبة التناسب الهندسي الذي يُحوّل المثلث AOB إلى المثلث COD . ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



انظر المثال 2

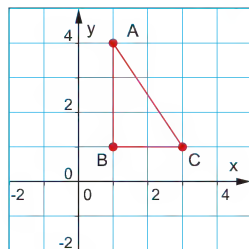
5 المُعطى : $E(6, 4)$ ، $D(-2, 2)$ ، $C(3, 2)$ ، $B(-1, 1)$ ، $A(0, 0)$. المطلوب: برهن أن المثلثين ABC و ADE متشابهان.

6 المُعطى : $N(5, -3)$ ، $M(-4, -6)$ ، $L(3, -2)$ ، $K(-3, -4)$ ، $J(-1, 0)$. المطلوب: برهن أن المثلثين JMN و JKL متشابهان.

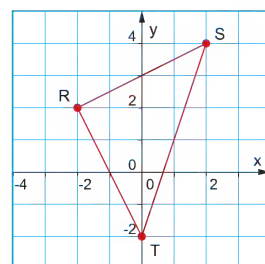
انظر المثال 3

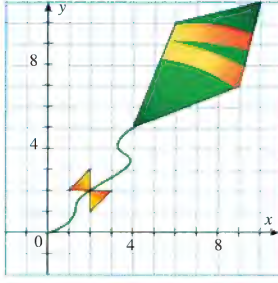
خطوات متعدّدة ارسم صورة كل مثلث بالتكبير المُعطاة نسبته، ثم تحقّق من أن الصورة والأصل مثلثان متشابهان.

النسبة 2 8



النسبة 3/2 7





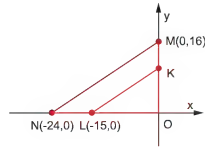
تمارين وحل مسائل

9 إعلانات صممت إحدى وكالات الإعلان الرسم المقابل شعاراً لشهر التسوق. ترغب الوكالة في تصغير هذا الشعار بنسبة النصف لطبعه على بطاقات. ارسم الشعار بعد تصغيره.

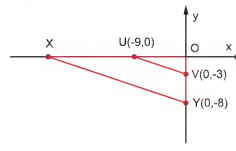
تمارين حرة

أنظر المثال	حل التمارين
1	10
2	12-11
3	14-13
4	16-15

11 المثلثان KOL و MON متشابهان. جد إحداثي K ونسبة التناسب الهندسي الذي يحول المثلث MON إلى المثلث KOL . ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



10 المثلثان XOY و UOV متشابهان. جد إحداثي X ونسبة التناسب الهندسي الذي يحول المثلث UOV إلى المثلث XOY . ما نوع هذا التناسب الهندسي؟



12 **المُعطى:** $H(5, -3)$, $G(-4, -3)$, $F(3, -1)$, $E(-3, -1)$, $D(-1, 3)$. **المطلوب:** أثبت أن المثلثين DEF و DGH متشابهان.

13 **المُعطى:** $R(30, 20)$, $Q(10, -10)$, $P(15, 15)$, $N(5, 0)$, $M(0, 10)$. **المطلوب:** أثبت أن المثلثين MQR و MNP متشابهان.

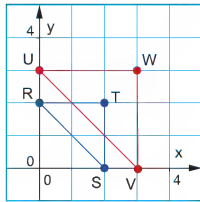
خطوات متعددة ارسم صورة كل مثلث بعد تحويله تكبيراً أو تصغيراً بالنسبة k . بعد ذلك، تحقق من أن المثلث وصورته متشابهان.

14 $k = 3$; $L(-3, -2)$, $K(-1, -1)$, $J(-2, 0)$

15 $k = \frac{1}{2}$; $P(2, -2)$, $N(4, 2)$, $M(0, 4)$

16 **تفكير ناقد** هل التحويل الهندسي الذي يحول النقطة (x, y) إلى النقطة $(2x, 4y)$ تناسب هندسي؟ أوضح جوابك.

17 **خطأ في التحليل** في ما يلي حلان لإيجاد نسبة التناسب الهندسي الذي يحول المثلث RST إلى المثلث UVW . أيهما خطأ؟ أوضح جوابك.

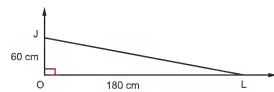


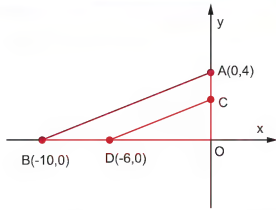
ب نسبة التناسب الهندسي هي نسبة الأضلاع بين المثلثين. بها أن $\frac{RT}{UV} = \frac{3}{2}$ فإن هذه النسبة هي $\frac{2}{3}$.

أ تم ضرب إحداثي كل نقطة في $\frac{3}{2}$ للانتقال من المثلث RST إلى المثلث UVW . نسبة التناسب الهندسي هي $\frac{3}{2}$.

18 **اكتب** المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بتناسب هندسي. ما العلاقة بين نسبة التناسب الهندسي ونسبة التشابه بين المثلثين؟ أوضح جوابك.

19 ما إحداثيات J و L ، إذا اعتبرت أن كل وحدة على محوري الإحداثيات تُقابل 60 cm في الواقع؟ ارسم المثلث في المستوي الإحداثي، ثم ارسم تكبيره بنسبة 3.



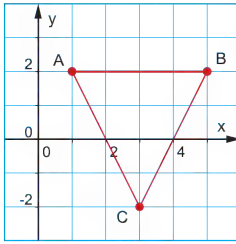


20 أي إحداثيات تختار للنقطة C لكي يكون المثلثان AOB و COD متشابهين؟

- (أ) $(0, 2.4)$ (ب) $(0, 2.5)$
(ج) $(0, 3)$ (د) $(0, 3.6)$

21 المثلث $A'B'C'$ هو نتيجة تكبير المثلث ABC بنسبة 2. كم محيط $A'B'C'$ إذا كان محيط ABC 60؟

- (أ) 30 وحده (ب) 60 وحده (ج) 120 وحده (د) 240 وحده

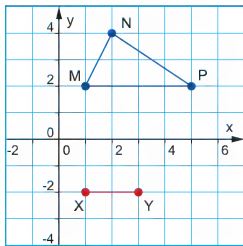


22 أي مثلث DEF مشابه للمثلث ABC ؟

- (أ) $F(2, 0)$ ، $E(3, 2)$ ، $D(1, 2)$
(ب) $F(1, -5)$ ، $E(2, -2)$ ، $D(-1, -2)$
(ج) $F(3, 0)$ ، $E(5, 2)$ ، $D(1, 2)$
(د) $F(-1, 0)$ ، $E(0, 2)$ ، $D(-2, -2)$

23 جواب مختصر تم تكبير \overline{AB} ، حيث $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ ، بنسبة 3. كم طول الصورة $A'B'$ ؟

تحدّ وتوسع



24 كم مثلثاً أحد أضلاعه \overline{XY} مشابه للمثلث MNP ؟

25 جد إحداثي Z بحيث يكون المثلث XYZ مشابهاً للمثلث MPN .

26 يقع ضلعاً مستطيل على محوري الإحداثيات، بينما يقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل من المستوي الإحداثي، ويقع رأس آخر على المستقيم $y=2x$. أثبت أن مستطيلين يُحقّقان الشروط السابقة متشابهان.

27 رؤوس المثلث ABC هي $A(0, 1)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(1, 3)$. جد موقعين للرأس F في المثلث DEF ، حيث $D(1, -1)$ و $E(7, -1)$ ، لكي يكون المثلثان متشابهين.

مراجعة لولبية

اكتب متباينة لتمثيل الحالة. (الصفوف السابقة)

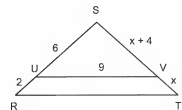
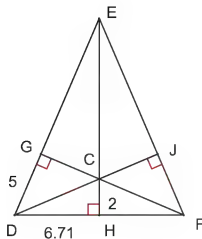
28 تحمل رافعة 250k على الأقل. تم تثبيت جسمين كتلة كل منهما 50k على طرفي عارضة الرافعة التي كتلتها 5k. ارمز بالمتغير x إلى كتلة يُمكن أن تُضاف مجدداً إلى العارضة. اكتب متباينة يُحقّقها x .

جد طول كل قطعة مستقيمة علماً بأن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$.

- 29 \overline{HF} 30 \overline{JF} 31 \overline{CD}

جد طول كل قطعة مستقيمة علماً بأن المثلثين RST و USV متشابهان.

- 32 \overline{RT} 33 \overline{VT} 34 \overline{ST}



4-1

المتجهات

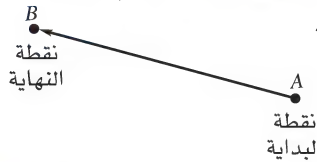
Vectors



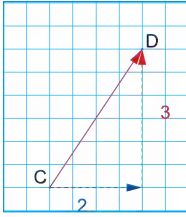
من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل ممارسو سباقات الزوارق النهرية المتجهات لكي يأخذوا في الحسبان تيار الماء عندما يُخطّطون للسباق (المثال 5).

يمكنك استعمال المتجهات لتمثيل سرعة واتجاه جسم متحرك. المتجه **Vector** كمية تتحدد بطول واتجاه. يمكنك تصور المتجه كما لو كان قطعة مستقيمة موجهة. لتسمية المتجه أدناه، اكتب \vec{AB} أو \vec{u} .



يمكنك أيضاً أن تُسمّي المتجه باستعمال مكوّنَيْه. مكوّنات المتجه **Components** عدنان يدل أولهما على مدى التحرك الأفقي والثاني على مدى التحرك العمودي اللازمين للانتقال من نقطة البداية في المتجه إلى نقطة النهاية فيه. تكتب المتجه الذي مكوّنه الأول x ومكوّنه الثاني y على الصورة $\langle x, y \rangle$. مثلاً تكتب $\langle 2, 3 \rangle$ للدلالة على المتجه \vec{CD} .

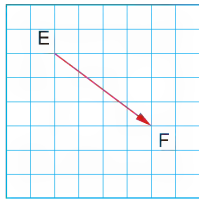


كتابة متجه بمكوّنَيْه

مثال 1

اكتب كل متجه بمكوّنَيْه.

أ المتجه \vec{EF}



لانتقال من النقطة E إلى النقطة F، تتحرك أفقياً 3 وحدات إلى اليمين، و 4 وحدات إلى الأسفل. المكوّن الأول هو +3 والمكوّن الثاني هو -4. المتجه \vec{EF} هو إذن المتجه $\langle 3, -4 \rangle$.

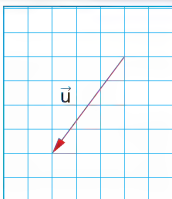
ب المتجه \vec{PQ} حيث $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$.

اطرح إحداثي نقطة البداية من إحداثي نقطة النهاية. عوض عن كل إحداثي بقيمته. بسط

$$\vec{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

$$\vec{PQ} = \langle 4 - 7, 3 - (-5) \rangle$$

$$\vec{PQ} = \langle -3, 8 \rangle$$



1. اكتب كل متجه بمكوّنَيْه.

أ

\vec{u}

ب المتجه \vec{AB} حيث $A(-1, 1)$ و $B(6, 2)$

انتبه!

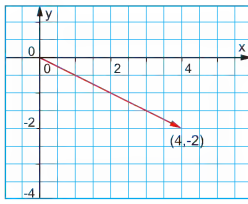
نستعمل الكتابة $\langle a, b \rangle$ للدلالة على متجه والكتابة (a, b) للدلالة على نقطة.

طول Magnitude المتجه هو المسافة بين نقطة البداية ونقطة النهاية في المتجه. يُكتب هذا العدد على الصورة $|\overline{AB}|$ أو $|\vec{v}|$.

عندما يُستعمل متجه لتمثيل سرعة شيء متحرك في اتجاه معين، فإن طول المتجه يساوي سرعة الشيء المتحرك. فطول المتجه الذي يُمثل حركة الزورق النهري يُمثل سرعة الزورق.

مثال 2 إيجاد طول متجه

ارسم المتجه $\langle 4, -2 \rangle$ في المستوي الإحداثي. احسب طوله وقرب الجواب إلى أقرب عُشر.

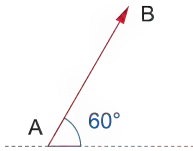


الخطوة 1 ارسم المتجه في المستوي الإحداثي مستعملاً نقطة الأصل كنقطة بداية. نقطة النهاية هي النقطة $(4, -2)$.

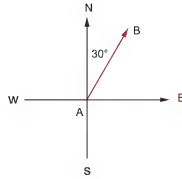
الخطوة 2 احسب طول المتجه باستعمال قانون المسافة.

$$|\langle 4, -2 \rangle| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

2. ارسم المتجه $\langle -3, 1 \rangle$ في المستوي الإحداثي. احسب طوله، وقرب الجواب إلى أقرب عُشر.



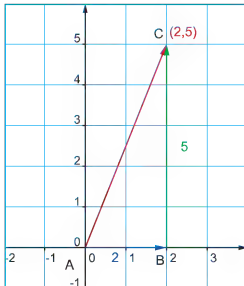
اتجاه Direction المتجه هو الزاوية التي يُشكّلها مع مستقيم أفقي. تُقاس هذه الزاوية في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة، انطلاقاً من الجزء الموجب من المحور الأول.



يُمكن التعبير أيضاً عن اتجاه المتجه بتحديد الزاوية التي يُشكّلها مع أحد الاتجاهات الأربعة: شرق، غرب، شمال، جنوب. فاتجاه المتجه المقابل \overline{AB} هو شمال -30° أو شمال شرقي 30° .

مثال 3 إيجاد اتجاه متجه

يمثل المتجه $\langle 2, 5 \rangle$ اتجاه الريح وسرعتها. ارسم المتجه في المستوي الإحداثي، وجد اتجاهه مقرباً إلى أقرب درجة.



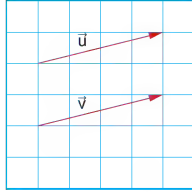
الخطوة 1 ارسم المتجه في المستوي الإحداثي مستعملاً نقطة الأصل كنقطة بداية. نقطة النهاية هي النقطة $(2, 5)$.

الخطوة 2 جد الاتجاه. ارسم المثلث القائم ABC . الزاوية التي يُشكّلها المتجه مع الجزء الموجب من المحور الأول هي \hat{A} .

$$\tan \hat{A} = \frac{5}{2} \text{ ينتج عن ذلك } \hat{A} \approx \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 68^\circ$$

3. يُمثل المتجه $\langle 7, 3 \rangle$ قوة السحب التي تسحب بها القاطرة البحرية مركباً معطلاً. ارسم المتجه في المستوي الإحداثي، وجد اتجاهه مقرباً إلى أقرب درجة.



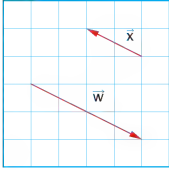


$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2\sqrt{5}$$

يتساوى متجهان إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه. مثلاً:
 $\vec{u} = \vec{v}$. ليس من الضروري أن يكون لمتجهين متساويين نقطة البداية نفسها ونقطة النهاية نفسها.

انتبه!

لاحظ أن $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ لأن اتجاه الأول مختلف عن اتجاه الثاني.



$$|\vec{w}| = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{5}$$

يتوازي متجهان إذا كان مستقيما متوازيين. يُمكن لمتجهين متوازيين أن يختلفا في الطول. مثلاً: المتجهان \vec{x} و \vec{w} متوازيان. إذا تساوى متجهان فإنهما يتوازيان.

تميز المتجهات المتساوية والمتجهات المتوازية

مثال 4

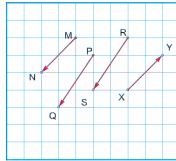
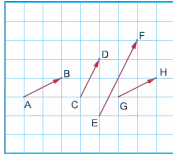
ميز في الرسم المقابل:

أ المتجهات المتساوية

ميز المتجهات التي لها الطول نفسه والاتجاه نفسه. $\vec{AB} = \vec{GH}$

ب المتجهات المتوازية

ميز المتجهات التي لها الاتجاه نفسه أو اتجاهات متعاكسة. $\vec{CD} \parallel \vec{EF}$ $\vec{AB} \parallel \vec{GH}$



4. ميز في الرسم المقابل.

نقطة مراقبة



أ المتجهات المتساوية.

ب المتجهات المتوازية.

مُحصلة Resultant متجهين هي المتجه الذي يُمثل مجموعهما. لجمع متجهين هندسيًا، يُمكنك أن تستعمل طريقة من الرأس إلى الذيل أو طريقة متوازي الأضلاع.

جمع المتجهات

اعلم

احفظ

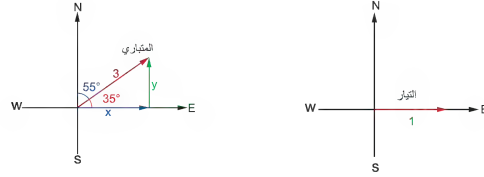
الطريقة	مثال
<p>طريقة من الرأس إلى الذيل</p> <p>ضع نقطة البداية للمتجه الثاني فوق نقطة النهاية للمتجه الأول. المحصلة هي المتجه الذي تكون نقطة بدايته نقطة بداية المتجه الأول ونقطة نهايته نقطة نهاية المتجه الثاني.</p>	
<p>طريقة متوازي الأضلاع</p> <p>استعمل نقطة واحدة كنقطة بداية للمتجهين. أنشئ متوازي أضلاع بإضافة نسخة من كل متجه عند نقطة النهاية العائدة للمتجه الآخر. المحصلة هي المتجه الذي تكون نقطة بدايته نقطة البداية المشتركة للمتجهين ونقطة نهايته الطرف الآخر للقطر.</p>	

لكي تجمع متجهين عددياً، اجمع مكوّنيهما. إذا كان $\vec{u} = \langle x_1, y_1 \rangle$ و $\vec{v} = \langle x_2, y_2 \rangle$ فإن $\vec{u} + \vec{v} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$.

مثال 5 تطبيق على الرياضة

انطلق زورق بسرعة 3 km/h في الاتجاه شمال شرقي 55° . هبّ تيار مائي بسرعة كيلومتر واحد في الساعة باتجاه الشرق. كم صارت سرعة الزورق؟ وكيف صار اتجاهه؟ قَرّب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 ارسم المتجهين اللذين يمثلان حركة الزورق وحركة التيار.



الخطوة 2 اكتب متجه حركة الزورق بمكوّنيه.

طول المتجه الذي يُمثّل حركة المتباري هو 3 km/h وهو يُشكّل زاوية قياسها 35° مع الاتجاه الموجب للمحور الأول.

$$\cos 35^\circ = \frac{x}{3} \quad \text{ينتج من ذلك } x = 3 \cos 35^\circ \approx 2.5$$

$$\sin 35^\circ = \frac{y}{3} \quad \text{ينتج من ذلك } y = 3 \sin 35^\circ \approx 1.7$$

المتجه الذي يمثّل حركة المتباري هو $\langle 2.5, 1.7 \rangle$.

الخطوة 3 اكتب متجه التيار بمكوّنيه.

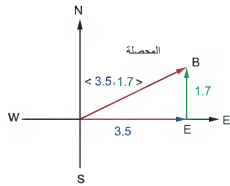
بما أن التيار يتحرّك بسرعة **كيلومتر واحد** باتجاه الشرق فإن مكوّنه الأول يساوي 1 ومكوّنه الثاني يساوي 0. المتجه الذي يمثّل حركة التيار هو $\langle 1, 0 \rangle$.

الخطوة 4 جد محصلة المتجهين وارسمه.

اجمع مكوّني المتجه الأول مع مكوّني المتجه الثاني.

$$\langle 2.5, 1.7 \rangle + \langle 1, 0 \rangle = \langle 3.5, 1.7 \rangle$$

محصلة المتجهين هي المتجه $\langle 3.5, 1.7 \rangle$.



الخطوة 5 جد طول المحصلة واتجاهها.

طول المحصلة هو السرعة الفعلية للمتباري.

$$|\langle 3.5, 1.7 \rangle| = \sqrt{(3.5-0)^2 + (1.7-0)^2} \approx 3.9$$

السرعة الفعلية للمتباري هي 3.9 km/h تقريباً.

يتحدّد اتجاه المحصلة بالزاوية التي تُشكّلها مع الجزء الموجب من المحور الأول.

$$\tan \hat{A} = \frac{1.7}{3.5} \quad \text{ينتج من ذلك } \hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right) \approx 26^\circ$$

اتجاه المحصلة هو شمال شرقي 64° - تقريباً لأن $90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$.

تذكّر

تساعد كتابة متجه بمكوّنيه على تحديد مدى التحرك أفقياً وعمودياً، للانتقال من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

5. ماذا لو...؟ افترض أن المتباري كان يتحرك بسرعة 4 km/h في الاتجاه شمال شرقي 55° . ما السرعة الفعلية للمتباري؟ وما اتجاه حركته؟
قرب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.



فكر وناقش

1. أوضح لماذا لا يمكن اعتبار القطعة المستقيمة التي طرفاها $(0, 0)$ و $(1, 4)$ متجهًا.
2. افترض أنك تعرف مكوّني متجه. كيف تجد طوله من دون استعمال قانون المسافة؟
3. صِف كيف تجمع متجهين عدديًا.
4. كن منظمًا انسخ المخطط المقابل ثم أكمله.

التسمية	التعريف
متجه	
أمثلة مضادة	أمثلة



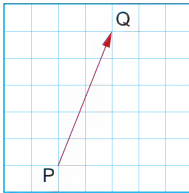
التمارين

4-1

تمارين موجّهة

مفردات استعمل مفردات الدرس لكي تُجيب عن كل سؤال.

1. إذا كان لمتجهين الطول نفسه والاتجاه نفسه، فإنهما $?$. (متساويان، متوازيان)
2. إذا كان لمتجهين الاتجاه نفسه أو اتجاهاً متعاكسان فإنهما $?$. (متساويان، متوازيان)
3. يدل $?$ المتجه على كبره. (طول، اتجاه).



1 انظر المثال اكتب كل متجه بمكوّنيه.

4. \overrightarrow{AC} حيث $A(1, 2)$ و $C(6, 5)$.

5. المتجه الذي نقطة بدايته $M(-4, 5)$ ونقطة نهايته $N(4, -3)$.

6. المتجه \overrightarrow{PQ} المقابل.

2 انظر المثال ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي. جد طوله مقربًا إلى أقرب عُشر.

7. $\langle 1, 4 \rangle$ 8. $\langle -3, -2 \rangle$ 9. $\langle 5, -3 \rangle$

3 انظر المثال ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي. جد اتجاهه مقربًا إلى أقرب درجة.

10. المتجه $\langle 4, 6 \rangle$ الذي يُمثّل تيار الماء في نهر.

11. المتجه $\langle 5, 1 \rangle$ الذي يُمثّل حركة طائرة.

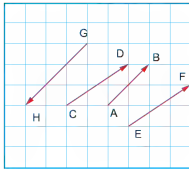
12. المتجه $\langle 6, 3 \rangle$ الذي يُمثّل حركة سهم.

4 انظر المثال

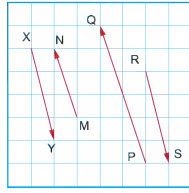
ميّز كلاً ممّا يلي.

- 13 المتجهات المتساوية في الرسم 1.
14 المتجهات المتوازية في الرسم 1.
15 المتجهات المتساوية في الرسم 2.
16 المتجهات المتوازية في الرسم 2.

الرسم 2



الرسم 1



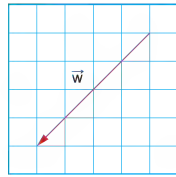
تمارين وحلّ مسائل

اكتب كل متجه بمكوّنيه.

17 \overline{JK} حيث $J(-6, -7)$ و $K(3, -5)$

18 \overline{EF} حيث $E(1.5, -3)$ و $F(-2, 2.5)$

19 \overline{W} (في الرسم المقابل).



ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي. جد طوله مقرباً إلى أقرب عُشر.

20 $\langle -2, 0 \rangle$ 21 $\langle 1.5, 1.5 \rangle$ 22 $\langle 2.5, -3.5 \rangle$

ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي. جد اتجاهه مقرباً إلى أقرب درجة.

23 المتجه $\langle 4, 1.5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة باخرة.

24 المتجه $\langle 3.5, 2.5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة غوّاصة.

25 المتجه $\langle 2, 5 \rangle$ الذي يُمثّل حركة قذيفة.

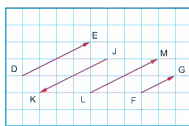
تمارين حرة

انظر	حل
المثال	التمارين
1	19-17
2	22-20
3	25-23
4	29-26
5	30

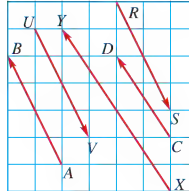
ميّز كلاً ممّا يلي.

- 26 المتجهات المتساوية في الرسم 1.
27 المتجهات المتوازية في الرسم 1.
28 المتجهات المتساوية في الرسم 2.
29 المتجهات المتوازية في الرسم 2.

الرسم 2



الرسم 1



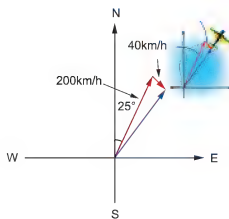
30 **طيران** يقود طيار طائرته الخاصة بسرعة ثابتة تبلغ

200 km/h باتجاه شمال - 25° - شرق. تواجه الطائرة

رياحاً سرعتها 40 km/h باتجاه جنوب - 45° - شرق.

ما السرعة الحقيقية للطائرة؟ ما اتجاهها الفعلي؟

قرب السرعة إلى أقرب عُشر، والاتجاه إلى أقرب درجة.



اجمع كل متجهين.

31 $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 6 \rangle$ 32 $\langle -3, 4 \rangle + \langle 5, -2 \rangle$

33 $\langle 0, 1 \rangle + \langle 7, 0 \rangle$ 34 $\langle 8, 3 \rangle + \langle -2, -1 \rangle$

35 **تفكير ناقد** هل يتمّ جمع المتجهات بخاصية التبديل؟ أي هل المتجهان $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{v} + \vec{u}$

متساويان؟ استعمل طريقة من الرأس إلى الذيل لجمع المتجهات بهدف إيضاح الجواب.

اكتب كل متجه بمكوّنيّه، مقرباً إلى أقرب عُشر.

36 الطول 15؛ الاتجاه 42° 37 الطول 7.2؛ الاتجاه 9°

38 الطول 12.1؛ الاتجاه شمال - 57° - شرق 39 الطول 5.8؛ الاتجاه شمال - 22° - شرق



40 **فيزياء** لغرفة الصف نافذة قريبة من السقف تُستخدم عصا لإغلاقها.

أ أمسكت هوزين عصا باتجاه يُشكّل 45° مع أرض الغرفة، ودفعت بقوة مقدارها 44 نيوتن (N) على الحد الأعلى للنافذة. جد المكوّن العمودي للمتجه الذي يمثل قوّة الدفع على النافذة. قَرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

ب أمسكت نشميل العصا باتجاه يُشكّل 75° مع أرض الغرفة، ودفعت بقوة مقدارها 44 نيوتن (N) على الحد الأعلى للنافذة. جد المكوّن العمودي للمتجه الذي يمثل قوّة الدفع على النافذة. قَرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

ج أي التلميذتين ستواجه صعوبة أقل من الأخرى لإغلاق النافذة؟ (أيهما كان المكوّن العمودي لقوّة دفعها هو الأكبر؟)

41 **احتمال** كتب دلسوز الأعداد 1 و 2 و 3 و 4 على وريقات، ووضعها داخل كيس. سحب عشوائياً ورقة، واعتبر أنها تمثل المكوّن الأفقي لمتجه، وسحب ورقة أخرى، من دون أن يعيد الورقة الأولى إلى الكيس، واعتبر أنها تمثل المكوّن العمودي للمتجه نفسه.

أ ما احتمال أن يكون المتجه $\langle 1, 2 \rangle$ ؟

ب ما احتمال أن يكون المتجه موازياً للمتجه $\langle 1, 2 \rangle$ ؟

42 **تقدير** استعمل المتجه $\langle 4, 6 \rangle$ لإكمال كل مما يلي.

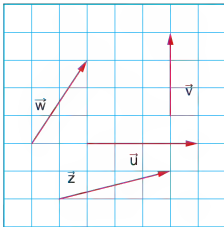
أ رسم المتجه على ورقة بيانيّة.

ب تقدير اتجاه المتجه مقرباً إلى أقرب درجة.

ج قياس الزاوية التي يُشكّلها المتجه مع مستقيم أفقي باستعمال المنقلة.

د حساب اتجاه المتجه باستعمال مكوّنيّه.

هـ المقارنة بين التقدير الذي قمت به في السؤال ب وبين القياس الذي أجريته في السؤال ج والحساب الذي أجريته في السؤال د.



خطوات متعدّدة جد طول كل متجه وحدّد اتجاهه.

قَرّب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

43 \vec{u} 44 \vec{v}

45 \vec{w} 46 \vec{z}

جد، لكل متجه، متجه آخر له الطول نفسه، ولكن باتجاه مختلف، ثم متجهاً له الاتجاه نفسه، ولكن بطول مختلف.

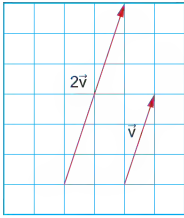
47 $\langle -3, 6 \rangle$ 48 $\langle 12, 5 \rangle$ 49 $\langle 8, -11 \rangle$

خطوات متعددة اجمع المتجهين ثم جد طول المحصلة واتجاهها. قرب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

50 $\vec{u} = \langle 1, 2 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 2.5, -1 \rangle$ 51 $\vec{u} = \langle -2, 7 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 4.8, -3.1 \rangle$

52 $\vec{u} = \langle 6, 0 \rangle$ و $\vec{v} = \langle -2, 4 \rangle$ 53 $\vec{u} = \langle -1.2, 8 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 5.2, -2.1 \rangle$

تاريخ الرياضيات نشر عالم الرياضيات أوغست موبوس August Möbius، في العام 1827، كتاباً أدخل فيه ما سُمّاه «القطع المستقيمة الموجهة»، أي ما يُعرف اليوم بالمتجهات. شرح هذا العالم في كتابه كيفية ضرب متجه في عدد حقيقي. مثلاً: إذا كان المتجه \vec{v} يمثل حركة سيارة فإن المتجه $2\vec{v}$ يُمثل سيارة ثانية تسير في الاتجاه نفسه وبسرعة تبلغ ضعف الأولى.



أ اكتب مكوّني كل من المتجهين \vec{v} و $2\vec{v}$.

ب جد طول كل من المتجهين وقارن بين الطولين.

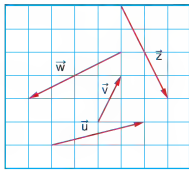
ج جد اتجاه كل من المتجهين وقارن بين الاتجاهين.

د أوضح كيف تجد مكوّني المتجه $k\vec{v}$ ، حيث k عدد حقيقي، إذا عرفت مكوّني \vec{v} .

ه استعمل ضرب متجه في العدد $k = -1$ لكتابة معكوس \vec{v} بمكوّنيه.

تفكير ناقد 55 يتجه متجه \vec{u} طوله u نحو الغرب بينما يتجه متجه \vec{v} طوله v نحو الشرق. صِف النتائج الممكنة الثلاث لجمع هذين المتجهين.

56 اكتب قارن بين القطعة المستقيمة ونصف المستقيم والمتجه.



57 أي متجه مواز للمتجه $\langle 2, 1 \rangle$ ؟

أ \vec{u}

ب \vec{v}

ج \vec{w}

د \vec{z}

58 يمثل المتجه $\langle 7, 9 \rangle$ حركة مروحية. ما اتجاه هذا المتجه مقرباً إلى أقرب درجة؟

أ 38°

ب 52°

ج 128°

د 142°

59 يمثل المتجه $\langle 5, 11 \rangle$ حركة باخرة. جد طول هذا المتجه مقرباً إلى أقرب وحدة.

- (أ) 6 (ب) 7 (ج) 12 (د) 16

60 **جواب فقط** نقطة البداية للمتجه \overrightarrow{AB} هي $(-3, 6)$ ونقطة النهاية هي $(-5, -2)$. جد طول \overrightarrow{AB} مقرباً إلى أقرب عُشر.

تحدّ وتوسّع

تذكّر أن الزاوية التي تحدّد اتجاه متجه تُقاس انطلاقاً من الجزء الموجب من المحور الأول في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة. جد اتجاه كل متجه مقرباً إلى أقرب درجة.

- 61 $\langle -2, 3 \rangle$ 62 $\langle -4, 0 \rangle$ 63 $\langle -5, -3 \rangle$

64 **ملاحظة** يخطّط ربّان الباخرة للإبحار في منطقة يسيطر عليها تيّار بحري باتجاه الشرق سرعته 4 km/h . جد اتجاه حركة الباخرة وسرعتها لكي تكون سرعتها الفعلية 10 km/h ويكون اتجاهها الفعلي شمال -75° - شرق (بعد أخذ التيّار البحري بالاعتبار). قرب السرعة إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

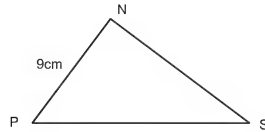
65 للوصول إلى الحديقة العامّة، سار شوان مسافة 3 km باتجاه شمال -30° - شرق، ثم 6 km باتجاه الشرق، ثم 4 km باتجاه شمال -80° - شرق. ما طول المتجه الذي يمثل انتقال شوان من بيته إلى الحديقة العامّة؟ وما اتجاهه؟ قرب الطول إلى أقرب عُشر والاتجاه إلى أقرب درجة.

مراجعة لولبية

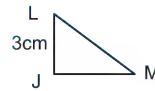
حلّ بيانياً كل نظام معادلات خطيّة. (الصفوف السابقة)

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+15=2x \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=0 \\ 2y+x=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-5 \\ y=3x+1 \end{cases}$$

المثلثان JLM و NPS متشابهان. محيط المثلث JLM 12 cm ومساحته 6 cm^2 . جد القياس المطلوب. (الصفوف السابقة)



70 مساحة المثلث NPS



69 محيط المثلث NPS

اختبار جزئي

الفصل

1

اختبار جزئي الدروس من 1-1 إلى 4-1

1-1 الفضاء الإحداثي

مثل بيانياً في الفضاء الإحداثي كلاً من النقاط التالية:

(3, 1, -3) **3**

(2, -3, -2) **2**

(-3, 2, 1) **1**

ارسم في الفضاء الإحداثي كلاً من المستويات التالية:

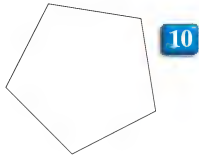
$x + 5y + 3z = 15$ **6**

$2x + y - 2z = -4.5$ **5**

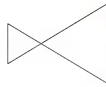
$2x - 2y + 4z = 8$ **4**

2-1 المضلعات

اذكر إن كان الشكل مضلعاً، وسمّه إن كان كذلك.



10



9



8



7

جد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب من 16 ضلعاً.

11

عمود قاعدته سداسي منتظم. ما قياس كل من زواياه الداخلية؟

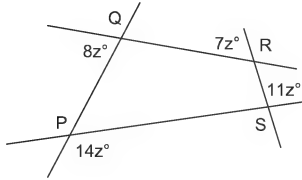
12

يُبين الشكل المقابل مخططاً لحديقة مسوّرة. جد قياس كل زاوية خارجية.

13

جد قياس كل من الزوايا الخارجية لعشاري منتظم.

14



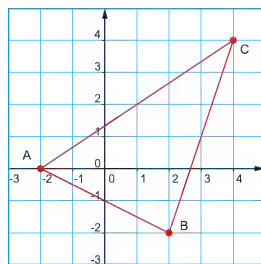
3-1 التناسب الهندسي

أثبت أن المثلثين ABC و ADE ، حيث $A(-1, 2)$ ، $B(-3, -2)$ ، $C(3, 0)$ ، $D(-2, 0)$ ، $E(1, 1)$ متشابهان.

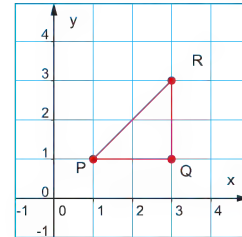
15

ارسم صورة كل مثلث بالتناسب الهندسي المحددة نسبته، وتحقق من أن الأصل والصورة مثلثان متشابهان.

نسبة التكبير 1.5 **17**



نسبة التكبير 3 **16**



4-1 المتجهات

ارسم، في المستوي الإحداثي، كل متجه؛ واحسب طوله مقرباً إلى أقرب عُشر.

$\langle 0, 5 \rangle$ **20**

$\langle -2, -4 \rangle$ **19**

$\langle 3, 1 \rangle$ **18**

ارسم، في المستوي الإحداثي، كل متجه؛ واحسب ميله مقرباً إلى أقرب درجة.

تيار الماء في نهر ممثلاً بالمتجه $\langle 5, 3 \rangle$ **22**

سرعة الريح ممثلة بالمتجه $\langle 2, 1 \rangle$ **21**

قوة نابض ممثلة بالمتجه $\langle 4, 4 \rangle$ **23**



مساحة الدائرة والمضلّعات المنتظمة

5-1

Area of circles and regular polygons

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل قارعو الطبول طبعاً من قياسات مختلفة للحصول على أصوات معينة. تتحدّد الأصوات التي يُصدرها الطبل بمساحة وجهه الدائري (المثال 2).

الأهداف

يجد قانوناً لحساب مساحة الدائرة، وقانوناً لحساب محيطها، ويستعملهما.

يجد قانوناً لحساب مساحة المضلّعات المنتظمة ويستعمله.

المفردات

Vocabulary

الدائرة
Circle

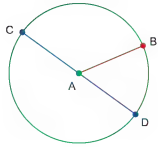
مركز الدائرة
Center of a circle

نصف قطر الدائرة
Radius of a circle

قطر الدائرة
Diameter of a circle
مركز المضلع المنتظم
Center of a regular polygon

عادم المضلع المنتظم
Apothem

الزاوية المركزية في المضلع المنتظم
Central angle of a regular polygon

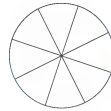


الدائرة Circle هي مجموعة نقاط المستوي التي تقع على المسافة نفسها من نقطة معينة هي مركز Center الدائرة. تلك المسافة تُسمى نصف قطر Radius الدائرة وضعفها يسمى قطر Diameter الدائرة. في الرسم المقابل، مركز الدائرة هو النقطة A ونصف قطرها هو $r = AB$ وقطرها هو $d = CD$.

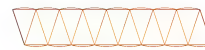
نسبة محيط الدائرة C إلى قطرها d عدد حقيقي ثابت في كل الدوائر. إنه العدد غير النسبي π (اقرأ باي) بحيث يمكنك أن تكتب $\pi = \frac{C}{d}$. إذا حسبت C بدلالة d، حصلت على قانون محيط الدائرة $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$ لأن $d = 2r$.

يمكنك استعمال محيط الدائرة لإيجاد مساحتها. اقسم الدائرة ورتّب الأجزاء بحيث تحصل على شكل شبيه بمتوازي الأضلاع كما هو مبين أدناه.

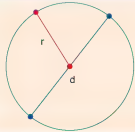
تساوي قاعدة متوازي الأضلاع نصف محيط الدائرة تقريباً أو πr ، بينما يساوي ارتفاعه نصف قطر الدائرة تقريباً. ينتج من ذلك أن مساحة الدائرة تساوي تقريباً $A \approx \pi r \times r = \pi r^2$.



كلما ازداد عدد الأجزاء اقتربت مساحة متوازي الأضلاع من مساحة الدائرة، وكانت قيمتها التقريبية أقرب إلى قيمتها الحقيقية.



محيط الدائرة ومساحتها



يُحسب محيط دائرة نصف قطرها r وقطرها d بالقانون $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$ وتُحسب مساحتها بالقانون $A = \pi r^2$.

اعلم

احفظ

حساب محيط الدائرة ومساحتها

مثال 1

احسب المطلوب.

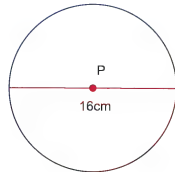
مساحة الدائرة المقابلة .

قانون مساحة الدائرة. $A = \pi r^2$

اقسم القطر على 2 لإيجاد نصف القطر، ثم عوض عن نصف القطر بقيمته. $A = \pi(8)^2$

بسّط. $A = 64\pi$

مساحة الدائرة $A = 64\pi \text{ cm}^2$.



ب نصف قطر دائرة محيطها 24π m .

$$C = 2\pi r$$

$$24\pi = 2\pi r$$

$$24 = 2r$$

$$r = 12$$

قانون محيط الدائرة.

عوّض عن المحيط بقيمته.

اقسم كل طرف على π .

اقسم كل طرف على 2.

ج محيط دائرة مساحتها $9x^2\pi$ ، بدلالة π و x .

الخطوة 2 احسب المحيط باستعمال قيمة نصف القطر.	الخطوة 1 احسب نصف القطر r بدلالة x .
$C = 2\pi r$ قانون المحيط.	$A = \pi r^2$ قانون المساحة.
$C = 2\pi(3x)$ عوّض عن نصف	$9x^2\pi = \pi r^2$ عوّض عن A بقيمتها.
القطر بقيمته.	$9x^2 = r^2$ اقسم كل طرف على π .
$C = 6x\pi$ بسّط.	$3x = r$ خذ الجذر التربيعي.

1. احسب، بدلالة π ، مساحة دائرة محيطها $(4x-6)\pi$ cm .نقطة
مراقبة**تطبيق على الموسيقى**

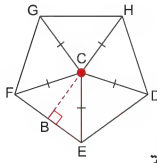
تتألف بطارية الطبول من ثلاثة طبول أقطارها 10 إنشات و 12 إنشا و 14 إنشا. جد مساحة كل طبل، وقرب الإجابات إلى أقرب عُشر.

القطر 14 إنشا $r = \frac{14}{2} = 7$ $A = \pi(7)^2$ $A \approx 153.9$ المساحة 153.9 إنشا مربعا	القطر 12 إنشا $r = \frac{12}{2} = 6$ $A = \pi(6)^2$ $A \approx 113.1$ المساحة 113.1 إنشا مربعا	القطر 10 إنشات $r = \frac{10}{2} = 5$ $A = \pi(5)^2$ $A \approx 78.5$ المساحة 78.5 إنشا مربعا
---	---	--

مُساعدة

يؤمن المفتاح π في الحاسبة
البيانية تقريباً جيداً لقيمة هذا
العدد. انتظر حتى تنتهي من
الحساب قبل أن تقرّب.

2. احسب محيط كل طبل في المثال 2.

نقطة
مراقبة**مركز Center** المضلع المنتظم هو نقطة داخله تقع على المسافة نفسها من جميعرؤوسه. **عامد Apothem** المضلع المنتظم هو المسافة بين مركزه وأحد أضلاعه. كل

زاوية يقع رأسها في مركز المضلع المنتظم ويمرّ ضلعها في رأسين متجاورين من

رؤوسه هي زاوية مركزية Central angle في المضلع المنتظم. جميع الزوايا المركزية

في المضلع المنتظم متساوية في القياس. وقياس كل منها $\frac{360^\circ}{n}$ ، حيث n عدد أضلاع المضلع المنتظم.لإيجاد مساحة مضلع منتظم من n ضلعاً، عامده a وطول ضلعه s ، اقسمه إلى n مثلثاً متساوي الساقين.مساحة كل مثلث: $\frac{1}{2}as$

مساحة المضلع: $A = n \left(\frac{1}{2}as \right) = \frac{1}{2}a(ns)$ أو $A = \frac{1}{2}ap$ يرمز $p = ns$ إلى محيط
المضلع المنتظم.

مساحة المضلع المنتظم

تُحسب مساحة مضلع منتظم عامده a
ومحيطه p بالقانون $A = \frac{1}{2}ap$.



اعلم

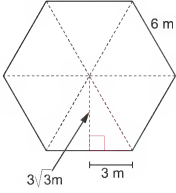
احفظ

إيجاد مساحة مضلع منتظم

مثال 3

جد مساحة كل مضلع منتظم مقرباً الجواب إلى أقرب عُشر.

أ سداسي منتظم ضلعه 6 m .



محيط المضلع هو 36 m (6×6). ينقسم السداسي المنتظم إلى 6 مثلثات متساوية الأضلاع ضلع الواحد منها 6 m . ينتج

عن ذلك أن عامد السداسي المنتظم هو $3\sqrt{3}$.

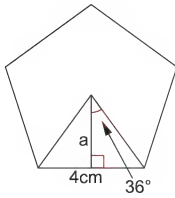
قانون مساحة المضلع. $A = \frac{1}{2}ap$

عوض. $A = \frac{1}{2}3\sqrt{3} \times 36$

بسّط وقرب إلى أقرب عُشر. $A = 54\sqrt{3} \approx 93.5$

مساحة السداسي المنتظم هي 93.5 m^2 تقريباً.

ب خماسي منتظم ضلعه 8 cm .



الخطوة 1 ارسم الخماسي المنتظم. ارسم مثلثاً متساوي

الساقين رأسه عند مركز المضلع وقاعدته أحد

أضلاع الخماسي. قياس الزاوية المركزية للمضلع

ارسم منصف الزاوية المركزية $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

لتحصل على مثلث قائم.

الخطوة 2 استعمل النسبة المثلثية \tan لإيجاد العامد a .

تعريف النسبة المثلثية \tan $\tan 36^\circ = \frac{4}{a}$

احسب قيمة a $a = \frac{4}{\tan 36^\circ}$

الخطوة 3 استعمل العامد وطول الضلع لحساب مساحة الخماسي المنتظم.

قانون مساحة المضلع المنتظم. $A = \frac{1}{2}ap$

عوض. $A = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\tan 36^\circ} \right) (5 \times 8)$

بسّط وقرب إلى أقرب عُشر. $A \approx 110.1$

مساحة الخماسي هي 110.1 cm^2 تقريباً.

تذكر

تان الزاوية في مثلث قائم هو نسبة الضلع المقابل لها إلى الضلع المجاور لها.

3. احسب مساحة ثماني منتظم ضلعه 4 m .

نقطة مراقبة

فكر وناقش

- أوضح العلاقة بين π ومحيط الدائرة.
- اشرح كيف تحسب قياس الزاوية المركزية لمضلع منتظم من n ضلعاً.
- كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله.

مضلعات منتظمة ضلعها يساوي 1				
المضلع	عدد الأضلاع	المحيط	قياس الزاوية المركزية	العامد
مربع				
سداسي				
مساحة				

اعلم
احفظ

التمارين

5-1

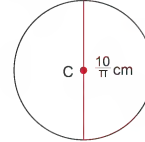
تمارين موجّهة

1 مفردات كيف تجد عامد مربع ضلعه s ؟

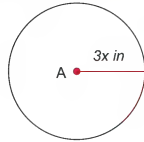
1 انظر المثال

جد:

2 محيط الدائرة أدناه.

4 محيط دائرة مساحتها $36\pi \text{ m}^2$.

3 مساحة الدائرة أدناه.

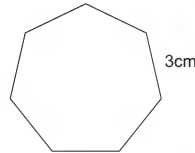


5 طعام يقدم مطعم الفرات للبيتزا ثلاثة حجوم من البيتزا أقطارها على التوالي 15 cm و 25 cm و 40 cm . احسب مساحة البيتزا من كل نوع مقربة إلى أقرب عُشر.

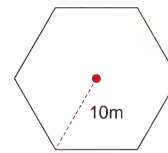
2 انظر المثال

3 انظر المثال

جد مساحة كل مضلع منتظم مقربة إلى أقرب عُشر.



9 دائرة محيطها 5 m .

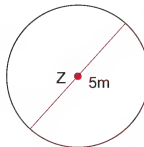


8 مثلث متساوي الأضلاع عامده 2 cm .

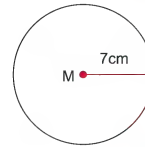
تمارين وحل مسائل

جد بدلالة π :

11 محيط الدائرة أدناه.

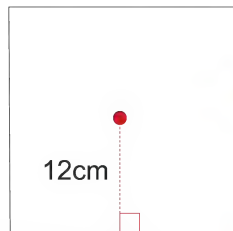


10 مساحة الدائرة أدناه.

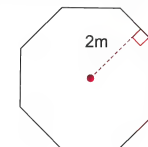


12 قطر دائرة محيطها 10 m .

13 رياضة يستعمل مدرب الخيل 3 حلبات، أقطارها على التوالي: 7 m و 10 m و 13 m . جد مساحة كل حلبة مقربة إلى أقرب عُشر.



17 خماسي منتظم عامده 2 km .



16 تساعي منتظم محيطه 144 m .

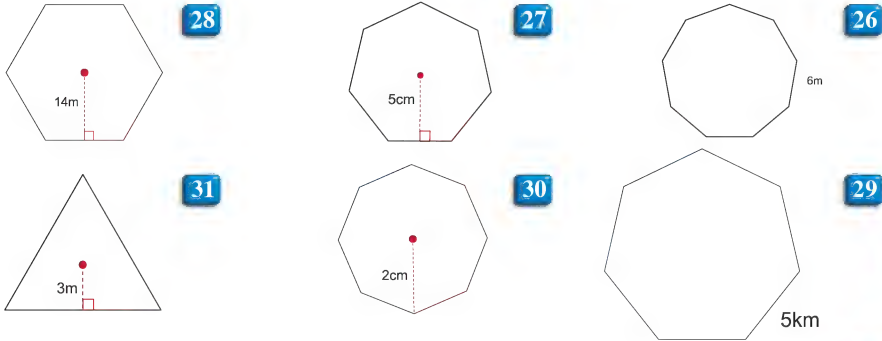
تمارين حرة

أنظر المثال	لحل التمارين
1	12-10
2	13
3	17-14

جد الزاوية المركزية لكل مضلع منتظم.

- 18 مثلث متساوي الأضلاع 19 مربع 20 خماسي 21 سداسي
22 سباعي 23 ثماني 24 تساعي 25 عشاري

جد مساحة كل مضلع منتظم مقربة إلى أقرب عُشر.



أحياء يُمكن تقدير عمر شجرة باستعمال القاعدة $a = \frac{r}{w}$ ، حيث يرمز r إلى نصف قطر الشجرة من دون قشرتها. ويرمز w إلى متوسط سُمك حلقات الشجرة. قدّر عمر شجرة سنديان محيطها 150 cm، وسُمك قشرتها 0.2 cm، وعرض حلقاتها 0.5 cm.

خطأ في التحليل حسب تلميذان مساحة دائرة محيطها 2π m من منهما الذي أخطأ؟ وأين؟

أ	نصف قطر الدائرة 2 m لأن محيطها $2\pi m$ مساحتها: $A = \pi(2^2) = 4\pi$ متراً مربعاً.
ب	نصف قطر الدائرة متر واحد لأن محيطها $2\pi m$ مساحتها: $A = \pi(1^2) = \pi$ متراً مربعاً.



جد القياس الناقص بدلالة π .

المحيط	المساحة	نصف القطر	القطر
			6
	100		
		17	
36π			

خطوات متعددة يصمّم سالار حديقة تحيط ببركة ماء شكلها سداسي منتظم ضلعه 60m. للحديقة شكل دائرة تبعد 10 m عن كل رأس من رؤوس البركة. ما مساحة الحديقة؟ قرب الجواب إلى أقرب عُشر.

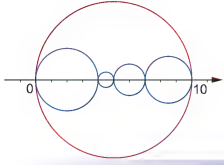
39 لإشارة التوقف في قانون السير شكل ثماني منتظم، وهي تتوفّر بقياسين: 30 cm و 36 cm.



- أ جد مساحة الإشارة الأولى مقربة إلى أقرب عُشر.
ب جد مساحة الإشارة الثانية مقربة إلى أقرب عُشر.
ج ما النسبة المئوية للمساحة الإضافية من المعدن اللازمة لصنع إشارة من النوع الثاني بدلاً من إشارة من النوع الأول.

قياس يستعمل بعض المهندسين عجلة تدور حول محور، لقياس المسافات عبر إدارة العجلة وإحصاء مرّات دورانها. جد قطر هذه العجلة، علماً بأن محيطها متر واحد.

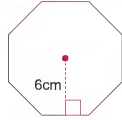
41 تفكير ناقد أي من الطاولتين التاليتين تتسع للعدد الأكبر من الأشخاص: طاولة مستطيلة طولها 6 m وعرضها 4 m أم طاولة مستديرة قطرها 6 m كم شخصاً تقريباً يجلس إلى كل طاولة؟ وضّح أفكارك.



42 اكتب يقع مركز كل دائرة في الشكل المقابل على محور الأعداد. وضّح العلاقة بين محيط الدائرة الكبرى ومحيط كل من الدوائر الأخرى.



تحضير للاختبار



43 ما محيط الثماني المنتظم المقابل مقرباً إلى أقرب سنتيمتر؟

- (أ) 5 (ب) 40 (ج) 20 (د) 68

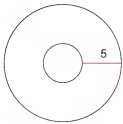
44 أي نسبة تمثل العدد π من النسب التالية، حيث يرمز C إلى محيط دائرة ويرمز d إلى قطرها؟

- (أ) $\frac{C}{d}$ (ب) $\frac{4C}{d^2}$ (ج) $\frac{d}{C}$ (د) $\frac{d}{2C}$

45 لدى آراس طاولة مستديرة الشكل قطرها 2 m. ترغب أن ترسم على وجه الطاولة نمطاً يتكوّن من مستطيل طوله 2 m وعرضه 1 m، و 4 مربّعات ضلع كل منها $\frac{1}{2}$ m. أي مما يلي يبرّر استحالة تحقيق ما تريده آراس؟

- (أ) لن يبقى مكان على وجه الطاولة بعد رسم المستطيل.
(ب) لا يمكن لآراس أن ترسم مستطيلاً طوله 2 m على وجه الطاولة.
(ج) لا يمكن رسم المربّعات.
(د) لن يبقى مكان على وجه الطاولة لرسم 4 مربّعات ضلع كل منها $\frac{1}{2}$ m.

تحدّ وتوسّع



46 بيّن الشكل المقابل دائرتين لهما المركز نفسه، ويزيد نصف قطر الكبرى بينهما 5 cm على نصف قطر الصغرى. جد الفرق بين محيطي الدائرتين بدلالة π .

47 جبر اكتب قانوناً لحساب مساحة دائرة بدلالة محيطها.

48 تفكير ناقد بيّن أن مساحة مضلع منتظم من n ضلعاً تقترب من مساحة الدائرة كلّما ازدادت قيمة n .

مراجعة لولبية

اكتب الدالة الخطيّة التي تمثّل كل جدول. (الصفوف السابقة)

x	-3	0	4	9
y	2	-1	-5	-10

50

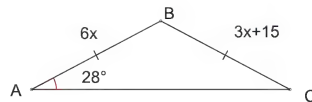
x	-2	0	5	10
y	-19	-13	2	17

49

جد: (الصفوف السابقة)

AB **52**

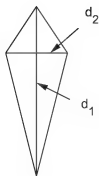
$m\hat{B}$ **51**



جد: (الصفوف السابقة)

53 d_2 علماً بأن $d_1 = 20$ والمساحة $A = 14$.

54 مساحة شبه منحرف قاعدته 3 m و 6 m على التوالي وارتفاعه 4 m.



6-1

بعض قوانين الفضاء

Formulas in 3 dimensions



من يستخدم هذا الأمر؟

يستعمل الفطّاسون إحداثيات الفضاء لإيجاد المسافة بين نقطتين تحت الماء. (مثال 5).

يتشكّل متعدّد الوجوه Polyhedron من 4 مضلّعات أو أكثر تتقاطع وفق أضلاعها فقط. كل من المنشور والهرم متعدّد وجوه في حين أن الأسطوانة والمخروط ليسا بمتعدّدي وجوه.

الأهداف

يستعمل قانون أولر لإيجاد عدد الرؤوس والأضلاع والوجوه في متعدّد وجوه.

يطوّر قانون حساب المسافة في الفضاء، ويستعمله.

يطوّر قانون حساب إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، ويستعمله.

المفردات

Vocabulary

متعدّد الوجوه
Polyhedron

هذه الأجسام الهندسيّة ليست بمتعدّدات وجوه	هذه الأجسام الهندسيّة متعدّدات وجوه
	

هناك علاقة تربط بين عدد الرؤوس وعدد الأضلاع وعدد الوجوه في متعدّد وجوه.

قانون أولر Euler's formula

إذا كان V عدد رؤوس متعدّد وجوه و E عدد أضلاعه و F عدد وجوهه، فإن

$$V - E + F = 2$$

اعلم

احفظ

استعمال قانون أولر

مثال 1

جد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه، واستعملها لتتحقّق من صحّة قانون أولر.



ب

$$F=7, E=15, V=10$$

$$10 - 15 + 7 \stackrel{?}{=} 2$$

استعمل قانون أولر.

بسط.

$$2 = 2 \checkmark$$



ا

$$F=4, E=6, V=4$$

$$4 - 6 + 4 \stackrel{?}{=} 2$$

استعمل قانون أولر.

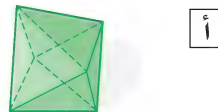
بسط.

$$2 = 2 \checkmark$$

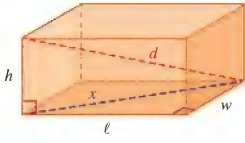
1. جد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه واستعملها لتتحقّق من صحّة قانون أولر.

نقطة
مراقبة

ب



ا



قطر متعدّد الوجوه هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين ولا تنتمي إلى أيّ وجه من وجوهه. يُبيّن الرسم المقابل القطر d من أقطار متوازي مستطيلات. لكي تحسب طول هذا القطر، استعمل مبرهنة فيثاغورس مرتّين: $d^2 = h^2 + x^2$ ، $x^2 = \ell^2 + w^2$ ، مما يُعطي بعد التعويض عن x^2 بقيمته: $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$.

قطر شبه المكعب

طول القطر في متوازي مستطيلات (شبه مكعب) طوله ℓ وعرضه w وارتفاعه h ، هو

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$



مثال 2 استعمال مبرهنة فيثاغورس في الفضاء

جد:

أ طول القطر في متوازي مستطيلات طوله 3 cm وعرضه 4 cm وارتفاعه 5 cm .

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 25} \\ &= \sqrt{50} \approx 7.1 \end{aligned}$$

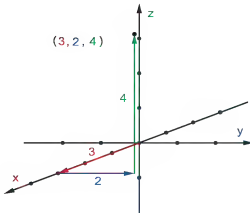
طول القطر 7.1 cm تقريباً.

ب ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 12 m وعرضه 8 m وطول قطره 18 m .

$$\begin{aligned} 18 &= \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2} \\ 18^2 &= 8^2 + 12^2 + h^2 \\ 324 &= 64 + 144 + h^2 \\ h^2 &= 116 \\ h &= \sqrt{116} \approx 10.8 \end{aligned}$$

عوض عن كل من ℓ و w و h بقيمته.
بسّط.
ربّع كل طرف.
بسّط.
احسب قيمة h^2 .
خذ الجذر التربيعي لكل طرف.
ارتفاع متوازي مستطيلات 10.8 m تقريباً.

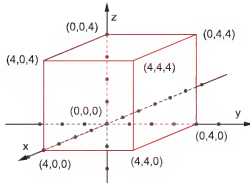
2. جد طول القطر في مكعب ضلعه 5 cm .



تذكّر أنّك تحتاج إلى إحداثيين لتحديد موقع نقطة في المستوي الإحداثي، وإلى 3 إحداثيات لتحديد موقع نقطة في الفضاء الإحداثي. تذكر أيضاً أن الفضاء الإحداثي يحتاج إلى 3 محاور إحداثيات، كما هو مبين في المقابل. كل ثلاثية أعداد (x, y, z) تحدّد نقطة وحيدة في الفضاء الإحداثي كما أن كل نقطة تحدّد ثلاثية أعداد. لتحديد موقع النقطة $(2, 3, 4)$ ، انطلق من نقطة الأصل $(0, 0, 0)$ وتحرك 3 وحدات إلى الأمام على المحور الأول، ثم وحدتين إلى اليمين على خط مواز للمحور الثاني، ثم 4 وحدات إلى أعلى، على خط مواز للمحور الثالث.

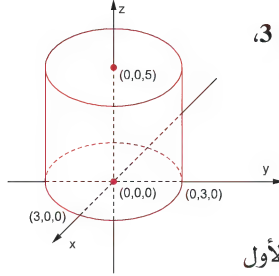
رسم أجسام في الفضاء الإحداثي

مثال 3



أ ارسم مكعباً ضلعه 4 وإحداثيات رؤوسه غير سالبة، أحدها نقطة الأصل.

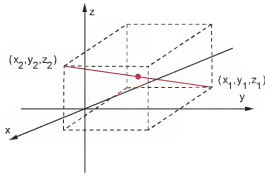
للمكعب 8 رؤوس هي النقاط $(0, 0, 0)$ ، $(0, 4, 0)$ ، $(4, 0, 0)$ ، $(4, 4, 0)$ ، $(0, 0, 4)$ ، $(4, 0, 4)$ ، $(0, 4, 4)$ ، $(4, 4, 4)$.



ب ارسم أسطوانة ارتفاعها 5 ونصف قطر كل من دائرتيها 3، ويقع مركز قاعدتها السفلى في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

ارسم مركز قاعدتها السفلى $(0, 0, 0)$. بما أن ارتفاع الأسطوانة 5، فإن مركز قاعدتها العليا يقع في النقطة $(0, 0, 5)$. ارسم هذه النقطة. من ناحية أخرى، يبلغ نصف قطر القاعدة 3، مما يعني أن القاعدة السفلى تقطع المحور الأول عند النقطة $(3, 0, 0)$ ، والمحور الثاني عند النقطة $(0, 3, 0)$. ارسم القاعدة السفلى. ارسم القاعدة العليا موازية للقاعدة السفلى، ثم صل بين القاعدتين.

3. ارسم مخروطاً ارتفاعه 7 وقاعدته دائرة نصف قطرها 5، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.



لكي تجد المسافة بين نقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ في الفضاء، ابدأ برسم متوازي مستطيلات بحيث يكون \overline{AB} قطرًا من أقطاره. استعمل قانون طول القطر. يُمكنك أيضًا أن تستعمل قانوناً مشابهاً لقانون المسافة في المستوي الإحداثي. ويُمكنك أن تحسب إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة باستعمال قانون شبيه بقانون إحداثي المنتصف في المستوي الإحداثي.

قانون المسافة والمنتصف في الفضاء الإحداثي

استعمل القانون $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ لحساب المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$.

منتصف القطعة التي طرفاها النقطتان $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ هو النقطة $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.



حساب المسافة وإحداثيات المنتصف في الفضاء الإحداثي

مثال 4

جد المسافة بين النقطتين A و B وإحداثيات منتصف \overline{AB} . قَرِّب الإجابة إلى أقرب عُشر.

أ $B(3, 4, 12)$ ، $A(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} & \text{إحداثيات المنتصف} \\ & M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \\ & M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right) \\ & M(1.5, 2, 6) \end{aligned}$$

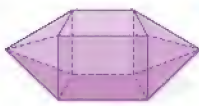
$$\begin{aligned} & \text{المسافة} \\ & d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ & = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (12-0)^2} \\ & = \sqrt{9+16+144} \\ & = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

6-1 التمارين

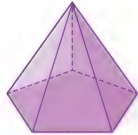
تمارين موجّهة

1 مفردات فسّر لماذا ليست الأسطوانة متعدّد وجوه.

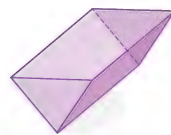
1 انظر المثال جد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه. استعمل ما توصّلت إليه للتحقق من صحة قانون أولر.



4



3



2

2 انظر المثال جد القياسات التالية مقربة إلى أقرب عُشر.

5 قطر متوازي مستطيلات طوله 8 cm وعرضه 4 cm وارتفاعه 12 cm.

6 ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 10 cm وعرضه 6 cm وقطره 13 cm.

7 قطر منشور قائم مربّع القاعدة ضلع قاعدته 12 قدماً، وارتفاعه قدماً واحدة.

ارسم:

8 مخروطاً ارتفاعه 4 وقاعدته دائرة نصف قطرها 8، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

9 أسطوانة ارتفاعها 4، وكل من قاعدتيها دائرة نصف قطرها 3، ويقع مركز قاعدتها السفلى في النقطة $(0, 0, 0)$.

10 مكعباً ضلعه 7، ويقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.

4 انظر المثال جد المسافة بين النقطتين A و B وإحداثيات منتصف \overline{AB} . قرّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

12 $B(7, 0, 14)$ ، $A(0, 3, 8)$

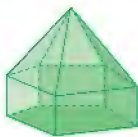
11 $B(9, 5, 10)$ ، $A(0, 0, 0)$

13 $B(9, 12, 15)$ ، $A(4, 6, 10)$

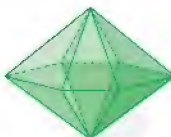
5 انظر المثال 14 **تسليّة** بعد يوم من ممارسة رياضة السير في الجبال، أقام الفريق مخيماً للراحة يبعد عن نقطة الانطلاق 3 km شرقاً و 7 km شمالاً، ويقع على ارتفاع يعلو عن نقطة الانطلاق 0.6 km. كم تبلغ المسافة بين نقطة الانطلاق والمخيّم؟

تمارين وحلّ مسائل

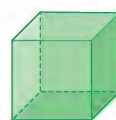
جد أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه. استعمل ما توصّلت إليه للتحقق من صحة قانون أولر.



17



16



15

جد القياسات التالية مقربة إلى أقرب عُشر.

18 قطر متوازي مستطيلات طوله 7 cm وعرضه 8 cm وارتفاعه 16 cm.

19 ارتفاع متوازي مستطيلات طوله 15 cm وعرضه 6 cm وقطره 17 cm.

20 ضلع مكعب قطره 8 cm.

تمارين حرة

لحل	انظر
التمارين	المثال
17-15	1
20-18	2
23-21	3
26-24	4
27	5

ارسم:

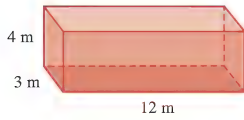
- 21 أسطوانة ارتفاعها 3، وكل من قاعدتيها دائرة قطرها 5، ويقع مركز قاعدتها السفلى في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.
- 22 مخروطًا ارتفاعه 4، وقاعدته دائرة نصف قطرها 2، ويقع مركزها في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.
- 23 منشورًا قائمًا مربع القاعدة يقع أحد رؤوسه في نقطة الأصل $(0, 0, 0)$ ، ضلع قاعدته 5 وارتفاعه 3.

جد المسافة بين النقطتين A و B وإحداثيات منتصف \overline{AB} . قَرِّب الإجابات إلى أقرب عُشر.

24 $B(4, 4, 4)$ ، $A(0, 0, 0)$ 25 $B(9, 10, 10)$ ، $A(2, 3, 7)$

26 $B(8, 8, 10)$ ، $A(2, 5, 3)$

27 **أحوال جوية** ترتفع سحابة 6500 قدم. تساقط المطر من السحابة وتحرك، بفعل الرياح، 700 قدم جنوبًا و 500 قدم شرقًا قبل أن يصل إلى الأرض. ما المسافة التي قطعها المطر من السحابة إلى الأرض؟



28 **خطوات متعددة** جد قطر متوازي مستطيلات المقابل. ما نتيجة مضاعفة طول متوازي مستطيلات وعرضه وارتفاعه، على طول القطر؟

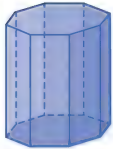
جد المعلومة الناقصة وارسم جسمًا هندسيًا له أعداد الرؤوس والأضلاع والوجوه.

عدد الرؤوس	عدد الأضلاع	عدد الوجوه	متعدد الوجوه
5	8	5	
8	12		
	9	5	
7		7	

29

30

31

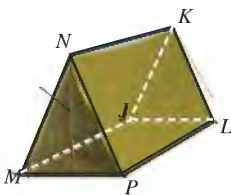


32 **جبر** كل قاعدة من قاعدتي المنشور المقابل مضلع له n ضلعًا. اكتب مقادير بدلالة n تُعبّر عن عدد رؤوس المنشور وعدد أضلاعه وعدد وجوهه. استعمل ما توصلت إليه للتحقق من صحة قانون أولر.



33 **جبر** قاعدة الهرم المقابل مضلع من n ضلعًا. اكتب مقادير بدلالة n تُعبّر عن عدد رؤوس الهرم وعدد أضلاعه وعدد وجوهه. استعمل ما توصلت إليه للتحقق من صحة قانون أولر.

34 الخيمة المقابلة منشور مثلث قائم القاعدة حيث $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$.



- أ تم نصب هذه الخيمة بحيث يقع الرأس J في نقطة $(0, 0, 0)$ ويقع الرأس M في النقطة $(7, 0, 0)$. جد إحداثيات الرؤوس الأخرى.
- ب يرغب صانع الخيمة في معرفة المسافة بين K و P ليضيف عارضة تدعم الخيمة. جد KP وقرب الجواب إلى أقرب عُشر.

نافذة

على الأرصاد الجوية



تصل كتلة بعض السحب الداكنة إلى 635 ألف طن أي ما يزيد على كتلة 100 ألف فيل.

جد القياس الناقص لكل متوازي مستطيلات. أعطِ الإجابات على الصورة الجذرية الأبسط.

الطول l	العرض w	الارتفاع h	القطر d
6	6	6	
24		60	65
12	18		24
	2	3	4

ارسم:

- 39 أسطوانة ارتفاعها 5، قاعدتها السفلى دائرة مركزها (1, 2, 5) ونصف قطرها 4.
- 40 مخروطاً ارتفاعه 7 وقاعدته دائرة مركزها (3, 3, 6) ونصف قطرها 3.
- 41 مكعباً ضلعه 6 ويقع أحد رؤوسه في (4, 2, 3).
- 42 متوازي مستطيلات رؤوسه (4, 2, 5)، (4, 6, 5)، (4, 6, 8)، (4, 2, 8)، (8, 2, 5)، (8, 6, 5)، (8, 6, 8)، (8, 2, 8).
- 43 مخروطاً رأسه (4, 7, 8) وقاعدته دائرة مركزها (4, 7, 1) ونصف قطرها 4.
- 44 أسطوانة نصف قطر كل من قاعدتيها 5 ويقع مركز كل منهما في (2, 3, 7) و (2, 3, 15).

ارسم \overline{AB} ثم جد طولها وإحداثيات منتصفها. قرب الإجابات إلى أقرب عُشر.

- 45 $B(3, 2, 1)$ ، $A(1, 2, 3)$ 46 $B(7, 4, 4)$ ، $A(4, 3, 3)$ 47 $B(3, 1, 5)$ ، $A(4, 7, 8)$
- 48 $B(8, 3, 6)$ ، $A(0, 0, 0)$ 49 $B(2, 2, 6)$ ، $A(6, 1, 8)$ 50 $B(3, 6, 3)$ ، $A(2, 8, 5)$

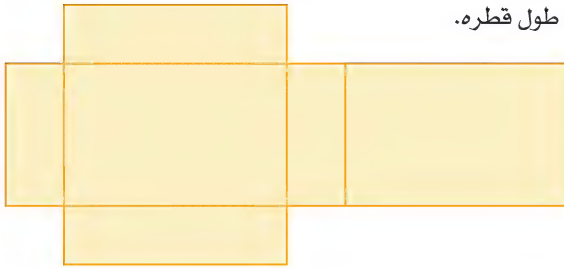
51 **خطوات متعددة** جد قيمة z علماً أن المسافة

بين $R(6, -1, -3)$ و $S(3, 2, z)$ تساوي 13.

52 ارسم جسماً هندسياً له 6 رؤوس و 6 وجوه.

53 **تقدير** قس أطوال بسط متوازي

المستطيلات التالي وقدر طول قطره.



54 **صغ مقولة** أي قطعة مستقيمة يقع طرفها على متوازي المستطيلات هي الأطول في رأيك؟ تحقق

من مقولتك باستعمال 3 قطع مستقيمة على الأقل، يقع طرفاً كل منها على متوازي المستطيلات

$ABCD EFGH$ حيث $A(0, 0, 0)$ ، $B(1, 0, 0)$ ، $C(1, 2, 0)$ ، $D(0, 2, 0)$ ، $E(0, 0, 2)$ ، $F(1, 0, 2)$ ، $G(1, 2, 2)$ ، $H(0, 2, 2)$

55 **تفكير ناقد** تُشكّل النقاط $A(3, 2, -3)$ ، $B(5, 8, 6)$ ، $C(-3, -5, 3)$ مثلثاً. صنّف هذا المثلث

باستعمال أضلاعه وزواياه.

56 **اكتب** أسطوانة نصف قطرها 4 cm وارتفاعها 6 cm. ما طول أطول قطعة مستقيمة يقع طرفها

على الأسطوانة؟ حدّد موقع طرّف هذه القطعة المستقيمة، واذكر السبب الذي يجعلها الأطول.

57 كم عدد الرؤوس والأضلاع والوجوه في هرم سداسي القاعدة؟

- (أ) 6 وجوه، 10 أضلاع، 6 رؤوس (ب) 7 وجوه، 12 ضلعاً، 7 رؤوس
(ج) 7 وجوه، 10 أضلاع، 7 رؤوس (د) 8 وجوه، 18 ضلعاً، 12 رأساً

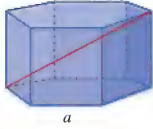
58 أي مما يلي هو الأقرب لقطر متوازي المستطيلات طوله 12 m وعرضه 8 m وارتفاعه 6 m

- (أ) 6.6 m (ب) 44 m (ج) 15.6 m (د) 244.0 m

59 ما المسافة بين النقطتين (8, 14, 7) و (9, 3, 12). قرّب الجواب إلى أقرب عُشر.

- (أ) 10.9 (ب) 11.9 (ج) 119.0 (د) 141.0

تحدّ وتوسّع



60 خطوات متعدّدة كل قاعدة للمنشور المقابل سداسي منتظم طول

ضلعه a . جد طول القطر الأحمر بدلالة طول الضلع a والارتفاع h .

61 هل النقاط $A(-1, 2, 4)$ و $B(1, -2, 6)$ و $C(3, -6, 8)$ على استقامة واحدة؟

62 جبر استعمل الإحداثيات وقانون المسافة لتبرهن قانون إحداثيات المنتصف.

المعطى: النقاط $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ و $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

المطلوب: النقاط الثلاث على استقامة واحدة و $AM = MB$.

63 جبر استعمل الإحداثيات لتبرهن أن أقطار متوازي المستطيلات متطابقة، وأنها

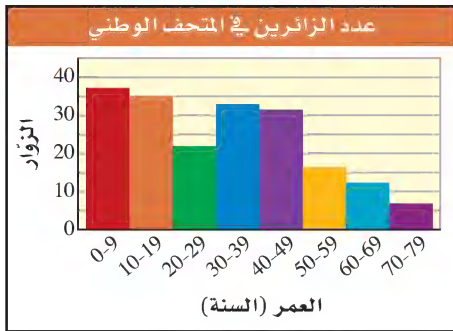
تتقاطع عند منتصفاتها.

المعطى: منشور قائم مستطيل القاعدة رؤوسه $A(0, 0, 0)$ ، $B(a, 0, 0)$ ، $C(a, b, 0)$ ،

$D(0, b, 0)$ ، $E(0, 0, c)$ ، $F(a, 0, c)$ ، $G(a, b, c)$ ، $H(0, b, c)$.

المطلوب: \overline{AG} و \overline{BH} متطابقان، وينصف كل منهما الآخر.

مراجعة لولبية



يُظهر الرسم البياني المقابل أعداد الأشخاص

الذين زاروا المتحف الوطني وفق فئات الأعمار.

جد: (الصفوف السابقة)

64 عدد الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم بين

10 سنوات و 29 سنة من الذين زاروا المتحف.

65 فئة الأعمار التي كان عدد الزوّار منها هو الأكبر.

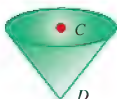
اكتب قاعدة لحساب مساحة كل شكل هندسي بعد

التغيير المحدّد. (الصفوف السابقة)

66 متوازي أضلاع قاعدته b وارتفاعه h بعد مضاعفة ارتفاعه.

67 شبه منحرف ارتفاعه h وقاعدته b_1 و b_2 بعد ضرب b_1 في $\frac{1}{2}$.

68 دائرة نصف قطرها r بعد مضاعفة نصف القطر 3 مرّات.



استعمل الرسم المقابل لحل التمارين من 69 إلى 71. (الدرس 1-2)

71 سم القاعدة.

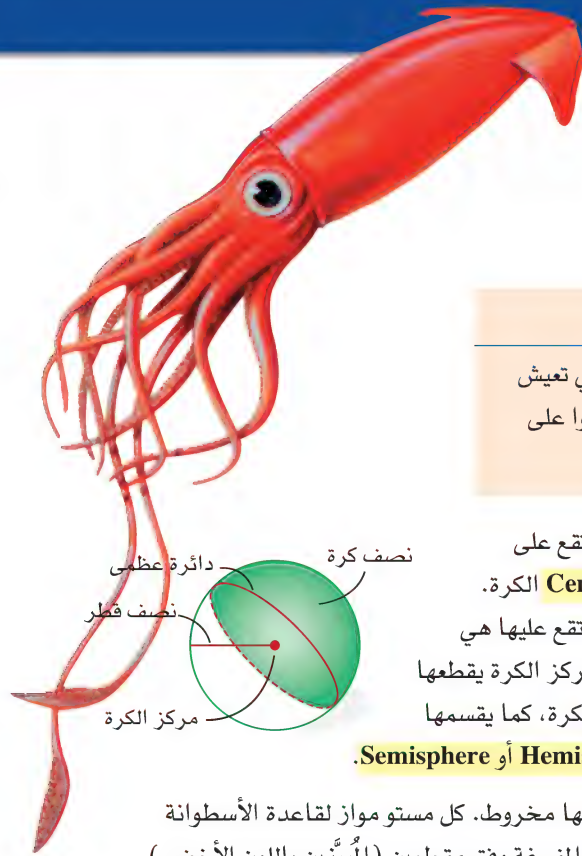
70 سم الأضلاع.

69 صنّف الجسم.

الكُرّة

Sphere

7-1



من يستعمل هذا الأمر؟

يدرس علماء الأحياء عيون بعض الحيوانات التي تعيش في أعماق البحار، مثل الحبار العملاق، ليحصلوا على معلومات عن هذه الأعماق. (مثال 2).

الأهداف

يذكر قانون حجم الكرة ويستعمله.

يذكر قانون مساحة الكرة ويستعمله.

المفردات

Vocabulary

الكرة

Sphere

مركز الكرة

Center of a sphere

نصف قطر الكرة

Radius of a sphere

نصف الكرة

Hemisphere

الدائرة العظمى

Great circle

الكرة Sphere هي مجموعة نقاط الفضاء التي تقع على

المسافة نفسها من نقطة معينة تُسمى **مركز Center** الكرة.

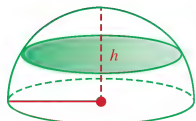
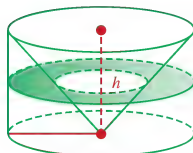
كل قطعة مستقيمة تصل بين مركز الكرة ونقطة تقع عليها هي

نصف قطر Radius للكرة. وكل مستو يمر في مركز الكرة يقطعها

وفق دائرة تُسمى **دائرة عظمى Great circle** للكرة، كما يقسمها

إلى قسمين يُسمى كل منهما **نصف كرة Hemisphere** أو **Semisphere**.

يُظهر الشكل أدناه نصف كرة وأسطوانة أفرغ منها مخروط. كل مستو مواز لقاعدة الأسطوانة وللدائرة العظمى للكرة، يقطع الكرة والأسطوانة المفرغة وفق مقطعين (المُيّنين باللون الأخضر) متساويين في المساحة. ينتج من ذلك أن نصف الكرة والأسطوانة المفرغة من المخروط متساويان في الحجم، بالاستناد إلى مبدأ كافالييه Cavalier's Principle. سوف تُبرهن عن تساوي المساحتين في التمرين 39.



$$V(\text{المخروط}) - V(\text{الأسطوانة}) = V(\text{نصف الكرة})$$

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

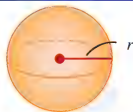
$$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 (r) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

ارتفاع الأسطوانة يساوي نصف قطر الكرة.

ينتج مما سبق أن حجم كرة نصف قطرها r هو $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ، لأن حجم الكرة يساوي ضعف حجم نصف الكرة.

حجم الكرة



يُحسب حجم كرة نصف قطرها r بالقانون $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

إيجاد حجم كرة

مثال 1

جد بدلالة π :

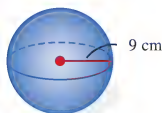
أ حجم الكرة المقابلة.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (9)^3 = 972\pi$$

$$V = 972\pi$$

يبلغ حجم هذه الكرة $972\pi \text{ cm}^3$.



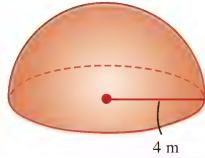
عوّض عن نصف القطر بقيمته، ثم بسّط.

ب قطر كرة حجمها $972\pi \text{ cm}^3$.

$$\begin{aligned} 972\pi &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 729 &= r^3 \\ r &= 9 \\ d &= 2 \times r = 2 \times 9 = 18 \\ \text{قطر الكرة هو } 18 \text{ m.} \end{aligned}$$

ج حجم نصف الكرة المقابل.

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (4)^3 = \frac{128\pi}{3} \\ \text{حجم نصف الكرة هو } \frac{128\pi}{3} \text{ m}^3. \end{aligned}$$



1. جد نصف قطر كرة حجمها $2304\pi \text{ cm}^3$.



مثال 2 تطبيق على الأحياء

الحبار حيوان بحري يعيش في أعماق البحار. يحتاج الحبار إلى عيون واسعة ليتمكن من رؤية ما يفترسه في النور الخافت الذي يسود أعماق البحار. تصل مقلة عين الحبار العملاق إلى أن تكون كرة قطرها 25 cm، بينما يبلغ قطر مقلة عين الإنسان 2.5 cm تقريباً. كم ضعفاً يبلغ حجم مقلة عين الحبار العملاق قياساً على حجم مقلة عين الإنسان؟

مقلة عين الحبار العملاق

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (12.5)^3$$

يبلغ حجم مقلة عين الحبار

$$8181.23 \text{ cm}^3 \text{ تقريباً.}$$

مقلة عين الإنسان

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (1.25)^3$$

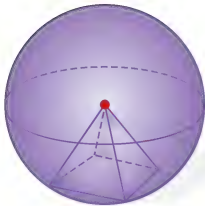
يبلغ حجم مقلة عين الإنسان

$$8.18123 \text{ cm}^3 \text{ تقريباً.}$$

يبلغ حجم مقلة عين الحبار العملاق حوالي 1000 ضعف من حجم مقلة عين الإنسان.

2. قطر مقلة عين الطائر الطنّان 0.6 cm تقريباً. كم ضعفاً يبلغ حجم مقلة

الإنسان قياساً على حجم مقلة هذا الطير؟



يقع رأس الهرم في الصورة المقابلة عند مركز الكرة. يساوي ارتفاع الهرم نصف قطر الكرة تقريباً. افترض أن الكرة عبئت بـ n هرم مساحة قاعدة كل منها B وارتفاعه r .

يساوي حجم الكرة مجموع أحجام الأهرامات تقريباً.

$$V(\text{الكرة}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \dots + \frac{1}{3}Br$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$$

اقسم كل طرف على $\frac{1}{3}r$.

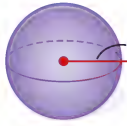
$$4\pi r^2 = nB$$

إذا ملأت الأهرامات الكرة، فإن مجموع مساحات قواعدها يساوي تقريباً مساحة سطح الكرة أي $S = 4\pi r^2$. وكلما ازداد عدد الأهرامات كان مجموع مساحات قواعدها أقرب إلى مساحة سطح الكرة.

المساحة السطحية للكرة

اعلم

احفظ

تُحسب المساحة السطحية لكرة نصف قطرها r بالقانون $S = 4\pi r^2$.

إيجاد المساحة السطحية لكرة

مثال 3

جد بدلالة π :

أ المساحة السطحية لكرة قطرها 10 cm.

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

مساحة الكرة $100\pi \text{ cm}^2$.ب حجم كرة مساحتها السطحية $144\pi \text{ cm}^2$.

$$S = 4\pi r^2$$

$$144\pi = 4\pi r^2$$

$$6 = r$$

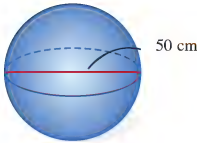
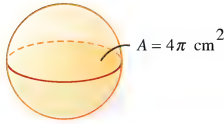
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

حجم الكرة 288 cm^3 .ج المساحة السطحية لكرة مساحة دائرتها العظمى $4\pi \text{ cm}^2$.

$$\pi r^2 = 4\pi$$

$$r = 2$$

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

مساحة الكرة $16\pi \text{ cm}^2$.

3. جد المساحة السطحية للكرة المقابلة.

نقطة
مراقبة

استكشاف تأثير التغير في القياسات على حجم الكرة ومساحتها

مثال 4

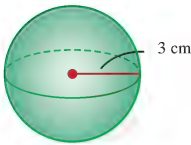
تم ضرب نصف قطر الكرة في 3. صف تأثير ذلك على حجمها.

الكرة بعد تكبير نصف قطرها

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(9)^3 \\ &= 972\pi \end{aligned}$$

الكرة الأصلية

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(3)^3 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$



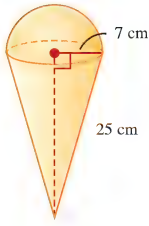
لاحظ أن $972\pi = 27(36\pi)$. إذاً، عندما تضرب نصف قطر الكرة في 3، فإن حجمها يُضرب في 27. لاحظ أن 27 هو تكعيب 3.

4. كيف يتغير حجم الكرة إذا تمّت قسمة نصف قطرها على 3؟

نقطة
مراقبة

إيجاد حجوم أجسام مركّبة ومساحاتها السطحية

مثال 5



جد المساحة السطحية للجسم المقابل وحجمه، بدلالة π .

المساحة المساحة السطحية لهذا الجسم المركّب.

المساحة السطحية لهذا الجسم المركّب هي مجموع

مساحة نصف الكرة والمساحة الجانبية للمخروط.

$$S(\text{نصف الكرة}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{المخروط}) = \pi rh = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{الجسم المركّب}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$$

المساحة السطحية للجسم المركّب هي $273\pi \text{ cm}^2$.

الحجم جد حجم الجسم المركّب.

ابدأ بإيجاد ارتفاع المخروط.

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

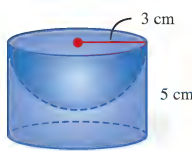
حجم هذا الجسم المركّب هو مجموع حجمي نصف الكرة والمخروط.

$$V(\text{نصف الكرة}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V(\text{المخروط}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$$

$$V(\text{الجسم المركّب}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$$

حجم الجسم المركّب هو $\frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$.



5. جد المساحة السطحية للجسم المركّب المقابل وحجمه.

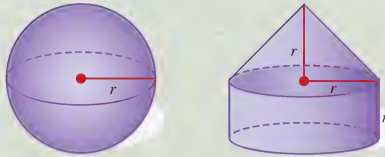


فكر وناقش

1. كيف تحسب المساحة السطحية للكرة إذا عرفت مساحة دائرة عظمى لها؟

2. قارن بين حجم الكرة المقابلة وحجم

الجسم المركّب قريبا.



3. كن منظّما انسخ المخطّط أدناه ثم أكمله.



إذا كان نصف
قطر الكرة r فإن

مساحة دائرتها العظمى
هي ...

المساحة السطحية للكرة
هي ...

حجم الكرة هو ...

7-1 التمارين

تمارين موجّهة

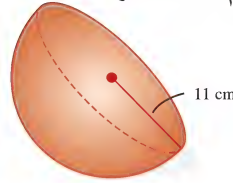
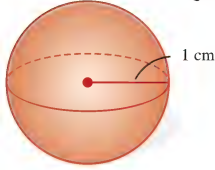
1 مفردات صِف طريقتي نصف قطر للدائرة.

جد بدلالة π :

1 انظر المثال

2 حجم نصف الكرة.

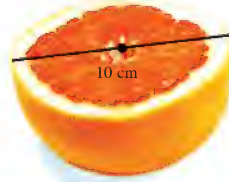
3 حجم الكرة.



4 نصف قطر كرة حجمها $288\pi \text{ cm}^3$.

2 انظر المثال

5 طعام كم ضعفاً يساوي حجم نصف ثمرة الكريب فروت قياساً على نصف ثمرة البرتقال.

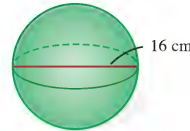
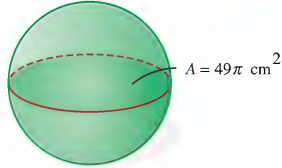


جد بدلالة π :

3 انظر المثال

7 المساحة السطحية للكرة.

6 المساحة السطحية للكرة لقطرها 16 cm.



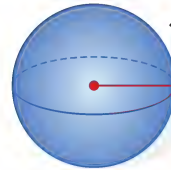
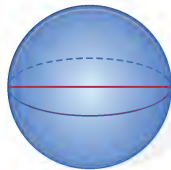
8 حجم كرة مساحتها السطحية $6724\pi \text{ m}^2$.

4 انظر المثال

صِف تأثير كل تغيير على القياس المُعَيَّن.

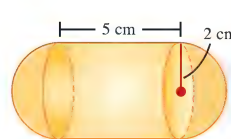
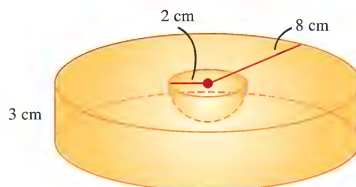
9 المساحة السطحية للكرة بعد مضاعفة نصف قطرها.

10 حجم الكرة بعد تصغير قطرها إلى الربع.



5 انظر المثال

جد المساحة السطحية لكل جسم مركّب وحجمه.



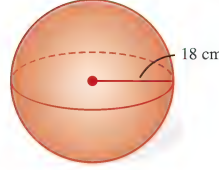
تمارين وحل مسائل

جد بدلالة π :

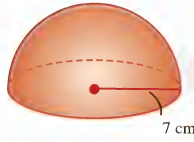
تمارين حرة

أنظر	لحل
المثال	التمارين
1	15-13
2	16
3	19-17
4	21-20
5	23-22

13 حجم الكرة.



14 حجم نصف الكرة.



15 قطر كرة حجمها $7776\pi \text{ cm}^3$.

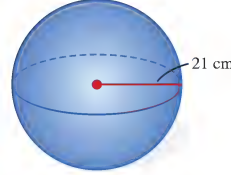
16 جواهر يتحدد قياس اللؤلؤة بقطرها مقيسًا بالمليمتر.



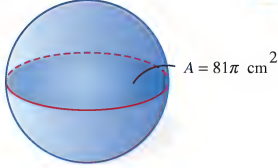
كم مرة يكبر حجم لؤلؤة قطرها 9 mm حجم لؤلؤة قطرها 6 mm ؟

جد بدلالة π :

17 المساحة السطحية للكرة.



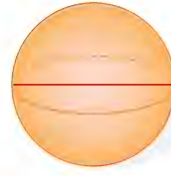
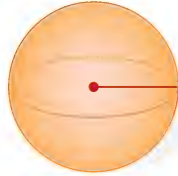
18 المساحة السطحية للكرة.



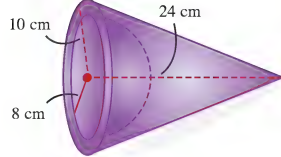
19 حجم كرة مساحتها السطحية $625\pi \text{ m}^2$.

جد تأثير كل تغيير على القياس المعين.

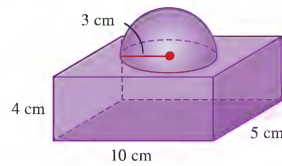
20 تأثير ضرب نصف القطر في $\frac{1}{3}$ على المساحة. 21 تأثير ضرب نصف القطر في 6 على الحجم.



جد المساحة السطحية لكل جسم مركب وحجمه.



23



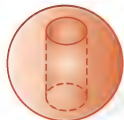
22

24 جد نصف قطر نصف كرة حجمها $144\pi \text{ cm}^3$.

25 جد محيط الدائرة العظمى لكرة مساحتها $60\pi \text{ cm}^2$.

26 جد حجم كرة محيط دائرتها العظمى $36\pi \text{ cm}$.

27 جد المساحة السطحية وحجم الكرة التي يقع مركزها في نقطة الأصل (0, 0, 0) من الفضاء الإحداثي وتمر في النقطة (2, 3, 6).



28 تقدير تم ثقب لؤلؤة كروية قطرها 8 mm بحفر أسطوانة قطرها 2 mm داخلها. قدر مساحة اللؤلؤة المتبقية وحجمها.

رياضة جد المقاييس الناقصة لكل كرة من كرات بعض الألعاب الرياضية.

الرياضة	الكرة	القطر	محيط دائرة عظمى	المساحة	الحجم
29 الفولف		4.27 cm			
30 الكريكت			22.86 cm		
31 المضرب		6.35 cm			
32 البيتان		74 mm			

أحياء كانت الباتسفير أول غوّاصة للأبحاث البحرية. وقد تم اختراعها على شكل كرة سنة 1930. بلغ القطر الداخلي لهذه الغوّاصة 137 cm تقريباً، وبلغ سمك الفولاذ الذي صنعت منه 3.8 cm. كان لهذه الغوّاصة 3 نوافذ دائرية قطر الواحدة منها 30 cm تقريباً. قدّر حجم الفولاذ الذي استعمل لصناعة هذه الغوّاصة.

جغرافيا يبلغ نصف قطر الكرة الأرضية 6437 km تقريباً. تغطي المياه ثلثي سطح الأرض تقريباً. قدّر مساحة اليابسة.

الكوكب	القطر بالأميال
عطارد	3032
الزهرة	7521
الأرض	7926
المريخ	4222
المشتري	88846
زحل	74898
أورانوس	31763
نبتون	30775
بلوتو	1485

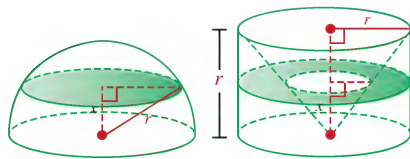
فلك استعمل الجدول لحل التمارين من 35 إلى 38.

35 كم ضعفاً يساوي حجم المشتري قياساً على حجم الأرض؟

36 أي كوكب يساوي حجمه تقريباً مجموع حجمي الزهرة والمريخ؟

37 أيهما أكبر: مساحة زحل أم مجموع مساحتي أورانوس ونبتون؟

38 كم ضعفاً تساوي مساحة عطارد قياساً على مساحة بلوتو؟



39 **تفكير ناقد** لنصف الكرة والأسطوانة نصف القطر نفسه في الرسم المقابل. أثبت أن للمقطعين المظللين المساحة نفسها.

40 **اكتب** افترض أن لكرة ومكعب المساحة نفسها. اكتب معادلة تبين العلاقة بين نصف قطر هذه الكرة r وضلع هذا المكعب s .

41 يُعبئ أحد مصانع عصير البرتقال ما ينتجه في أوعية كروية تشبه البرتقالة. مساحة الوعاء الكروي 324.5 cm^2 تقريباً.

أ ما حجم هذا الوعاء الكروي؟ قرب الجواب إلى أقرب عُشر.

ب قرر المصنع أن يزيد نصف قطر الوعاء الكروي 10%. ما حجم الوعاء الجديد؟

42 يُحيط مكعب بكرة نصف قطرها 8 cm. ما نسبة حجم المكعب إلى حجم الكرة؟

- أ) $2:\frac{1}{3}\pi$ ب) $2:3\pi$ ج) $1:\frac{4}{3}\pi$ د) $1:\frac{2}{3}\pi$

43 ما المساحة السطحية لكرة حجمها $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$ ؟

- أ) $8\pi \text{ cm}^2$ ب) $10\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2$ ج) $16\pi \text{ cm}^2$ د) $32\pi \text{ cm}^2$

44 أي مقدار يمثل حجم الجسم المقابل المركب من نصف كرة نصف

قطرها r ومكعب ضلعه $2r$.

- أ) $(\frac{2}{3}\pi + 8)r^3$ ب) $\frac{4}{3}\pi r^3 + 2r^3$ ج) $2(2\pi + 12)r^2$ د) $\frac{4}{3}\pi r^3 + 8r^3$



تحدّ وتوسّع

45 **طعام** يتكوّن رأس آلة لتوزيع كرات العلكة من كرة قطرها 18 cm. تحتوي

الآلة على 1 300 كرة علكة تشغل 57% من حجمها. قدر قطر كل كرة علكة.

46 يُمكن استعمال المساحة السطحية للكرة لإيجاد حجمها.

أ) استعمل قانون المساحة السطحية للكرة لحساب نصف قطرها r بدلالة

مساحتها S .

ب) عوّض، في قانون حجم الكرة، عن r بالقيمة التي وجدتها في السؤال السابق.

ج) ارسم بيان الدالة التي تُعبّر عن حجم الكرة بدلالة مساحتها. صِف البيان

الذي رسمته.

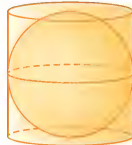


استعمل الرسم المقابل لحل التمرينين 47 و 48.

47 ما العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة؟

48 ما العلاقة بين المساحة السطحية للكرة والمساحة الجانبية

للأسطوانة؟



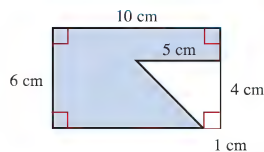
مراجعة لولبية

اكتب دالة يمر بيانها في النقاط التالية. (الصفوف السابقة)

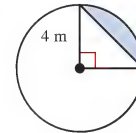
49 $\{(0, 1), (1, 2), (-1, 2), (2, 5), (-2, 5)\}$

50 $\{(-1, 9), (0, 10), (1, 11), (2, 12), (3, 13)\}$

جد مساحة القسم المُظلل. قَرّب الجواب إلى أقرب عُشر. (الصفوف السابقة)



52



51

صِف تأثير كل تغيير على الحجم. (الصفوف السابقة)

53 حجم المكعب بعد ضرب ضلعه في $\frac{3}{4}$.

54 حجم منشور بعد ضرب كل من ارتفاعه ومساحة قاعدته في 5.

القطاعات الدائرية والأقواس

8-1

Sectors and arcs



من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل المزارعون نصف قطر الري الدائري لحساب مساحة المنطقة التي يغطيها الري. (مثال 3).

مساحة القطاع الدائري جزء من مساحة الدائرة التي تحتويه. لكي تحسب مساحة قطاع دائري زاويته m° ، اضرب مساحة الدائرة في $\frac{m}{360}$.

الأهداف

يحسب مساحة قطاع دائري.

يحسب طول قوس.

المفردات

Vocabulary

القطاع الدائري

Sector of a circle

القطعة الدائرية

Segment of a circle

طول القوس

Arc length

القطاع الدائري

المساحة	الصورة	التسمية	التعريف
$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$		القطاع BCD	القطاع الدائري a circle جزء من الدائرة محدد بنصفي قطر والقوس الذي يحدّدانه على الدائرة.

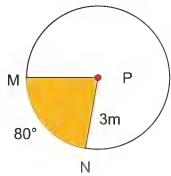


إيجاد مساحة قطاع دائري

مثال 1

جد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π . ثم مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

أ القطع MPN



قانون مساحة القطاع الدائري.

عوّض عن كل من نصف القطر وقياس الزاوية بقيمته.

بسّط.

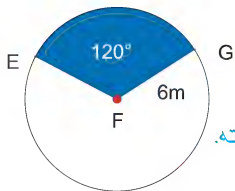
$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = \pi (3)^2 \left(\frac{80^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = 2\pi$$

تبلغ مساحة هذا القطاع $2\pi \text{ m}^2 \approx 6.28 \text{ m}^2$.

ب القطع EFG



قانون مساحة القطاع الدائري.

عوّض عن كل من نصف القطر وقياس الزاوية بقيمته.

بسّط.

$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = \pi (6)^2 \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A = 12\pi \text{ cm}^2$$

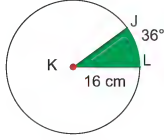
تبلغ مساحة هذا القطاع $12\pi \text{ cm}^2 \approx 37.70 \text{ cm}^2$.

اكتب رمز الدرجة بعد m في القانون للتذكّر أنك تستعمل قياس القوس وليس طوله.

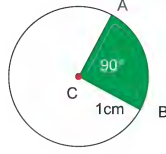
1. جد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π ، ثم مقربة إلى أقرب جزء من مئة.



ب) القطاع JKL



أ) القطاع BCA



تطبيق في الزراعة

مثال 2



يبلغ قطري دائري 120m. احسب مساحة القطاع الذي ترويه آلة الري عندما تدور 50° . أعط الجواب مقرباً إلى أقرب متر مربع.

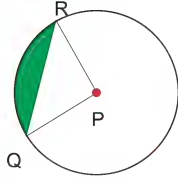
$$A = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right) \quad \text{قانون مساحة القطاع الدائري.}$$

$$A = \pi (60)^2 \left(\frac{50^\circ}{360^\circ} \right) \quad r = 360 \text{ cm}$$

$$A = 500\pi \quad \text{بسط}$$

تبلغ مساحة هذا القطاع 1571 m^2 تقريباً.

2. كم ستكون المساحة لو أن الآلة دارت نصف دورة؟



القطعة الدائرية segment of a Circle هي المنطقة المحددة بوتر دائرة والقوس الذي يحدده الوتر.

مساحة القطعة الدائرية



مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع - مساحة المثلث

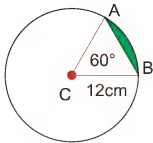


إيجاد مساحة القطعة الدائرية

مثال 3

جد مساحة القطعة الدائرية. مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة 1 جد مساحة القطاع الدائري ACB .



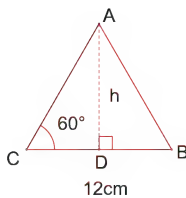
$$A_1 = \pi r^2 \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right) \quad \text{قانون مساحة القطاع الدائري.}$$

$$A_1 = \pi (12)^2 \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$A_1 = 24\pi \quad \text{بسط}$$

الخطوة 2 جد مساحة المثلث ACB .

ارسم الارتفاع AD .



$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$$

$$A_2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

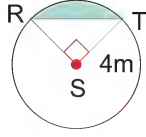
تذكر

في المثلث القائم 90 - 60 - 30 يكون طول الضلع المقابل للزاوية 60° ناتج ضرب $\sqrt{3}$ في طول الضلع المجاور لها.

الخطوة 3 مساحة القطعة = مساحة القطاع - مساحة المثلث

$$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$$

مساحة القطاع 13.04 cm^2 تقريباً.



3. جد مساحة القطعة الدائرية مقربة إلى أقرب جزء من مئة.



كما أن مساحة القطاع الدائري جزء من مساحة الدائرة، كذلك طول القوس جزء من محيطها.

طول القوس



التعريف	الصورة	الطول
طول القوس Arc length هو طول خيط ملتصق بالقوس ويصل بين طرفيه.		$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$

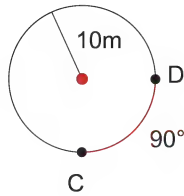
لاحظ أن طول القوس ونصف القطر لهما وحدة الطول نفسها.

إيجاد طول قوس

مثال 4

جد طول كل قوس بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

أ \widehat{CD}



$$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = 2\pi(10) \left(\frac{90^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = 5\pi \approx 15.71$$

طول القوس 15.71 m تقريباً.

ب قوس قياسه 35° في دائرة نصف قطرها 3 m.

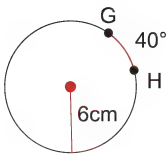
$$L = 2\pi r \left(\frac{m^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = 2\pi(3) \left(\frac{35^\circ}{360^\circ} \right)$$

$$L = \frac{7}{12}\pi \approx 1.83$$

يبلغ طول القوس 1.83 m تقريباً.

4. جد طول كل قوس بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.



أ قوس قياسه 40° في دائرة نصف قطرها 6 cm.

ب قوس قياسه 135° في دائرة نصف قطرها 4 cm.

فكر وناقش

1. ما الفرق بين طول القوس وقياسه؟
2. عندما تقسم فطيرة بيتزا إلى قطاعات متساوية، يكون كل منها قطاعاً دائرياً. ما المعلومات التي تحتاجها لإيجاد مساحة قطعة من قطع البيتزا.
2. كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله.

القانون	الصورة
مساحة قطاع دائري	
مساحة قطعة دائرية	
طول قوس	



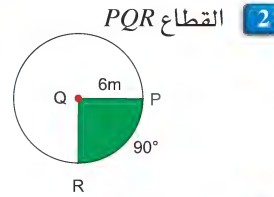
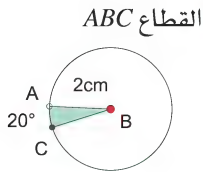
8-1 التمارين

تمارين موجّهة

- 1 مفردات المنطقة المحددة بنصفي قطر من أنصاف قطر الدائرة وبالقوس الذي يُحدّدانه هي ؟ . (قطاع دائري أم قطعة دائرية).

انظر المثال 1

جد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π ، ثم مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

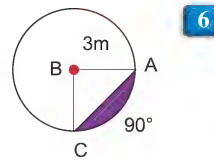
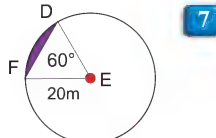
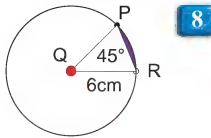


انظر المثال 2

- 5 ملاحظة يدور ضوء المنارة بزاوية قياسها 150° ، ويُرَى ضوءها حتى مسافة 3 km. احسب المساحة التي يمرّ عليها الضوء مقربة إلى أقرب كيلومتر مربع.

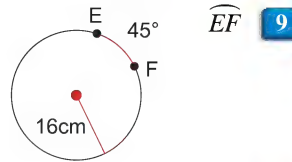
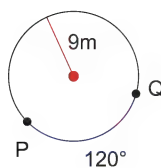
انظر المثال 3

خطوات متعددة جد مساحة كل قطعة دائرية مقربة إلى أقرب جزء من مئة.



انظر المثال 4

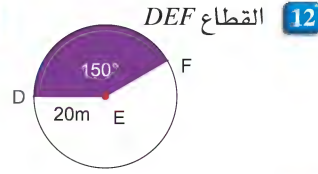
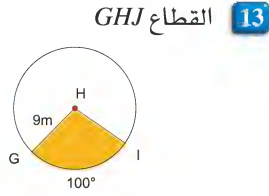
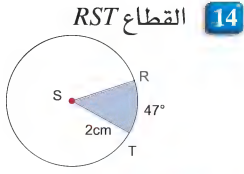
جد طول كل قوس بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.



- 11 طول قوس قياسه 20° في دائرة نصف قطرها 6 m.

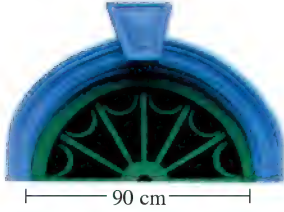
تمارين وحل مسائل

جد مساحة كل قطاع دائري بدلالة π ، ثم مقربة إلى أقرب جزء من مئة.



تمارين حرة

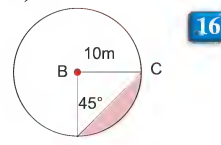
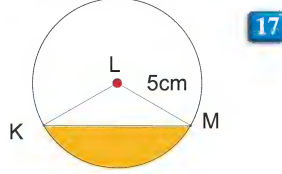
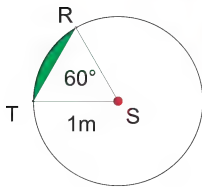
أنظر المثال	حل التمارين
1	14-12
2	15
3	18-16
4	21-19



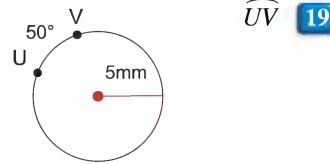
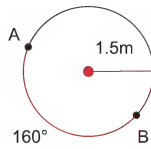
15 **عمارة** القمرة نافذة على شكل نصف دائرة

تكون عادة فوق باب المنزل. احسب مساحة القمرة المقابلة مقربة إلى أقرب سنتيمتر مربع.

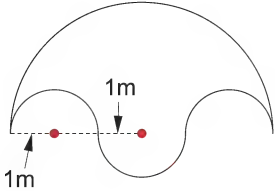
خطوات متعددة جد مساحة كل قطعة دائرية مقربة إلى أقرب جزء من مئة.



جد طول كل قوس بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.



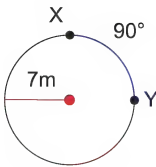
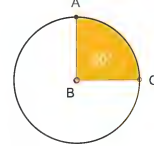
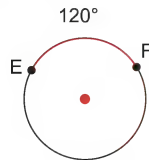
21 طول قوس قياسه 9° في دائرة قطرها 6 m.



22 **تاريخ الرياضيات** درس علماء الرياضيات الإغريق الشكل المقابل الذي سمّوه سائينون. احسب محيط السائينون المقابل مقرباً إلى أقرب عُشر.

جد نصف قطر كل دائرة.

23 مساحة القطاع ABC تساوي 9π وحدة مربعة 24 طول القوس EF يساوي 8π متراً.



25 **تقدير** يشكّل الكسر $\frac{22}{7}$ قيمة تقريبية للعدد π .

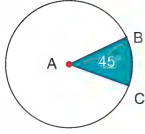
أ استعمل هذه القيمة لإيجاد قيمة تقريبية لطول القوس XY .

ب استعمل المفتاح في الحاسبة لإيجاد طول القوس XY .

مع 8 أرقام بعد النقطة العشرية.

ج هل القيمة التقريبية التي وجدتها في السؤال أ أكبر

من تلك التي وجدتها في السؤال ب أم أصغر؟

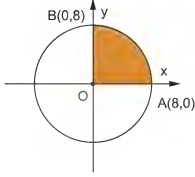


26 تفكير ناقد جد نصف قطر الدائرة، عندما تكون مساحتها 24 cm^2 ، ثم عندما تكون مساحة القطاع الأخضر 3 cm^2 .

27 اكتب كيف تحسب نصف قطر دائرة إذا عرفت طول قوس وقياسه؟



تحضير للاختبار



28 ما مساحة القطاع AOB ؟

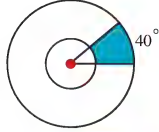
- (أ) 4π (ب) 16π (ج) 32π (د) 64π

29 ما طول القوس AB ؟

- (أ) 2π (ب) 4π (ج) 8π (د) 16π

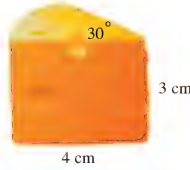
30 جواب مختصر ما مساحة قطاع دائري محدد بقوس قياسه 38° في دائرة نصف قطرها 12 cm ؟

تحدّ وتوسّع



31 ما مساحة الجزء الأزرق، علمًا بأن نصف قطر الدائرة الكبرى 5 cm ونصف قطر الصغرى 2 cm ؟

32 قطعة الجبنة المقابلة قطاع من أسطوانة.



(أ) ما حجم هذه القطعة؟ قَرِّب الجواب إلى أقرب عُشر.

(ب) ما مساحة وجهها الأعلى؟ قَرِّب الجواب إلى أقرب عُشر.



33 احتمال قياس كل زاوية مركزية في الشكل المقابل 45° .

نصف قطر الدائرة الصغرى إنش واحد، ونصف قطر الكبرى

إنشان. ما احتمال أن يُصيب السهم:

- (أ) منطقة حمراء؟ (ب) منطقة زرقاء؟ (ج) منطقة حمراء أو زرقاء؟

مراجعة لولبية

حدّد إن كان كل مستقيم موازيًا للمستقيم $y=4x-5$ ، أو متعامدًا معه،

أو لا هذا ولا ذاك. (الصفوف السابقة)

34 $8x-2y=6$.

35 المستقيم المار في النقطتين $(\frac{1}{2}, 0)$ و $(1\frac{1}{2}, 2)$.

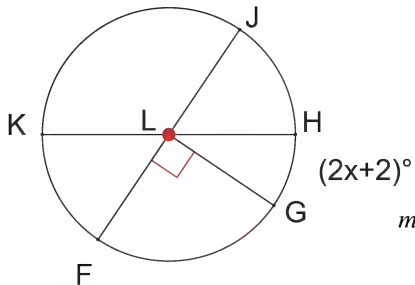
36 المستقيم الذي يقطع المحور الأول عند 4 والمحور الثاني عند 1.

جد بدلالة π : (الدرس 7-1)

37 حجم كرة نصف قطرها 3 cm .

38 محيط دائرة عظمى على كرة مساحتها $4\pi \text{ m}^2$.

احسب: (الصفوف السابقة)



41 $m\widehat{JFH}$

40 $m\widehat{KJ}$

39 $m\widehat{KLI}$

الفصل

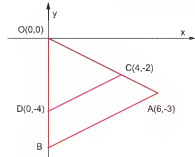
1

دليل الدراسة: مراجعة

20 أثبت أن المثلثين RST و RUV متشابهان،
حيث $T(2, 0)$ ، $S(-1, -1)$ ، $R(1, -3)$
و $V(3, 3)$ ، $U(-3, 1)$

21 أثبت أن المثلثين JMN و JKL متشابهان،
حيث $J(4, 4)$ و $K(2, 3)$ و $L(4, 2)$
و $M(-4, 0)$ و $N(4, -4)$

22 $D(0, -4)$ ، $C(4, -2)$ ، $A(6, -3)$ ، $O(0, 0)$
جد إحداثيي النقطة B علماً بأن المثلثين
 AOB و COD متشابهان.

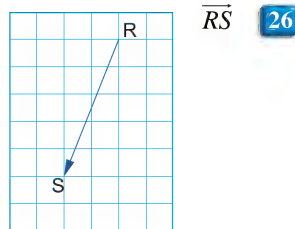


23 ارسم المثلث KLM حيث $K(0, 3)$ و $L(0, 0)$
و $M(4, 0)$ ، ثم ارسم صورته بتكبير نسبته 3
وبيّن أن المثلثين متشابهان.

اكتب كل متجه بمكوّنيه.

24 \overline{AB} حيث $A(5, 1)$ و $B(2, 3)$

25 \overline{MN} حيث $M(2, 4)$ و $N(1, 2)$



ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي
واحسب طوله مقرباً إلى أقرب عُشر.

27 $\langle -5, -3 \rangle$

28 $\langle -2, 0 \rangle$

29 $\langle 4, -4 \rangle$

30 $\langle 4, 4 \rangle$

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

1 $(-1, 0, 3)$

2 $(2, -2, 1)$

3 $(0, -1, 1)$

4 $(3, 1, 0)$

ارسم كل مستوى في الفضاء الإحداثي.

5 $x - 3y + 2z = 6$

6 $2x - 4y - 2z = 4$

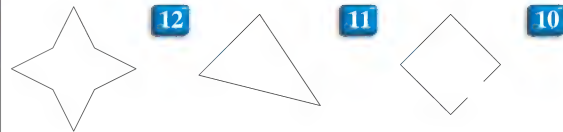
7 $-x + y - 5z = 5$

8 $3x + 2y + z = -6$

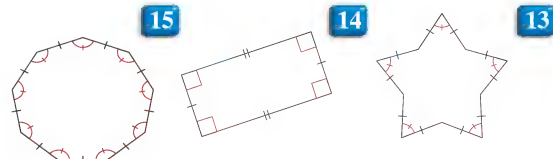
9 **اقتصاد المستهلك** مع روناك 35 000 دينار
لشراء مرطبات وبيتزا وحلوى. ثمن علبة المرطبات
2 000 دينار وفطيرة البيتزا 9 000 دينار وعلبة
الحلوى 4 000 دينار. اكتب معادلة بثلاثة مجاهيل
للتعبير عن الأمر.

اذكر إن كان الشكل مضلعاً. إذا كان مضلعاً سمّه.

بحسب عدد أضلاعه.



اذكر إن كان المضلع منتظماً أم لا، وإن كان مقعراً
أم محدباً.



جد:

16 مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع اثني عشري.

17 قياس كل زاوية داخلية في

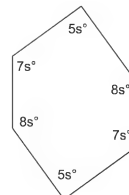
مضلع منتظم من 20 ضلعاً.

18 قياس كل زاوية داخلية في

المضلع المقابل.

19 قياس زاوية خارجية لرباعي

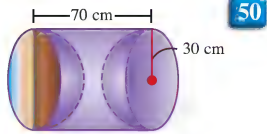
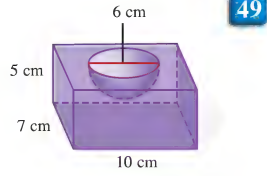
منتظم.



47 المساحة السطحية للكرة حجمها $288\pi \text{ cm}^3$.

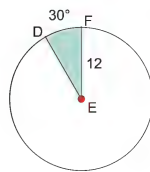
48 قطر كرة مساحتها $256\pi \text{ cm}^2$.

جد مساحة كل جسم مركّب وحجمه.

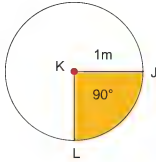


جد مساحة كل قطاع بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.

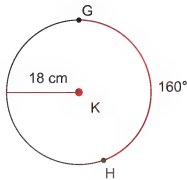
51 القطاع DEF



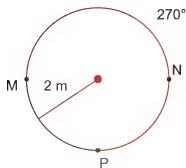
52 القطاع LKJ



جد طول كل قوس بدلالة π ، ثم مقرباً إلى أقرب جزء من مئة.



53 \widehat{GH}



54 \widehat{MNP}

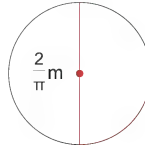
ارسم كل متجه في المستوي الإحداثي وجد ميله مقرباً إلى أقرب درجة.

31 سرعة مروحية ممثلة بالمتجه $\langle 4, 5 \rangle$.

32 تطير طائرة بسرعة 600 km/h في اتجاه شمال-

55° -شرق. هب ربح بسرعة 50 km/h في اتجاه الشرق. كيف أصبحت سرعة الطائرة؟ كيف أصبح ميلها؟ قرب السرعة إلى أقرب عُشر والميل إلى أقرب درجة.

جد كل قياس. قرب الجواب إلى أقرب عُشر عند الضرورة.



33 محيط الدائرة المقابلة.

34 مساحة دائرة محيطها $14\pi \text{ m}$.

35 قطر دائرة مساحتها $64x^2\pi \text{ cm}^2$.

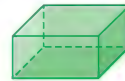
36 مساحة خماسي منتظم ضلعه 4 cm .

37 مساحة مثلث منتظم ضلعه 4 km .

38 مساحة ثماني منتظم ضلعه 8 cm .

39 مساحة مربع قطره 12 mm .

جد عدد الوجوه والأضلاع والرؤوس في كل متعدد وجوه وتحقق من قانون أولر.



41



40

جد المسافة بين النقطتين، وإحداثيي منتصف القطعة المستقيمة اللذين يُحدّانها. قرب إلى أقرب عُشر.

42 $(7, 1, 1)$ ، $(2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8)$ ، $(0, 3, 0)$

44 $(9, 1, 5)$ ، $(7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4)$ ، $(6, 2, 8)$

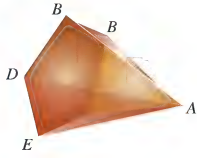
جد بدلالة π :

46 حجم كرة مساحتها $100\pi \text{ cm}^2$.

الفصل

1

اختبار الفصل

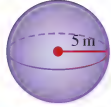


16 ما عدد الوجوه والأضلاع
والرؤوس في الجسم الهندسي
المقابل؟ تحقق من قانون أولر.

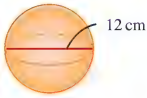
جد المسافة بين النقطتين وإحداثي منتصف القطعة
المستقيمة التي يحدّدانها. قرب الجواب إلى أقرب عُشر.

17 $(7, 1, 4)$ ، $(6, 0, 9)$ 18 $(5, 5, 5)$ ، $(0, 0, 0)$

19 $(2, -5, 7)$ ، $(-1, 4, 3)$

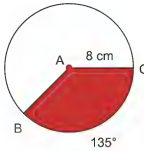


20 جد مساحة الكرة المقابلة مقرّبة
إلى أقرب عُشر.



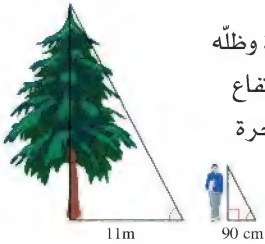
21 جد حجم الكرة المقابلة مقرّبة
إلى أقرب عُشر.

22 جد مساحة سداسي منتظم ضلعه 4 m، مقرّبة
إلى أقرب عُشر.



23 جد مساحة القطاع الدائري
المقابل بدلالة π ، ثم مقرّبة
إلى أقرب جزء من مئة.

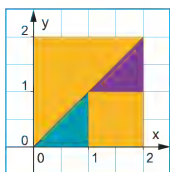
24 جد طول القوس BC بدلالة π ، ثم مقرّبة
إلى أقرب جزء من مئة.



25 قاس خسرو ظل الشجرة وظلّه
هو في محاولة لإيجاد ارتفاع
الشجرة. ما ارتفاع الشجرة
علمًا بأن طول خسرو
175 cm

26 أثبت أن المثلثين ABC

و ADE متشابهان حيث $A(6, 5)$ و $B(3, 4)$
و $C(6, 3)$ و $D(-3, 2)$ و $E(6, -1)$.



27 ارسم صورة الشعار المقابل
بعد تكبيره بنسبة $\frac{3}{2}$.

ارسم كل نقطة في الفضاء الإحداثي.

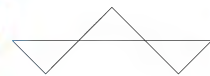
1 $(2, -1, 3)$ 2 $(0, -1, 3)$

3 $(-2, 1, -1)$

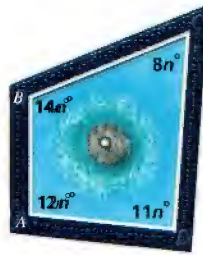
اذكر إن كان الشكل مضلعًا. إذا كان كذلك سمّه بحسب
عدد أضلاعه.



5



4



6 للبركة شكل رباعي كما
هو مبين في الرسم
المقابل. احسب قياس
كل من زواياه الداخلية.

7 ما مجموع قياسات الزوايا
الداخلية لتساعي محدّب؟

8 جد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم عدد
أضلاعه 15.

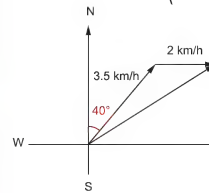
ارسم في المستوي الإحداثي كل متجه واحسب طوله
مقرّبة إلى أقرب عُشر.

9 $\langle 1, 3 \rangle$ 10 $\langle -4, 1 \rangle$ 11 $\langle 2, -3 \rangle$

ارسم في المستوي الإحداثي كل متجه، واحسب ميله
مقرّبة إلى أقرب درجة.

12 سرعة طائرة ممثلة بالمتجه $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$.

13 سرعة الريح ممثلة بالمتجه $\langle \sqrt{3}, 1 \rangle$.



14 انطلق سرجون على درّاجته

بسرعة ثابتة مقدارها

3.5 km/h في اتجاه

شمال - 45° شرق. كانت

سرعة الريح 2 km/h في اتجاه الشرق.

ما السرعة الحقيقيّة لسرجون مقرّبة إلى أقرب

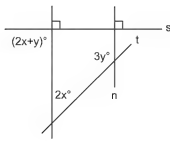
عشر وما اتجاهها مقرّبة إلى أقرب درجة؟

15 جد بدلالة π محيط ومساحة دائرة قطرها 12 m.

اختبار تراكمي

الفصل

1



ما قيمة x في الشكل المقابل؟

- ☐ أ 22.5° ☐ ج 90°
☐ ب 45° ☐ د 135°

8 خصّصت البلدية حديقة على

شكل سداسي منتظم لزراعة الورود.

ما مساحة هذه الحديقة مقربة إلى أقرب عُشر،

علمًا أن ضلع السداسي 5 m ؟

- ☐ أ 32.5 m^2 ☐ ج 75.0 m^2
☐ ب 65.0 m^2 ☐ د 129.9 m^2

9 كيف تتغيّر نسبة حجم كرة إلى مساحتها، إذا تمّت

مضاعفة نصف القطر؟

- ☐ أ لا تتغير النسبة. ☐ ج تُضرب في 4.
☐ ب تتضاعف. ☐ د تُضرب في 8.

10 $A(x, y, z)$ حيث \overline{AB} منتصف $M(2, -6, 3)$

و $B(-2, 6, 13)$. ما إحداثيات النقطة A ؟

- ☐ أ $A(-6, 18, 23)$ ☐ ج $A(2, -6, 19)$
☐ ب $A(0, 0, 8)$ ☐ د $A(6, -18, -7)$

11 ما حجم الكرة الكبيرة إذا كان حجم الصغيرة

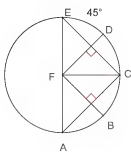
288 cm^3 .



- ☐ أ 864 cm^3 ☐ ج 7776 cm^3
☐ ب 2827 cm^3 ☐ د $23\ 328 \text{ cm}^3$

12 أي من المتجهات أدناه طوله $3\sqrt{5}$ ؟

- ☐ أ $\langle -4, -5 \rangle$ ☐ ج $\langle 5, -4 \rangle$
☐ ب $\langle -3, 6 \rangle$ ☐ د $\langle 5, 5 \rangle$



13 ما مساحة القطاع الدائري EFD ، إذا

كان طول \widehat{BC} $6\pi \text{ cm}$ ؟

- ☐ أ $20\pi \text{ cm}^2$ ☐ ج $120\pi \text{ cm}^2$
☐ ب $72\pi \text{ cm}^2$ ☐ د $240\pi \text{ cm}^2$

خيار من متعدد

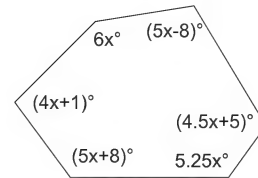
1 أي مما يلي يُمثّل تقاطعات المستوي

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 20 \\ x = 10, y = 20, z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, y = 0, z = 0 \\ x = 10, y = 20, z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, y = 1, z = -5 \\ x = 10, y = 20, z = 4 \end{cases}$$

2 ما قيمة x في المضلع أدناه؟



- ☐ أ 12 ☐ ج 24
☐ ب 18 ☐ د 36

3 ما قياس كل زاوية داخلية في مضلع منتظم

اثني عشري؟

- ☐ أ 30° ☐ ج 150°
☐ ب 144° ☐ د 162°

4 أي من المتجهات أدناه يساوي المتجه \overline{AB} حيث

$$\begin{cases} A(2, -1) \\ B(-2, 4) \end{cases}$$

- ☐ أ $\langle -4, -5 \rangle$ ☐ ج $\langle 5, -4 \rangle$
☐ ب $\langle -4, 5 \rangle$ ☐ د $\langle 5, 4 \rangle$

5 $ABCDE$ خماسي محدّب. $\hat{D} \equiv \hat{E}$ ، $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$.

$$m\hat{A} = 2m\hat{D}$$

ما قياس \hat{C} ؟

- ☐ أ 67.5° ☐ ج 154.2°
☐ ب 135° ☐ د 225°

6 ما نوع مثلث قياسات زواياه الداخلية $(2x)^\circ$ ،

$$(3x-9)^\circ$$

$$(x+27)^\circ$$

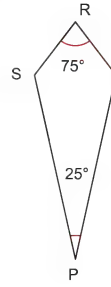
أ متساوي الساقين حاد الزوايا.

ب متساوي الساقين قائم.

ج مختلف الأضلاع حاد الزوايا.

د مختلف الأضلاع بزواوية منفرجة.

جواب فقط



14 ما عدد أضلاع مضلع محدب إذا كان

مجموع قياسات زواياه الداخلية 1260° .

15 ما قياس \widehat{PQR} في المضلع المقابل؟

16 يبلغ طول لاوين 1.6 m وطول ظلّه

3.5 m. كم يبلغ ارتفاع شجرة يمتد

ظلّها على مدى 17.5 m؟

17 ما عدد القطع المستقيمة الناتجة عن وصل نقطتين

من بين 6 نقاط في المستوي، علماً بأنه لا يوجد ثلاث

نقاط منها على استقامة واحدة؟

18 ما نصف قطر دائرة نسبة مساحتها إلى محيطها

تساوي 2.5؟

19 ما طول محصلة المتجهين $\vec{u} = \langle 3, -7 \rangle$ و $\vec{v} = \langle -6, 5 \rangle$

قرب الجواب إلى أقرب عُشر.

20 ما عدد أضلاع متعدد وجوه له 12 رأساً و 8 وجوه.

21 ما مساحة سداسي منتظم ضلعه 2 cm قرب

الجواب إلى أقرب عُشر.

22 ما طول القوس الذي يشكل نصف دائرة في دائرة

نصف قطرها 5 mm قرب الجواب إلى أقرب جزء

من مئة.

جواب مختصر

23 أثبت أن المثلثين ABC و DEC متشابهان، حيث

$A(-2, 0)$ و $B(2, 2)$ و $C(2, -2)$ و $D(0, -1)$

و $E(2, 0)$.

24 ما نصف قطر كرة إذا كانت نسبة حجمها إلى

مساحتها تساوي نسبة 2.5 إلى 1؟

25 ارسم المثلث ABC حيث $A(1, -2)$ ، $B(-2, -3)$ ،

$C(-2, 2)$.

أرسم الصورة $A'B'C'$ للمثلث ABC بتكبير

نسبته $\frac{3}{2}$.

ب أثبت أن $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$

استعمل الميل.

26 مثلث رؤوسه $A(1, -2)$ و $B(-2, -3)$ و $C(-2, 2)$.

المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بتناسب

هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{3}{2}$.

أ ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، المثلثين

ABC و $A'B'C'$.

ب بين أن $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ و $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$

متساوية.

استعمل الميل لتبرير إجاباتك.

27 محطتان للوقود على الطريق السريع يفصل بينهما

8 km. توقفت سيارة بين المحطتين بسبب نفاذ

وقودها. ما احتمال أن تقع النقطة حيث توقفت

السيارة، على بعد لا يقل 2 km عن كلتا المحطتين؟

ارسم مخططاً واكتب شرحاً يوضح كيف وجدت

الجواب.

جواب مفصل

28 قرر نوزاد وسالار اللذان يسكنان معاً، ارتياد معلّم

سياحي بصحبة ابن عمّهما سامان. مضى نوزاد إلى

المعلّم السياحي مباشرة، بينما مرّ سالار بابن عمه

ليصطحبه.

قطع سالار إلى منزل سامان 90 km باتجاه شمال-

25° شرق ثم قطع مع ابن عمه مسافة 50 km

باتجاه الشرق وصولاً إلى المعلّم السياحي

أ اكتب، بالمكوّنين، المتجهين اللذين يمثّلان

الرحلة من منزل نوزاد وسالار إلى منزل

سامان، ومن منزل سامان إلى المعلّم السياحي.

ب ما ميل المتجه الذي يمثّل رحلة سالار

من منزله إلى المعلّم السياحي؟ وما طوله؟

ج غادر نوزاد وسالار منزلهما في الوقت نفسه

ووصلا إلى المعلّم السياحي في الوقت نفسه.

سار نوزاد بسرعة ثابتة بلغت 50 km/h.

كم كانت سرعة سالار؟

الفصل

2

أنظمة المعادلات والمتباينات الخطية

Systems of Linear Equations and Inequalities

الفصل الثاني

الدروس

- | | |
|-----|-----------------------------|
| 1-2 | المتباينات الخطية بمجهولين. |
| 2-2 | النماذج الخطية. |
| 3-2 | أنظمة المتباينات الخطية. |
| 4-2 | البرمجة الخطية. |

اختبار جزئي

- | | |
|-----|------------------------------|
| 5-2 | حل أنظمة خطية بثلاثة مجاهيل. |
| 6-2 | القياسات الإحصائية. |
| 7-2 | مختبر التكنولوجيا |
| | التوزيع الثنائي. |
| | مشروع الفصل |

ارفع صوتك

يُمكنك استعمال أنظمة المعادلات الخطية بهدف التخطيط لجمع أموال تكفي لحماية أنواع من الطيور مهددة بالانقراض، وذلك عن طريق بيع تقاويم تحمل صورها الجميلة..

هل أنت مستعد؟

المُفردات ✓

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | | | |
|---|-----------------|----|--|
| 1 | المعادلة | أ | معادلة بمجهولين تُشكّل النقاط التي تُمثّل حلولها خطأً مستقيماً. |
| 2 | المتباينة | ب | انحدار مستقيم يُعرّف بأنه نسبة الارتفاع إلى التقدم. |
| 3 | مجموعة الحل | ج | كتابة مقدارين جبريين يربط بينهما أحد رموز التباين: $>$ ، $<$ ، \leq ، \geq . |
| 4 | الميل | د | كتابة مقدارين جبريين يربط بينهما رمز المساواة $=$. |
| 5 | النقاط البيانية | هـ | مجموعة قيم تُحقّق معادلة أو متباينة. |
| | | و | مجموعة نقاط في المستوى الإحداثي تُمثّل علاقة بين مجموعتي مُعطيات. |

المضاعف المشترك الأصغر ✓

جد المضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد.

- | | | | | | | | |
|---|--------|---|--------|---|--------|---|---------|
| 6 | 3 و 18 | 7 | 8 و 28 | 8 | 8 و 36 | 9 | 15 و 27 |
|---|--------|---|--------|---|--------|---|---------|

ميل المستقيمات المتوازية والمتعامدة ✓

اذكر إن كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

- | | | | | | | | |
|----|---|----|--|----|---|----|--|
| 10 | $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = -\frac{1}{5}x - 4 \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} 5x - 10y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$ | 13 | $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3y - x = 5 \end{cases}$ |
|----|---|----|--|----|---|----|--|

حساب قيم المقادير الجبرية بالتعويض ✓

احسب المقدار بتعويض كل متغير بقيمته.

- | | | | |
|----|--|----|---|
| 14 | $y = 14$ ، $x = 8$ ؛ $1.5x + 3y$ | 15 | $y = -4$ ، $x = 6$ ؛ $5x - \frac{3}{4}y$ |
| 16 | $y = \sqrt{2}$ ، $x = 0.25$ ؛ $4x - \sqrt{2}y$ | 17 | $y = \frac{1}{3}$ ، $x = 1$ ؛ $-\frac{75x}{3y}$ |

حلّ معادلات متعددة الخطوات ✓

حلّ كل معادلة.

- | | | | | | | | |
|----|----------------|----|--------------------|----|-----------------------|----|-----------------------|
| 18 | $8x + 19 = -5$ | 19 | $5x + 4 = 25 - 2x$ | 20 | $9x - (x + 12) = -13$ | 21 | $-3(4x - 5) - 1 = 20$ |
|----|----------------|----|--------------------|----|-----------------------|----|-----------------------|

حل معادلات تتضمن كسوراً ✓

حلّ كل معادلة.

- | | | | | | | | |
|----|-----------------------------------|----|-----------------------------------|----|----------------------------------|----|------------------------------------|
| 22 | $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = 8$ | 23 | $\frac{2}{5}x + \frac{1}{6} = -4$ | 24 | $x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$ | 25 | $-\frac{1}{2} = 3x - \frac{1}{3}x$ |
|----|-----------------------------------|----|-----------------------------------|----|----------------------------------|----|------------------------------------|

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Constraint	الشرط
Elimination	الحذف
Feasible region	منطقة الجدوى
Linear programming	البرمجة الخطية
Linear system	النظام الخطي
Substitution	التعويض
System of equations	نظام المعادلات
System of linear inequalities	نظام المتباينات الخطية
Correlation	الارتباط
Line of best fit	المستقيم الأفضل تمثيلاً
Regrssion	الانحدار

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل، تابع الخطوات التالية.

1. تعني كلمة انحدار العودة إلى الوراء. كيف تستعمل معنى هذه الكلمة لتفهم معنى الانحدار في الرياضيات؟
2. علام تدل كلمة حذف ؟ ما فاعلية عملية الحذف في حل المعادلات الرياضية؟
3. تُشير كلمة شرط إلى اقتصار أو تحديد. ما دور الشروط في الرياضيات؟ أوضح بإعطاء مثال.
4. تدل كلمة جدوى على الفائدة من شيء أو أمر ما. أعط أمثلة على جمل تتضمن هذه الكلمة. بعد ذلك، ناقش ما تدل عليه منطقة الجدوى.

في الماضي

درست سابقاً

- مثلت بيانياً الدوال الخطية.
- قمت بحل المتباينات الخطية بمجهول واحد بيانياً.
- قمت بحل الأنظمة الخطية 2×2 .
- درست أجساماً هندسية مثل المكعب والمنشور.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- حل متباينة خطية بمجهولين بيانياً.
- حل نظام متباينات خطية بيانياً.
- حل مسألة برمجة خطية.
- حل نظام معادلات خطية 3×3 .
- النماذج الخطية لتمثيل مجموعات معطيات.
- القياسات الإحصائية لمجموعة معطيات.
- التوزيعات الإحصائية الثنائية.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لحل أنظمة معادلات أكثر تعقيداً.
- لفهم النماذج الخطية في المواد الأخرى، مثل الكيمياء والفيزياء والاقتصاد.
- لتخطيط عمليات في الحياة اليومية، مثل جمع الأموال أو القيام برحلة، أو ترشيد النفقات.

الرياضيات

قراءة وكتابة



استراتيجية للدرس: كتابة يوميات الرياضيات

تُساعدك كتابة يوميات الرياضيات على تحسين مهارتي الكتابة والاستدلال. فحين تعبّر كتابياً في يومياتك، تكتشف موضوعات في الرياضيات لا تعرفها جيداً، أو قد تراها غامضة. يُمكنك استعمال اليوميات لتعكس: ما تعلمته في حصة الرياضيات، نقاط الدرس التي تربكك، تلخيصاً للمفاهيم والمصطلحات، التعبير عن رأيك حول موضوع يتصل بالدرس. ولعل الأهم في اليوميات الرياضية، هو أنها تعكس تقدّمك في تعلّم الرياضيات.

صفحة من يوميات طالب: اقرأ الصفحة المبيّنة أدناه من يوميات طالب.



حاول

ابدأ بكتابة يوميات الرياضيات، استعمل الأفكار الواردة أدناه لكتابة يومياتك يوماً بعد يوم في هذا الأسبوع. تأكد من كتابة تاريخ كل صفحة ورقمها.

- ما كنت أعرفه عن درس اليوم:
- ما لست متأكداً من فهمه في درس اليوم:
- لإنهاء درس اليوم، أحتاج إلى المهارات التالية:
- ما الصعوبات التي واجهتني؟ وكيف حاولت أن أتغلب عليها؟
- ما الذي أعجبني في درس اليوم؟ وما الذي لم يُعجبني؟



المتباينات الخطية بمجهولين

Linear inequalities in two unknowns

1-2

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مديرو مراكز التسلية المتباينات الخطية لتحديد عدد بطاقات الدخول من مختلف الأسعار التي عليهم بيعها لكي يحققوا أرباحاً (المثال 3).

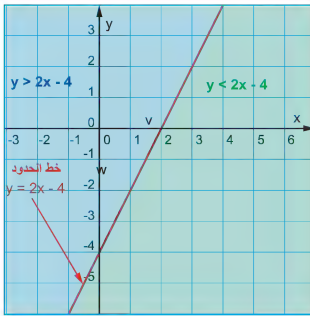
الأهداف

يحل متباينة خطية بمجهولين بيانياً.
يحل مسائل باستعمال المتباينات الخطية بمجهولين.

المفردات

المتباينة الخطية
Linear inequality
خط الحدود
Boundary line

تشكّل الدوال الخطية أساس المتباينات الخطية بمجهولين. تُعبّر المتباينة الخطية بمجهولين **Linear inequality in two unknowns** عن علاقة بين متغيرين تتضمن رمزاً من رموز التباين مثل المتباينة $y > 2x - 4$. تتألف مجموعة الحل لمتباينة خطية بمجهولين من جميع الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المتباينة. كما أن النقاط التي تمثل مختلف حلول المتباينة تشكّل جزءاً من المستوي الإحداثي محدداً بخط يقسم المستوي إلى جزئين.



فالمستقيم $y = 2x - 4$ ، على سبيل المثال، يقسم المستوي الإحداثي إلى قسمين كما هو ظاهر في الشكل المقابل. يُحقق إحداثياً كل نقطة في أحد القسمين المتباينة $y > 2x - 4$ ، بينما يُحقق إحداثياً كل نقطة في القسم الآخر المتباينة $y < 2x - 4$. يُمثّل القسم الأول بيانياً مجموعة الحل للمتباينة $y > 2x - 4$. إنه منطقة الحل لهذه المتباينة. يُشكّل المستقيم $y = 2x - 4$ خط الحدود لمنطقة الحل. ارسم خط الحدود مُنقطاً للتعبير عن أن نقاطه لا تنتمي إلى منطقة الحل.

لحل المتباينة $y > 2x - 4$ ، ارسم خط الحدود مُنقطاً وظلّل المنطقة الواقعة فوقه.

إضاءة

تذكّر أن الخط الذي يقع تحت كل من $>$ و $<$ في الرمز $< \text{و } >$ يدل على أن خط الحدود خط متصل غير مُنقط.

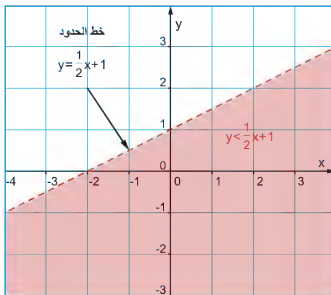
حل المتباينات الخطية بمجهولين بيانياً

مثال 1

حلّ بيانياً كل متباينة.

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

خط الحدود هو المستقيم $y = \frac{1}{2}x + 1$ الذي ميله $\frac{1}{2}$ وتقاطعه العمودي 1. ارسم خط الحدود مُنقطاً، لأنه لا يُشكّل جزءاً من منطقة الحل. ظلّل المنطقة الواقعة تحت خط الحدود.

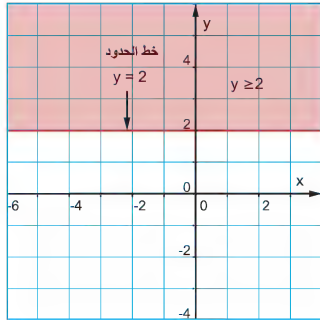


تحقق اختر نقطة تقع في منطقة الحل، النقطة $(0, 0)$ مثلاً، واختبر إن كانت تمثل حلاً للمتباينة.

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

$$0 < \frac{1}{2}(0) + 1$$

بما أن نقطة الاختبار تحقق المتباينة، فإن المنطقة المظللة هي منطقة الحل.



ب $y \geq 2$.

تذكر أن المستقيم $y = 2$ مستقيم أفقي.

الخطوة 1 ارسم المستقيم باستعمال خط متصل لأن خط الحدود يُشكّل جزءاً من منطقة الحل.

الخطوة 2 ظلّل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود لتبيان النقاط حيث $y > 2$.

تحقق تنتمي النقطة $(0, 4)$ إلى منطقة الحل لأن $4 \geq 2$. لاحظ أن أي نقطة تقع على خط الحدود أو فوقه تُمثّل حلاً للمتباينة، بغض النظر عن قيمة x .

1. حلّ بيانياً كل متباينة.

ب $y < -3$

أ $y \geq 3x - 2$



إذا لم تكن معادلة خط الحدود مكتوبة على صورة الميل - التقاطع، يُمكنك اختيار نقطة اختبار لا تقع على خط الحدود لتحديد أي منطقة يجب تظليلها. إذا حقّق إحداثيّ النقطة المتباينة، ظلّل المنطقة التي تقع فيها النقطة، وإلا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل المتباينات الخطية بمجهولين بيانياً باستعمال التقاطعات مع محوري الإحداثيات.

مثال 2

حلّ المتباينة $2x + 3y \geq 6$ باستعمال التقاطع مع كل من محوري الإحداثيات.

الخطوة 1 حدّد التقاطعين.

عوّض عن x بالصفر، ثم عوّض عن y بالصفر لإيجاد تقاطع خط الحدود مع كل من محوري الإحداثيات.

التقاطع مع المحور الأول (الأفقي)

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3 \times 0 = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

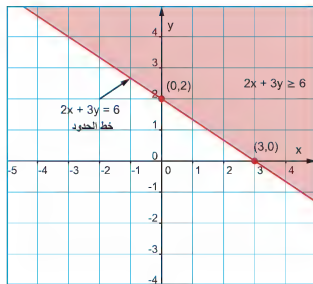
التقاطع مع المحور الثاني (الرأسي)

$$2x + 3y = 6$$

$$2 \times 0 + 3y = 6$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$



الخطوة 2 ارسم خط الحدود.

خط الحدود هو المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0, 2)$ و $(3, 0)$. ارسم هذا المستقيم بخط متصل، لأنه جزء من منطقة الحل.

الخطوة 3 حدّد المنطقة الواجب تظليلها.

اختبر إن كانت النقطة $(0, 0)$ تنتمي إلى منطقة الحل. بما أن التباين $0 + 0 \geq 6$ خطأ، فإنّ النقطة لا تنتمي إلى منطقة الحل. عليك، إذًا تظليل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود.

إضاءة

استعمل النقطة $(0, 0)$ كنقطة اختبار إلا إذا كان خط الحدود يمر فيها. وفي هذه الحالة، اختر نقطة واضحة الموقع واختبرها (مثلاً على أحد المحورين).

2. حلّ بيانياً المتباينة $3x - 4y > 12$ باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.



تطبيق تجاري

مثال 3



يبيع سيرك الشرق نوعين من بطاقات الدخول: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار. ينفق مدير السيرك 240 000 دينار في كل حفلة. كم بطاقة دخول على المدير أن يبيع من كل نوع لتحقيق أرباح؟ باع المدير 20 بطاقة للصغار، كم عليه أن يبيع من بطاقات الكبار لكي يُحقّق ربحاً؟

1. افهم المسألة

يتألّف حل هذه المسألة من شقين: كتابة المتباينة التي تُشكّل حلولها إجابات عن السؤال الأول، وحل هذه المتباينة بيانياً، ثم تحديد عدد بطاقات الكبار الواجب بيعها، وقد بيع 20 بطاقة من بطاقات الصغار.

اكتب المعطيات المهمة :

- هناك نوعان من البطاقات: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار.
- يجب ألا يقل ثمن البطاقات المباعة عن 240 000 دينار.

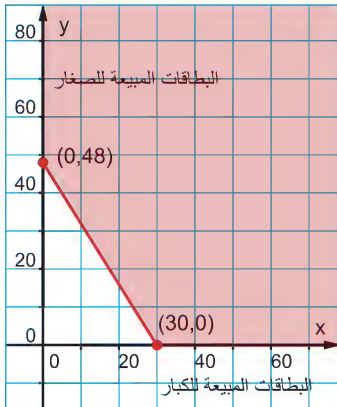
2. خطّط

استعمل x للدلالة على عدد بطاقات الكبار و y للدلالة على عدد بطاقات الصغار. اكتب متباينة لتمثيل المسألة.

سعر بطاقة الكبير	×	عدد بطاقات الكبار	+	سعر بطاقة الصغير	×	عدد بطاقات الصغار	≥	المجموع
8000	×	x	+	5000	×	y	≥	240 000

يُمكن تمثيل المسألة بالمتباينة $8000x + 5000y \geq 240\,000$ ، أو $8x + 5y \geq 240$.

3. حلّ



حدّد تقاطعي خط الحدود مع كل مع المحورين.

$$8x + 5 \times 0 = 240 \quad 8 \times 0 + 5y = 240$$

$$x = 30 \quad y = 48$$

ارسم خط الحدود وهو المستقيم المار في النقطتين $(0, 48)$ و $(30, 0)$. ظلّل المنطقة التي تتألّف من جميع النقاط التي تقع في الربع الأول وفوق خط الحدود، لأنّ عدد البطاقات غير سالب.

إذا كان عدد بطاقات الصغار المباعة 20،

$$8x + 5 \times 20 \geq 240$$

$$8x + 100 \geq 240$$

$$8x \geq 140 \quad \text{وبالتالي} \quad x \geq 17,5$$

يجب أن يكون عدد البطاقات عدداً صحيحاً. يجب ألا يقل عدد بطاقات الكبار المباعة عن 18.

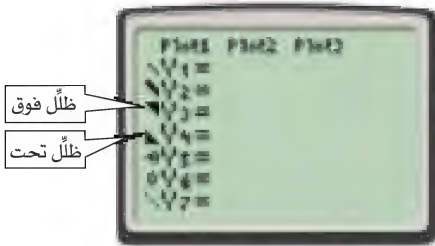
4. تحقّق

$$18 \times 8000 + 20 \times 5000 = 244000$$

انتبه!

لا تنسَ ما يرمز إليه كل مجهول.

3. قرّر مدير المركز الثقافي تقديم نوعين من الهدايا لأعضائه. ثمن الهدية من النوع الأول 125 000 دينار، وثمنها من النوع الثاني 40 000 دينار. بين يدي المدير 1 500 000 دينار، كم هدية من كل نوع يُمكنه أن يُقدّم؟ قدّم 4 هدايا من النوع الأول، كم سيقدّم من النوع الثاني؟



يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لكي تحل بيانياً المتباينات الخطية بمجهولين. اضغط على **Y1** وتحرك إلى أقصى اليسار باستعمال أزرار التحرك. كلما ضغطت على الزر **ENTER** ترى إلى أقصى اليسار نوعاً من أنواع الرسم كما هو مبين في الصورة المقابلة.

حل المتباينات الخطية بمجهولين بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية

حلّ المتباينة $(2x - y) < 2$ بالنسبة إلى y بدلالة x . حل بيانياً المتباينة الناتجة.

$$\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} (2x - y) < \frac{3}{2} \times 2 \quad \text{اضرب كل طرف في } \frac{3}{2}.$$

$$2x - y < 3$$

اطرح $2x$ من كل طرف.

$$-y < -2x + 3$$

اضرب كل طرف في -1 .

$$y > 2x - 3$$

واقبل رمز التباين.



اضغط على **Y1** وأدخل $2x - 3$. تحرك إلى أقصى اليسار باستعمال مفاتيح التحرك. اضغط على المفتاح **ENTER** حتى يُصبح نوع الرسم الظاهر إلى أقصى اليسار. اضغط على **GRAPH** تحصل على الرسم المقابل.

مثال 4

إضاءة

تذكر أن ضرب متباينة في عدد سالب، أو قسمتها عليه، يقلب رمز التباين.

4. حلّ بيانياً المتباينة $2(3x - 4y) > 24$ باستعمال الحاسبة البيانية.



فكر وناقش

1. قارن بين الدائرتين المُفرغة والمملوءة في حل المتباينات الخطية بمجهول واحد بيانياً وبين خطّي الحدود المنقط والمتصل في حل المتباينات الخطية بمجهولين بيانياً.
2. صِف منطقة الحل للمتباينة $x \geq 4$.
3. أوضح إن كنت تستطيع أن تستعمل النقطة $(0, 0)$ كنقطة اختبار لتحديد المنطقة الواجب تظليلها عند حل المتباينة $3x + 5y \leq 0$.
4. كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثلاً على متباينتين تتمتع منطقة حلّها بالوصف الوارد في أعلى العمود: الأولى على صورة $y \square \dots$ ، حيث \square رمز من رموز المقارنة، والثانية على صورة مختلفة.



خط حدود متصل	خط حدود متصل	خط حدود منقط	خط حدود منقط
التظليل تحت الخط	التظليل فوق الخط	التظليل تحت الخط	التظليل فوق الخط

1-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات أوضح كيف يُمكن للمستقيم $y = 3x - 4$ أن يكون خط حدود.

حلّ بيانياً كل متباينة.

5 $y < -\frac{1}{3}x + 2$

4 $y \geq x - 3$

3 $y \leq 2$

2 $y > -4$

1 انظر المثال

2 حلّ كل متباينة باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.

8 $-4x + 5y < -20$

7 $5x - 2y \leq 20$

6 $3x + 2y > 12$

2 انظر المثال

9 استهلاك ذهبت ميان، ومعها 17 000 دينار، لشراء نوعين من مغلفات القهوة السريعة التحضير.

مغلف النوع الأول حبيباته مجمعة وثمنه 2290 ديناراً ومغلف النوع الثاني حبيباته ناعمة وثمنه 3750 ديناراً.

ارمز بالمجهول x إلى عدد مغلفات النوع الأول، وبالمجهول y إلى عدد مغلفات النوع الثاني.

أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة، وحلّها بيانياً لتحديد عدد المغلفات التي يُمكن لميان أن تشتريها من كل نوع.

ب كم مغلفاً من النوع الأول يُمكنها أن تشتري علماً بأنها اشترت 3 مغلفات من النوع الثاني؟

10 مدارس يقوم طلاب الصف الحادي عشر ببيع نوعين من الأعمال الفنية لجمع مبلغ لا يقل عن

280 000 دينار. يؤمّن العمل الواحد من النوع الأول ربحاً مقداره 1750 ديناراً بينما يؤمّن العمل

الواحد من النوع الثاني ربحاً مقداره 1250 ديناراً. ارمز بالمجهول x إلى عدد أعمال النوع الأول

وبالمجهول y إلى عدد أعمال النوع الثاني.

أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة وحلّها بيانياً لتحديد عدد الأعمال التي ينبغي للطلاب بيعها من كل نوع.

ب باع الطلاب 100 عمل من النوع الثاني و 50 عملاً من النوع الأول. هل حقّق الطلاب هدفهم؟

3 انظر المثال

4 انظر المثال

حلّ كل متباينة بالنسبة إلى y ثم حلّها بيانياً.

13 $3(3x - y) > -12$

12 $-\frac{3}{5}x + y \geq 2$

11 $\frac{1}{2}(6x - 2y) \geq 4$

تمارين وحلّ مسائل

حلّ بيانياً كل متباينة.

16 $y > -\frac{2}{5}x - 3$

15 $y < x + 4$

14 $y \geq 6$

حلّ كل متباينة باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.

18 $3x - 6y < 12$

17 $4x + 2y \geq 8$

تمارين حرة

أنظر	حل
المثال	التمارين
1	16-14
2	18-17
3	21-19
4	24-22

19 تسويق كلفة الإعلان في الصحيفة المحلية 20 000 دينار في اليوم، وكلفته في الإذاعة المحلية 50 000 دينار عن كل دقيقة. كانت الميزانية المخصصة للإعلان في إحدى المؤسسات مليون دينار. ارمز بالمجهول x إلى عدد أيام الإعلان في الصحيفة، وبالمجهول y إلى عدد دقائق الإعلان في الإذاعة. اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، ثم حل المتباينة بيانياً.

20 فلك يحتاج الصاروخ الذي يحمل مسباراً إلى المريخ إلى أوكسجين ليتحرر من نطاق الجاذبية. افترض أن المسبار يولّد 0.78L من الأوكسجين لكل كيلو غرام واحد من الماء، و 0.32L من الأوكسجين لكل كيلو غرام واحد من ثاني أوكسيد الكربون. يحتاج المسبار على الأقلّ إلى 56L من الأوكسجين. ارمز بالمجهول x إلى عدد كيلوغرامات الماء المتوفرة، وبالمجهول y إلى عدد الكيلوغرامات المتوفرة من ثاني أوكسيد الكربون.

أ اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، وحلّ المتباينة بيانياً.

ب جمّع المسبار 36kg من الماء و 88kg من ثاني أوكسيد الكربون. هل يُمكن للرحلة أن تتم؟



21 خلوي يبيع مريون نوعين من بطاقات الهاتف الخلوي، بطاقة بـ 8000 دينار وبطاقة بـ 12 000 دينار. لديه من البطاقات ما قيمته 200 000 دينار. ارمز بـ x إلى عدد بطاقات النوع الأول وبـ y لعدد بطاقات النوع الثاني.

أ اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، ثم حلّ المتباينة بيانياً.

ب باع مريون 10 بطاقات من فئة 8000 دينار، كم بطاقة يمكنه أن يبيع من النوع الآخر؟

حلّ كل متباينة بالنسبة إلى y ، ثم حلّها بيانياً.

$$-4y < 4(3x - 5) \quad 22 \quad -3(-10x + 2y) \geq 24 \quad 23 \quad -\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y \leq -1 \quad 24$$

حلّ بيانياً كل متباينة.

$$-4y > 10x - 20 \quad 25 \quad y - 5 \geq 4(x - 2) \quad 26 \quad 6x + 3y < 0 \quad 27$$

$$y + \frac{3}{4} \leq \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad 28 \quad \frac{9-3y}{2} \geq 6x \quad 29 \quad x \leq 4 \quad 30$$

$$4x - 5y < 7x - 3y \quad 31 \quad 2x - 5y \leq -4x + 15 \quad 32 \quad x > -2 \quad 33$$

34 مدارس يُنظّم نادي الرياضيات في ثانوية الفرات حفلة غنائية لجمع مبلغ لا يقل عن 600 000 دينار لشراء طباعة خاصة بالنادي. قرر رئيس النادي أن يكون ثمن بطاقة الدخول 5000 دينار إذا تم شراؤها قبل يوم الحفلة، و 6000 دينار إذا تم شراؤها عند الباب.

أ ارمز بالمجهول x إلى عدد البطاقات المباعة قبل يوم الحفلة، وبالمجهول y إلى عدد البطاقات المباعة عند الباب. اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، ثم حلّ هذه المتباينة بيانياً.

ب كان عدد البطاقات التي بيعت قبل الحفلة 30 بطاقة. كم بطاقة يجب بيعها عند الباب لكي يبلغ النادي هدفه؟

35 جمع أموال قام طلاب الصف الحادي عشر ببيع فطائر بيتزا وعبوات مرطبات خلال مباراة كرة السلة كي يجمعوا مبلغًا لا يقل عن 150 000 دينار لشراء هدية يقدمونها إلى معلم الرياضيات بمناسبة انتهاء العام الدراسي. يربح الطلاب 1250 دينارًا من بيع كل فطيرة بيتزا و 500 دينار من بيع كل عبوة مرطبات. ارمز بالمجهول x إلى عدد فطائر البيتزا، وبالمجهول y إلى عدد عبوات المرطبات.

أ اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة.

ب باع الطلاب 75 فطيرة بيتزا و 150 عبوة مرطبات. هل سيتمكنون من شراء الهدية؟

36 تفكير ناقد ثمن بطاقة الدخول إلى حديقة الحيوانات 5000 دينار للكبار و 2000 دينار للصغار. زادت قيمة البطاقات المباعة في أحد أيام الأسبوع على 300 000 دينار. كتب كل من دلشاد و كاوه متباينة خطية لتمثيل المسألة وحلّها بيانيًا. رمز دلشاد بالمجهول x إلى عدد بطاقات الكبار، بينما رمز كاوه بالمجهول x إلى عدد بطاقات الصغار. فيمّ اختلف الرسمان البيانيان اللذان أنشئتا من قبل الطالبين؟ هل أخطأ أحدهما؟ إذا أجبت بنعم فمن هو؟

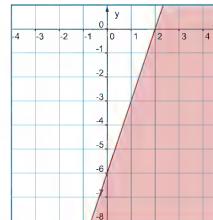
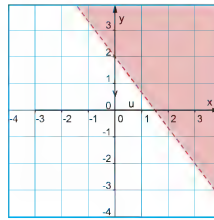
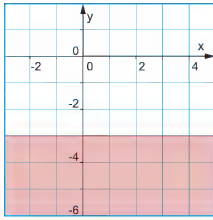
37 كانت إحدى السفن على مسافة 500 ميل بحري من الميناء. انطلقت السفينة نحو الميناء بسرعة لا تزيد على 27 عقدة (أو ميل بحري في الساعة، الميل البحري 1852 مترًا).

أ كم من الزمن يستغرق وصول السفينة إلى الميناء؟

ب أنشئ رسمًا بيانيًا يُظهر تغيير المسافة بين السفينة والميناء بمرور الزمن. ماذا تُمثّل النقاط الواقعة فوق خط الحدود؟

ج ماذا لو...؟ افترض أن سرعة السفينة لم تقل عن 10 عقد خلال الرحلة. كم يكون بعد السفينة عن الميناء بعد 12 ساعة من انطلاقها؟

اكتب متباينة خطية بمجهولين بحيث يُمثل الرسم البياني حلّها.



41 تفكير ناقد قارن بين الحل البياني للمتباينة $30y < 90 + x$ والحل البياني للمتباينة $30y + x < 90$. بمّ يتشابهان وبمّ يختلفان؟

42 اقتصاد منزلي يستعمل دلسوز اللوز والزبيب لتحضير خليط غني بالألياف، يحتوي كل غرام من اللوز على 0.115g من الألياف، وكل غرام من الزبيب على 0.095g منها. يرغب دلسوز في أن يحتوي الخليط على 5g من الألياف على الأقل.



أ ارمز بالمجهول x إلى عدد غرامات اللوز، وبالمجهول y إلى عدد غرامات الزبيب. اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، ثم حلّ المتباينة بيانيًا.

ب) استعمل دلسوز 15g من اللوز. كم غراماً من الزبيب عليه أن يستعمل لكي يُحقق هدفه؟

ج) ماذا لو...؟ افترض أن دلسوز استعمل 60g من اللوز. ماذا ينتج من ذلك حول قيمة y في المتباينة؟ ما معنى ذلك في المسألة المطروحة؟

43 يُنظّم نادي الصداقة حفل العشاء السنوي في قاعة الاحتفالات، بوضع طاولات مستديرة وأخرى مستطيلة. مع إمكانية وضع 8 مقاعد حول كل طاولة مستديرة، و 6 مقاعد حول كل طاولة مستطيلة.

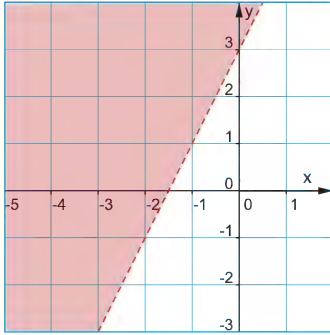
ارمز بالمجهول x إلى عدد الطاولات المستديرة، وبالمجهول y إلى عدد الطاولات المستطيلة.

أ) اكتب متباينة خطية لتمثيل المسألة، إذا كان عدد المقاعد المطلوبة لا يقل عن 220 مقعداً، ثم حلّ هذه المتباينة بيانياً.

ب) تقتضي تدابير السلامة ألا يزيد عدد المقاعد على 300 مقعد. اكتب متباينة لتمثيل هذا الشرط، ثم حلّ المتباينة بيانياً.

ج) قارن بين الرسمين البيانيين. بم يختلفان؟

تحضير للاختبار



44 أي متباينة تتمثل بالرسم البياني المقابل؟

أ) $y < 2x + 3$

ب) $y > 2x + 3$

ج) $4x + 2y > 6$

د) $4x - 2y < -6$

45 أي نقطة لا تنتمي إلى منطقة حلّ المتباينة $5x - 3y < 30$ ؟

أ) $(0, 0)$

ب) $(-5, 3)$

ج) $(3, -5)$

د) $(-3, 5)$

46 أي متباينة تكافئ المتباينة $7x - 3y \geq 4$ (أي إن لهما منطقة الحل نفسها)؟

أ) $y \leq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

ب) $y \leq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

ج) $y \geq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

د) $y \geq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

47 أي نقطتين تمثلان التقاطعين الأفقي والرأسي لخط حدود المتباينة $y \leq 3x - 9$ ؟

أ) $(0, 9)$ و $(3, 0)$

ب) $(0, 3)$ و $(-9, 0)$

ج) $(0, -9)$ و $(3, 0)$

د) $(-3, 0)$ و $(0, 9)$

48 تتيح قطعة نقود الـ 250 ديناراً ركن السيارة 8 دقائق في موقف السيارات، بينما تتيح قطعة الـ 500 ديناراً ركن السيارة 20 دقيقة. المدة القصوى لركن السيارة في الموقف 3 ساعات. عندما ركن شوان سيارته وجد أن عدد المواقف يمنحه 37 دقيقة مجانية. أي قطع نقدية عليه استعمالها لركن سيارته 3 ساعات؟

أ) 3 قطع 250 ديناراً و 9 قطع 500 دينار.

ب) 13 قطعة 250 ديناراً و قطعتا 500 دينار.

ج) 8 قطع 250 ديناراً و 4 قطع 500 دينار.

د) 5 قطع 250 ديناراً و 5 قطع 500 دينار.

49 جواب مختصر صف حالة تتضمن متباينات خطية تكون فيها القيم السالبة للمجهول x أو المجهول y ذات معنى.

تحدّ وتوسّع

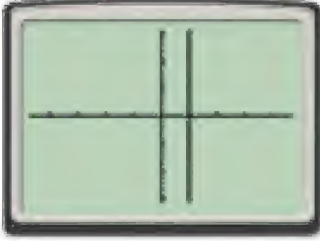
حلّ بيانياً كلّ متباينة.

$$\frac{4+3y-2x}{6} \geq \frac{3x-2-3y}{-4} \quad 51$$

$$4(4x-3y) < 5(2+3x)-10 \quad 50$$

52 ماذا لو... افترض أنّك حين قمت بحل متباينة خطية باستعمال الحاسبة البيانية،

حصلت على شاشة مظلمة بالكامل، علام يدل ذلك حول المتباينة؟ ماذا تفعل لتبيان منطقة الحل؟



53 تُظهر الصورة المقابلة شاشة الحاسبة البيانية بعد إنشاء

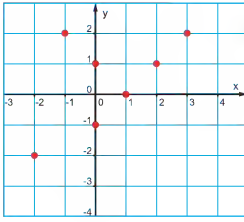
بيان المستقيم $y = 500(x-1)$ باستعمال نافذة Zdecimal.

أ هل المستقيم عمودي حقاً؟ وضّح ذلك.

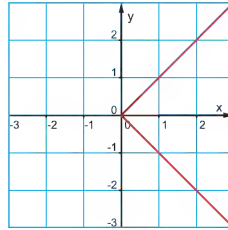
ب أي ناحية من المستقيم تُظلل لكي تحل بيانياً المتباينة $y \leq 500(x-1)$. برّر جوابك.

مراجعة لولبية

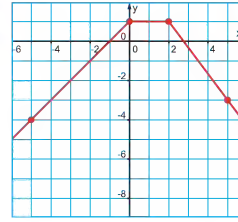
استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرّر إن كان البيان يُمثّل دائرة. (الصفوف السابقة)



56



55



54

اكتب إحداثيي صورة النقطة $(-4, 3)$ بكل من التحويلات التالية:

58 انعكاس حول المحور الثاني.

57 سحب أفقي وحدة واحدة إلى اليسار.

60 $(x+7, y-5)$

59 سحب عمودي 3 وحدات إلى أعلى.

اكتب، على صورة الميل - التقاطع، معادلة المستقيم الذي يمرّ في النقطة $(1, -7)$ والذي:

62 يوازي المستقيم $y = \frac{1}{2}x - 5$

61 يمرّ في النقطة $(1, 3)$

64 يتعامد مع المستقيم $3x - y = -4$

63 يبلغ ميله 0.25



النماذج الخطية

Linear models

2-2

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل عالم الأجناس البشرية النماذج الخطية لتقدير أطوال أفراد الشعوب القديمة، انطلاقاً من الهياكل العظمية التي يجدها.

الأهداف

يجد نموذجاً خطياً لتمثيل معطيات باستعمال التكنولوجيا ومن دون استعمالها. يستعمل النماذج الخطية لإجراء توقعات.

المفردات

Vocabulary

الانحدار

Regression

الارتباط

Correlation

المستقيم الأفضل تمثيلاً

Line of best fit

معامل الارتباط

Correlation coefficient

غالباً ما يهتم العلماء، كعلماء الأجناس البشرية، بالعلاقات التي تربط بين نوعين من القياسات. يُطلق الإحصائيون اسم **الانحدار Regression** على الدراسة الإحصائية للعلاقات بين المتغيرات.

تُستعمل النقاط البيانية **Scatter plot** في محاولة لفهم شكل العلاقة بين متغيرين واتجاهها ومدى قوتها. **الارتباط Correlation** هو قوة العلاقة الخطية بين متغيرين واتجاهها.



إذا ارتبط متغيران بعلاقة خطية قوية، يُمكن استعمال المستقيم الأفضل تمثيلاً

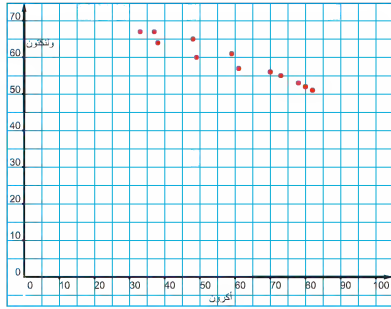
Line of best fit لإجراء توقعات.

تطبيق على الأحوال الجوية

مثال 1

تقع مدينة أكرون في أمريكا ومدينة ولنتون في نيوزيلندا على المسافة نفسها من خط الاستواء: الأولى في النصف الشمالي للكرة الأرضية، والثانية في نصفها الجنوبي. يحتوي الجدول أدناه على متوسطات درجات الحرارة في كل من المدينتين خلال 12 شهراً. أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول. ابحث عن الارتباط بين مجموعتي المعطيات. أنشئ المستقيم الأفضل تمثيلاً وجد معادلته.

متوسطات الدرجات العليا للحرارة (على سلم فهرنهايت)											
الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
أكرون	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49
ولنتون	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64



الخطوة 1 مثل معطيات الجدول بنقاط بيانية.

الخطوة 2 ابحث عن الارتباط .

لاحظ وجود ترابط سالب بين مجموعتي المعطيات: عندما ترتفع درجة الحرارة في أكرن، تنخفض في ولنكتون.

الخطوة 3 أنشئ المستقيم الأفضل تمثيلاً.

ارسم مستقيماً يقسم النقاط بالتساوي فوقه وتحت.

الخطوة 4 جد نقطتين تقعان على هذا المستقيم.

يمكنك اختيار النقطتين (25, 70) و (90, 50).

الخطوة 5 جد ميل المستقيم.

$$m = \frac{70-50}{25-90} = \frac{20}{-65} \approx -0.31$$

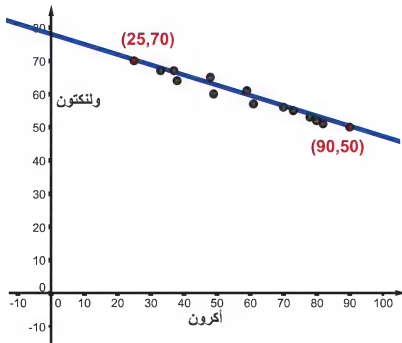
استعمل صورة الميل - النقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 70 = -0.31(x - 25)$$

$$y = -0.31x + 77.7$$

معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي $y = -0.31x + 77.7$.



إضاءة

حاول أن يكون عدد النقاط فوق المستقيم الأفضل تمثيلاً مساوياً لعددها تحت هذا المستقيم.

1. كرة سلة أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول. ابحث عن الترابط بين مجموعتي المعطيات، أنشئ المستقيم الأكثر تمثيلاً وجد معادلته.



نتائج عشر مباريات									
30	15	27	19	23	39	20	8	35	28
19	4	15	9	10	31	12	2	13	16
المدة (m)									
النقاط									

معامل الارتباط Correlation coefficient هو عدد r يقيس مدى دقة تمثيل نموذج خطي لمجموعة معطيات.

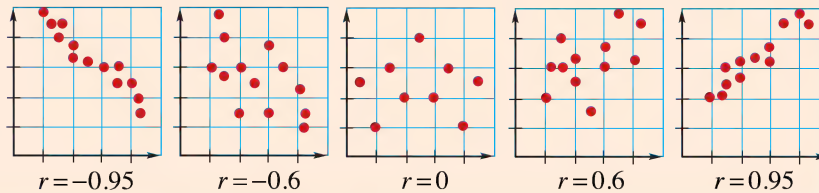
خصائص معامل الترابط

معامل الارتباط عدد ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$ أي إنه يُحقَّق $-1 \leq r \leq 1$.

إذا كان $r = 1$ ، فإن النقاط البيانية التي تمثل مجموعة المعطيات تشكّل مستقيماً موجب الميل.

إذا كان $r = 0$ ، فلا ترابط بين المتغيرين.

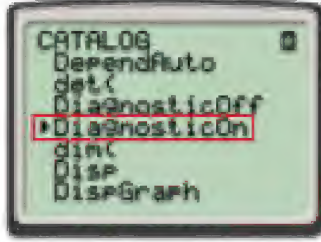
إذا كان $r = -1$ ، فإن النقاط البيانية التي تمثل مجموعة المعطيات تشكّل مستقيماً سالب الميل.



انتبه!

لا تخلط بين الميل وقيمة r .
يمكن لميل المستقيم أن يكون 10 أو $\frac{1}{10}$ وأن يكون $r = 1$. غير أن للميل وقيمة r الإشارة نفسها.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً وإيجاد معامل الارتباط. لكي تحصل على معامل الارتباط، عليك أن تضع الحاسبة في



وضعية التشخيص. للوصول إلى هذه الوضعية، اضغط **2nd** ثم **DiagnosticOn** واختر **CATALOG**

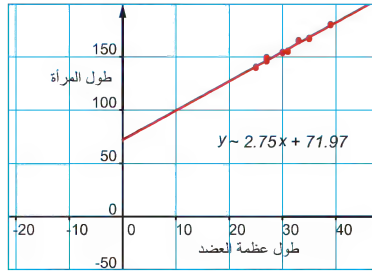


تطبيق على علم الأجناس البشرية

مثال 2

يستعمل عالم الأجناس البشرية طول عظم العضد، الذي يصل الكتف بالمرفق أو الكوع، لدى المرأة ليقدر طولها. يُظهر الجدول أدناه بعض الأمثلة.

طول عظم العضد لدى المرأة							
31	27	39	25	33	30	27	35
155	149	180	140	165	154	146	167
طول عظم العضد (cm)							
طول المرأة (cm)							



أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً طول عظم العضد كمتغير حر. يُبين الشكل المقابل النقاط البيانية التي تمثل معطيات الجدول.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. علام يدل ميل هذا المستقيم وفق معطيات المسألة؟

استعمل حاسبة بيانية وأدخل معطيات طول عظم العضد في اللائحة L1، ثم معطيات طول المرأة في اللائحة L2.

استعمل خاصية الانحدار الخطي في الحاسبة

بالضغط على **STAT** والانتقال إلى **CALC**

ثم اختيار **4:LinReg**. سوف تُعطيك الحاسبة

المعادلة $y = 2.75x + 71.97$. ميل المستقيم الأفضل

تمثيلاً هو 2.75 تقريباً. يدل هذا الميل على التالي:

كل زيادة قدرها 1cm من طول عظمة العضد يقابلها 2.75cm في طول المرأة. تُعطيك الحاسبة أيضاً معامل الارتباط، وهو $r = 0.991$ تقريباً، مما يدل على ترابط موجب قوي.

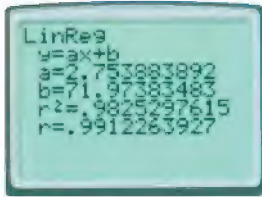
ج في إحدى المقابر الجماعية للأكراد المؤنفلين العراقيين وجد عالم الأجناس البشرية عظم عضد طوله 32cm. كم تُقدر طول صاحبه؟ تسمح معادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً بتقدير طول صاحبة العظم.

$$y = 2.75x + 71.97$$

$$y = 2.75 \times 32 + 71.97$$

$$y = 159.97$$

طول تلك المرأة هو 160cm تقريباً.



إضاءة

لإدخال المعطيات في الحاسبة البيانية، اضغط على المفتاح Stat واختر Edit: 1. أدخل قيم x في العمود L1 وقيم y في العمود L2.

2. في الجدول معطيات عن سيارات مختارة عشوائياً، تعمل على الغاز. يُبين الجدول قوّة كل سيارة (بالأحصنة) والمسافة التي تجتازها بكل لتر من الغاز.



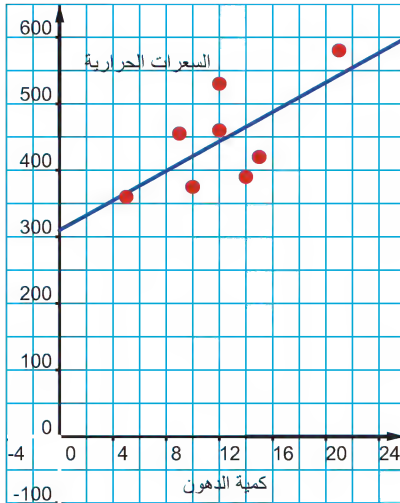
قوة السيارات وما تقطعه بكل لتر									
125	110	180	190	120	115	165	140	255	175
4.92	5.75	3.45	2.46	4.6	5.25	2.95	4.1	2.13	3.61
المسافة بكل لتر (km/l)									

- أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الاستهلاك كمتغير حر.
- ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. علام يدل هذا المستقيم؟
- ج سيارة قوّة محركها 210 أحصنة، قدر ما تجتازه بكل لتر.

مثال 3 تطبيق غذائي

يُظهر الجدول أدناه معطيات عن كمية الدهون في نوع من الشطائر وقيمتها الحرارية.

معطيات غذائية لبعض أنواع الشطائر								
14	21	10	12	15	12	9	5	كمية الدهون (g)
390	580	375	530	420	460	455	360	القيمة الحرارية (بالسعرات)



أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً كمية الدهون كمتغير حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم. معامل الارتباط هو $r = 0.682$ تقريباً. معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي: $y = 11.1x + 309.8$ المتغير التابع هو عدد السعرات الحرارية.

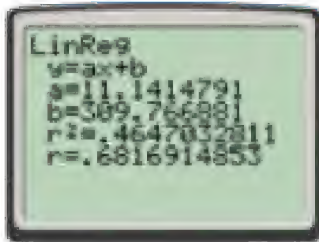
ج قدر كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 500 سعرة. ما دقة تقديرك؟

$$500 = 11.1x + 309.8$$

$$11.1x = 190.2$$

$$x \approx 17.1$$

يُفيدنا المستقيم الأفضل تمثيلاً بأن كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 500 سعرة حرارية هي 17.1g تقريباً. غير أن النقاط البيانية وقيمة معامل الارتباط تبيّنان أن كمية الدهون ليست مؤشراً جيداً على عدد السعرات الحرارية في هذا النوع من الشطائر.



3. ماذا لو...؟ استعمل معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لتقدير كمية الدهون في شطيرة قيمتها الحرارية 420 سعرة. كم تبعد القيمة التي حصلت عليها عن القيمة التي تُقابل 420 سعرة في الجدول؟



فكر وناقش

1. أوضح إن كان معامل الارتباط بين متغيرين موجباً أو سالباً، علماً بأن معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً هي $y = 3.2x - 12.5$.
2. أوضح التالي: أي من معاملي الارتباط $r = 0.65$ ؛ $r = -0.75$ يدل على ارتباط أقوى بين متغيرين؟ برّر جوابك.
3. كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. أنشئ نقاطاً بيانية لكل نوع من الارتباط وقدر قيمة معامل الارتباط r .

الارتباط	النقاط البيانية	القيمة المقدرة لمعامل الارتباط
قوي موجب		
ضعيف موجب		
لا وجود له		
ضعيف سالب		
قوي سالب		

اعلم
احفظ

2-2 التمارين

تمارين موجّهة

- 1 مفردات أوضح دلالة كل معامل ارتباط بين مجموعتي معطيات.
 أ $r = 0.4$ ب $r = -0.96$ ج $r = -0.02$
- 2 سيارات أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً عدد الغالونات كمتغير حر. صف الارتباط بين المتغيرين.

المسافة المقطوعة							
عدد الغالونات	10.1	8.7	12.3	10.1	10.6	9.8	11.2
المسافة المقطوعة (km)	305	263	368	324	332	296	338

- 3 اقتصاد منزلي يبيّن الجدول أدناه معطيات عن متوسط درجة الحرارة خلال سبعة أشهر، وعن قيمة فاتورة التبريد في منزل جواد.

فاتورة التبريد في منزل جواد							
متوسط درجة الحرارة	38	49	42	36	44	42	38
الفاتورة	86 000	67 000	74 000	83 000	75 000	79 000	93 000

- أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً متوسط درجة الحرارة كمتغير حر.
- ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.
- ج قدر فاتورة التبريد لشهر متوسط درجة الحرارة فيه 40 درجة. ما دقة هذا التقدير؟

3 انظر المثال

4 **مدارس** يُبيّن الجدول معطيات عن عدد المعلمين وعدد الطلاب في عيّنة عشوائية من المدارس.

عدد المعلمين وعدد الطلاب							
84	76	62	110	49	114	52	92
910	496	813	1312	381	753	653	1050
عدد المعلمين				عدد الطلاب			

أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً عدد المعلمين كمتغيّر حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر عدد المعلمين في مدرسة تضم 600 طالب. ما دقة هذا التقدير؟

تمارين وحلّ مسائل

5 **كيمياء** أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول أدناه مستعملاً العدد الذري كمتغيّر حر. صف الارتباط بين المتغيّرين.

بعض العناصر الكيميائية													
35	5	107	83	4	97	56	85	33	18	51	95	13	89
80	11	264	209	9	247	137	210	75	40	122	243	27	227
العدد الذري													
الكتلة الذرية													

تمارين حرة

لحل	أنظر
التمارين	المثال
1	5
2	6
3	7



6 **أحياء** يزيد معدّل ضربات الجناح عند الطائر الطنّان على معدّلها عند غيره من الطيور. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن هذه المعدلات وعن الكتل عند عدد من طيور هذا النوع.

ضربات جناح الطائر الطنّان							
4.5	1.9	3.7	4.0	3.2	2.0	3.1	الكتلة (g)
40	90	55	45	50	85	60	معدل الضربات (بالثانية)

أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الكتلة كمتغيّر حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر معدل ضربات طير من هذا النوع كتلته 19g. ما دقة هذا التقدير؟

7 **تسعير البطاقات** دوّن مدير إحدى الفرق الموسيقية أسعار بطاقات الدخول إلى حفلات الفرق وعدد الحضور.

الحضور وفقاً لأسعار بطاقات الدخول									
8000	7500	7000	5500	10000	8000	8500	5000	6000	السعر
235	210	258	267	160	194	155	256	213	الحضور

أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً السعر كمتغيّر حر.

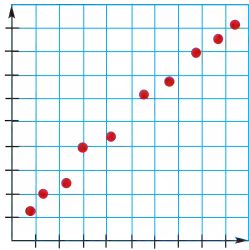
ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر عدد الحضور في حفل ثمن بطاقة الدخول إليه 9000 دينار. ما دقة التقدير؟

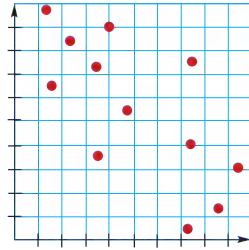
x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

8 أنشئ نقاطاً بيانية تمثل معطيات الجدول. قدر معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً.

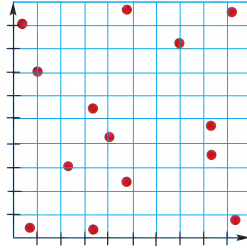
تقدير قدر معامل الارتباط في كل حالة.



11



10



9

12 طيران يُبين الجدول أدناه طول عدد من الطائرات وعرض جناحيها. أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الطول كمتغير حر. ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً وجد معادلته.

737	Super 80	757	767	A300	777
113m	108m	124m	147m	156m	200m
130m	148m	155m	178m	180m	209m

علامات الأوائل في الرياضيات			
العلامة	المركز	العلامة	المركز
90	6	95	1
89	7	93	2
87	8	92	3
86	9	91	4
85	10	90	5

13 يُبين الجدول المقابل علامات الطلاب العشرة الأوائل في امتحان الرياضيات.

أ أي معادلة تستعمل لإيجاد العلامة بمعرفة المركز؟

ب افترض أن معلم الرياضيات أضاف 5 علامات إلى

كل علامة. ما تأثير ذلك على المعادلة وعلى بيانها؟

14 رياضة يُبين الجدول أدناه معطيات عن سرعة بعض العدائين وعدد خطواتهم في الثانية.

عدد الخطوات في الثانية والسرعة							
22.11	21.06	19.97	18.62	17.5	16.88	15.86	السرعة (قدم بالثانية)
3.55	3.46	3.36	3.25	3.17	3.12	3.05	عدد الخطوات بالثانية

أ أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً السرعة كمتغير حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً ثم ارسمه.

ج استعمل معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لإيجاد عدد الخطوات بالثانية لعداء سرعته 18 قدماً بالثانية. ما دقة هذا التقدير؟ أوضح ذلك.



15 **إحاثة** يتضمن الجدول طول عظم الفخذ وطول عظم العضد لخمس عينات متحجرة من أركيوتريكس، وهو حيوان منقرض له مظهر الزواحف وخصائصها، ويعتبره بعض العلماء من الحلقات الأولى التي نشأت عنها الطيور.

أطوال عظم الفخذ وعظم العضد					
74	64	59	56	38	طول عظم الفخذ (cm)
84	72	70	63	41	طول عظم العضد (cm)

- أ** أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً طول عظم الفخذ كمتغير حر. جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.
- ب** علام يدل ميل هذا المستقيم بخصوص الحيوان؟
- ج** استعمل المعادلة التي وجدتها لتقدير طول عظم الفخذ لحيوان من هذا النوع، طول عظم عضده 50cm . ما دقة هذا التقدير؟

- 16** **تفكير ناقد** هل يعني وجود ترابط قوي بين متغيرين أن قيم أحدهما تُحدّد قيم الآخر؟ (مثلاً: هل يتسبّب تزايد لسعات النحل في زيادة مبيع المثلجات؟) أوضح ذلك.
- 17** **اكتب** اشرح بالتفصيل عملية إيجاد المستقيم الأفضل تمثيلاً.

تحضير للاختبار

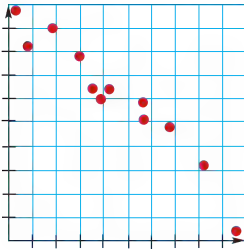
- 18** معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لمجموعة معطيات هي $y = 1.05x - 1.3$. أي مما يلي يُمكن أن يكون معامل الارتباط r ؟

(د) $r = 1.05$

(ج) $r = 0.8$

(ب) $r = -0.7$

(أ) $r = -1.3$



- 19** أي مما يلي يصف الترابط الذي تبيّنه النقاط البيانية المقابلة؟

(ج) قوي سالب

(أ) قوي موجب

(د) ضعيف سالب

(ب) ضعيف موجب

- 20** أي من العلاقات التالية يُمكن أن يكون لها معامل ارتباط ضعيف بخصوص سيارة؟

(أ) عمر السيارة وعدد الكيلومترات التي قطعتها.

(ب) عمر السيارة وسعرها عند بيعها مستعملة.

(ج) طول السيارة وعرضها؟

(د) عدد الكيلومترات التي قطعتها داخل المدن وعدد الكيلومترات على الطرق السريعة.

تحدّ وتوسّع

هل يُمثل الجدول معطيات تترابط بعلاقة خطيّة؟ معطيات مترابطة؟ أوضّح ذلك.

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

22

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

21

23 يُبيّن الجدولان أدناه معطيات كتبها أحد الإحصائيين. أنشئ لكل جدول نقاطاً بيانية تمثّله ووجد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ما الذي يعطي أهمية لتمثيل المعطيات بيانياً قبل استعمال النموذج الخطي لإجراء توقّعات؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

مراجعة لولبية

اكتب كل مقدار على أبسط صورة. (الصفوف السابقة)

$$-a^4 + 3ab + (2a^2)^2 \quad 25$$

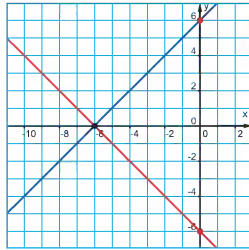
$$3(x^2 - 2) + 4xy - 10x^2y + 5x^2 \quad 24$$

$$n(4t^2 - t) - 10mt^2 + nt \quad 27$$

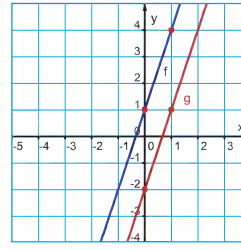
$$-3g^2 + 3(g - 4) - 2(g - g^2) \quad 26$$

اكتب معادلة كل دالة ممثلة بيانياً. ما التحويل التي يُحوّل $f(x)$ إلى $g(x)$ ؟

(الصفوف السابقة)



29



28

حلّ كل متباينة بيانياً. (الصفوف السابقة)

$$-2(q - 4) + 3q \leq 1 + q \quad 32$$

$$44 + 6x > -5x \quad 31$$

$$3x < x - 12 \quad 30$$



أنظمة المتباينات الخطية

System of Linear Inequalities

3-2

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مستكشفو القطب الجنوبي أنظمة المتباينات الخطية لتحديد السرعة التي عليهم التقدم بها لتلاّ يواجهوا الأحوال المناخية المزعجة (المثال 2).

الأهداف

يحل بيانياً أنظمة متباينات خطية.

المفردات

Vocabulary

نظام المتباينات الخطية
System of linear inequalities

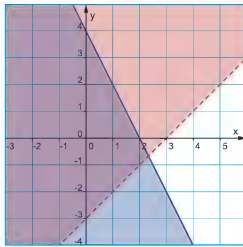
عندما يُستعمل في مسألة تعبير مثل «أكبر من» أو «لا يزيد على» فيمكنك تمثيل الحالة باستعمال متباينة أو نظام متباينات خطية.

نظام المتباينات الخطية System of linear inequalities هو مجموعة من متباينتين خطيتين أو أكثر، تتناول المجاهيل نفسها. غالباً ما تتألف مجموعة الحل لنظام متباينات خطية من عدد غير محدود من النقاط يُمكن تمثيلها بيانياً بتظليل منطقة في المستوى البياني. عندما تمثل بيانياً كلاً من متباينات النظام، في المستوى الإحداثي نفسه، تتقاطع المناطق المظللة لتشكل منطقة مشتركة بينها كلها. منطقة الحل للنظام هي هذه المنطقة المشتركة.

حل نظام متباينات خطية بيانياً

حلّ بيانياً نظام المتباينتين الخطيتين.

$$\begin{cases} y \leq -2x + 4 \\ y > x - 3 \end{cases}$$



في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y = -2x + 4$ بخط متصل، وظلّ المنطقة تحته. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $y = x - 3$ بخط منقطع، وظلّ المنطقة فوقه. تقاطع المنطقتين المظللتين هو منطقة الحل لنظام المتباينتين الخطيتين.

تحقق: اختر نقطة من نقاط كل منطقة على المستوى الإحداثي.

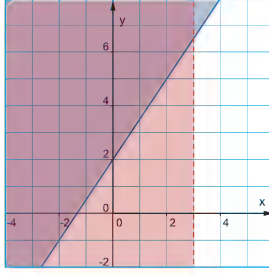
المنطقة	النقطة	$y \leq -2x + 4$	$y > x - 4$
إلى اليسار	(0,0)	$0 \leq -2(0) + 4$ $0 \leq 4$ ✓	$0 > 0 - 3$ $0 > -3$ ✓
إلى اليمين	(4,0)	$0 \leq -2(4) + 4$ $0 \leq -4$ ✗	$0 > 4 - 3$ $0 > 1$ ✗
إلى الأعلى	(2,2)	$2 \leq -2(2) + 4$ $2 \leq 0$ ✗	$2 > 2 - 3$ $2 > -1$ ✓
إلى الأسفل	(2,-2)	$-2 \leq -2(2) + 4$ $-2 \leq 0$ ✓	$-2 > 2 - 3$ $-2 > -1$ ✗

النقطة الأولى كانت النقطة الوحيدة بين هذه النقاط التي شكل إحداثياتها حلاً لنظام المتباينتين.

مثال 1

مساعدة

إذا كنت حائراً في تحديد نصف المستوى الذي ستظلّه، استعمل النقطة (0,0) كنقطة اختبار.



حلّ بيانياً نظام المتباينتين الخطيتين.

$$\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad \text{ب}$$

في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y = \frac{3}{2}x + 2$ بخط متصل وظلّ المنطقة الواقعة فوقه. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $x = 3$ بخط منقط وظلّ المنطقة الواقعة إلى يساره. تقاطع المنطقتين المظللتين هو منطقة الحل لنظام المتباينتين الخطيتين.

$$x < 3 \quad y \geq \frac{3}{2}x + 2$$

$$-4 < 3 \quad \checkmark \quad 0 \geq \frac{3}{2}(-4) + 2$$

$$0 \geq -4 \quad \checkmark$$

تحقق: اختر نقطة من نقاط منطقة التقاطع، مثلاً $(-4, 0)$ واختبر إن كان إحداثيها يشكّلان حلاً للنظام.

بما أن النقطة تنتمي إلى منطقة حلّ نظام المتباينتين، فإنّ منطقة التقاطع هي منطقة الحل.

1. حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية.

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases} \quad \text{ب}$$

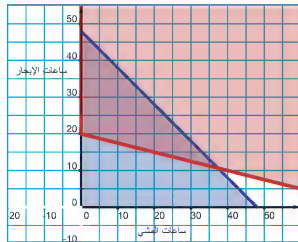
$$\begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases} \quad \text{أ}$$



تطبيق على حملات الاستكشاف

مثال 2

كانت حملة استكشاف القطب على بعد 240 km من قاعدتها. أعلنت مصلحة الأرصاد أن عاصفة ثلجية ستهبّ خلال 48 ساعة. على الحملة أن تتحرك بسرعة بركوب باخرة كاسحة جليد ثم بالسير على الأقدام، لبلوغ القاعدة. سرعة الباطنة القصوى 12 km/h. أما السرعة القصوى في المشي وجر التجهيزات فلا تتعدى 3 km/h. اكتب نظام متباينات خطية وحله بيانياً لتحديد فترة ركوب الباطنة وفترة السير على الأقدام قبل بلوغ القاعدة.



استعمل x لعدد ساعات المشي، و y لعدد ساعات ركوب الباطنة. ينبغي أن يكون مجموع المجهولين أقل من 48 ساعة، مما يُعطي المتباينة $x + y \leq 48$. من ناحية أخرى، يجب ألا تقل المسافة التي تقطعها الحملة عن 240 km، مما يُعطي المتباينة الثانية $3x + 12y \geq 240$.

$$\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases} \quad \text{نظام المتباينتين الخطيتين هو}$$

ارسم المستقيم $3x + 12y = 240$ بخط متّصل وظلّ المنطقة الواقعة فوقه، ثم ارسم المستقيم $x + y = 48$ ، وظلّ المنطقة الواقعة تحته. منطقة الحل للنظام هي منطقة تقاطع التظليلين.

تحقق: اختر النقطة $(15, 25)$ في منطقة التقاطع. يُشكّل إحداثيًا هذه النقطة حلاً لكل من المتباينتين وللنظام بالتالي.

$$\begin{aligned} 3x + 12y &\geq 240 & x + y &\leq 48 \\ 3(15) + 12(25) &\geq 240 & 15 + 25 &\leq 48 \\ 345 &\geq 240 \quad \checkmark & 40 &\leq 48 \quad \checkmark \end{aligned}$$



2. تباع سولاف شطائر لحم وشطائر دجاج. لديها 40 رغيفاً، أي إنها لا تستطيع أن تباع أكثر من 40 شطيرة من النوعين معاً. يؤمّن لها بيع شطيرة اللحم ربحاً قدره 2 000 دينار، وبيع شطيرة الدجاج ربحاً قدره 2 500 دينار وهي تريد أن تربح 90 000 دينار. اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل المسألة، ثم حلّها بيانياً.

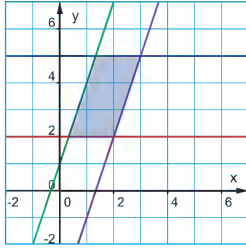


يُمكن لنظام المتباينات الخطية أن يتضمّن أكثر من متباينتين.

تطبيق هندسي

مثال 3

حلّ بيانياً نظام المتباينات الخطية، وحدّد طبيعة منطقة الحل.



$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq 2 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \geq 3x - 4 \end{cases}$$

ارسم بخط متصل المستقيم $y = 5$ والمستقيم $y = 3x + 1$. وظلّ المنطقة التي تقع تحت كل منهما.

ارسم بخط متصل المستقيم $y = 2$ والمستقيم $y = 3x - 4$. وظلّ المنطقة فوق كل منهما. منطقة الحل للنظام هي منطقة التقاطع.

منطقة الحل شكل رباعي. لاحظ أيضاً أن المستقيمين $y = 5$ و $y = 2$ متوازيان لأنهما مستقيمان أفقيان؛ وأن المستقيمين $y = 3x + 1$ و $y = 3x - 4$ متوازيان لأن لهما الميل نفسه.

منطقة الحل رباعي يوازي كل ضلع فيه الضلع المقابل. إنه متوازي أضلاع.

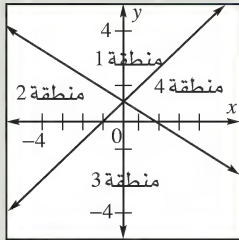
3. حلّ بيانياً نظام المتباينات الخطية، وحدّد طبيعة منطقة الحل.



$$\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x + 8 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases} \quad \text{ب} \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq -2x + 4 \end{cases} \quad \text{أ}$$

فكر وناقش

1. أوضح كيف تحدّد منطقة الحل لنظام متباينات خطية.
2. ما العدد الأدنى لمتباينات نظام حتى تكون منطقة حلّه مثلثاً؟ مربعاً؟ أعط أمثلة تدعم جوابك.



3. كن منظماً. انسخ المخطط وأكمّله بأن تكتب لكل منطقة في المستوي الإحداثي، نظام متباينات خطية تكون منطقة حلّه تلك المنطقة.



3-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات قارن بين نظام متباينات خطية ونظام معادلات خطية.

1 انظر المثال

حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية.

$$\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x < y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ x-y < -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$$

2 انظر المثال

6 جمع تبرعات تجمع إحدى الجمعيات الخيرية تبرّعات ببيع قمصان قطنية. ثمن القميص للكبار 15 000 دينار وللصغار 10 000 دينار. عدد القمصان 250 قميصاً من النوعين. وتأمل الجمعية تحصيل مبلغ 3 ملايين دينار على الأقل. اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل الحالة، ثم حلّه بيانياً لتحديد عدد القمصان التي ينبغي بيعها من كل نوع.

3 انظر المثال

حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية وحدّد طبيعة منطقة حلّه.

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$$

تمارين وحلّ مسائل

حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية.

$$\begin{cases} y > 4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y > 5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-y > 0 \\ y < x \end{cases}$$

15 موسيقى تعتزم شركة إنتاج نسخ 10 000 نسخة من قرص مدمج لمجموعة أغنيات. خصّص عدد من الأقراص لتوزيعها مجاناً على محطات الإذاعة والتلفزيون، وعدد آخر للبيع. لا يتجاوز عدد الأقراص المجانية نسبة 20% من المجموع الكلي. اكتب نظام متباينات خطية يمثل الحالة، ويحدّد الأعداد الممكنة للأقراص المجانية والأقراص المعدة للبيع.

تمارين حرة	
لحل	انظر
التمارين	المثال
14 - 11	1
15	2
19 - 16	3

حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية وحدّد طبيعة منطقة حلّه.

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$$

20 هاتف بلغ عدد مكالمات هزار الهاتفية للشهر الماضي 2370 مكالمات، منها 1645 تلقاها من آخرين. بينما كان عدد مكالمات هوزان أقلّ من عدد مكالمات هزار؛ لكن كان عدد المكالمات التي تلقاها هوزان أكثر من عدد المكالمات التي تلقاها هزار. اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل الحالة، ثم حلّ النظام لتحديد العدد الممكن للمكالمات التي تلقاها هوزان وعدد المكالمات التي أجراها.

هندسة اكتب نظام متباينات خطية تتخذ منطقة حلّه شكل:

21 مستطيل 22 مربع 23 مثلث قائم 24 شبه منحرف

25 تخضع سيارات السباق لشروط معينة، من حيث الحجم والكتلة، وفقاً لتصنيفها. ينبغي ألا تقل كتلة سيارة سباق الفورمولا 1 عن 600 kg بما فيها كتلة السائق، في حين أن سيارة السباقات الأخرى، ينبغي ألا تقل كتلتها عن 710 kg من دون السائق.

- أ اكتب نظام متباينات خطية يُستعمل لمقارنة الكتل الممكنة للسيّارتين من دون السائق.
 ب حدّد مجالاً ومدى معقولين للنظام.
 ج حلّ النظام بيانياً.

نسب ضريبة الدخل وفق الشطور	
الدخل (بملايين الدنانير)	النسبة
من 14 000 إلى 56.800	15%
من 56.801 إلى 114.650	25%
من 114.651 إلى 174.700	28%

26 **ضريبة الدخل** يُبين الجدول المقابل نسب الضريبة على الدخل وفقاً لقيمة دخل العائلة. كانت نسبة الضريبة لدخل سرجون وزوجته 25% وكان دخل الزوجة يزيد على دخل الزوج بما لا يقل عن مليوني دينار. اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل المسألة، ثم حلّ النظام بيانياً.

حلّ بيانياً كل نظام متباينات خطية، وحدّد ثلاث نقاط تقع في منطقة الحل.

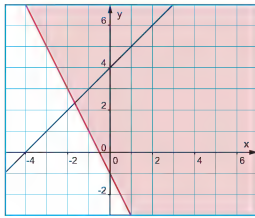
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$$

31 **تفكير ناقد** إذا كان المستقيمان اللذان يحددان منطقة الحل لنظام متباينتين متوازيين، فما هي منطقة الحل الممكنة؟

32 **اكتب** هل يمكن ألا يكون لنظام من متباينتين خطيتين حلول؟ أوضح ذلك.

تحضير للاختبار

33 أي من أنظمة المتباينات الخطية يتمثل حلّه البياني بالشكل المقابل؟



$$\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases}$$

34 تبلغ كلفة إنتاج كمية من السلع 300 000 دينار يُضاف إليها 1250 ديناراً عن كل سلعة تُنتج. تباع الشركة هذه السلع بسعر لا يتجاوز 2500 دينار للسلعة الواحدة. أي من أنظمة المتباينات الخطية أدناه يُمكن أن تُستعمل منطقة حلّه لتمثيل الربح الممكن للشركة؟ (يرمز المجهول c إلى الكلفة الكلية، والمجهول n إلى عدد الوحدات المنتجة).

$$\begin{cases} c \leq 2500n \\ c \geq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \begin{cases} c \leq 300000n \\ c \leq 300000 + 1250n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 2500n \\ c \geq 300000 + 1250n \end{cases} \quad \begin{cases} c \geq 2500n \\ c \leq 300000 + 1250n \end{cases}$$

35 أي من الجداول أدناه يتضمن حلولاً للنظام ؟ $\begin{cases} 3x-12y>8 \\ x+5y>-5 \end{cases}$

د

x	y
1	-2
2	-2
3	-1
4	-1

ج

x	y
1	-1
2	-1
3	0
4	0

ب

x	y
1	-2
2	1
3	1
4	-2

أ

x	y
1	-2
2	0
3	0
4	-2

تحدّ وتوسّع

36 اكتب نظام متباينات خطية بحيث تكون منطقة حلّه خماسياً.

37 هل هناك قيمة للمجهول m تجعل نظام المتباينات الخطية $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$ من دون حلول؟ إذا كان الجواب نعم، أعطِ هذه القيمة. وإذا لا، أوضح السبب.

38 يريد سردار توظيف 30 مليون دينار في سوق الأوراق المالية. عرض المصرف عليه نوعين من التوظيفات. الأول قليل المخاطر ويحقق أرباحاً بنسبة 5% سنوياً، والثاني عالي المخاطر ويحقق أرباحاً بنسبة 7% سنوياً. ما الحد الأدنى للمبلغ الذي عليه توظيفه بنسبة أرباح 7% لئلا تقل أرباحه عن 1900 000 دينار سنوياً؟

مراجعة لولبية

أعطِ معكوس كل عدد ومقلوبه. (الصفوف السابقة)

42 -1

41 2.48

40 $-\frac{3}{4}$

39 7

اكتب معادلة للمستقيم: (الصفوف السابقة)

43 الذي يمر في النقطتين $(2, -7)$ و $(1, 1)$ 44 المار في النقطة $(3, -3)$ وميله 0

45 الذي يمر في النقطتين $(1, -1)$ و $(0, 0)$ 46 المار في النقطة $(9, 6)$ وميله $-\frac{1}{3}$

47 المار في النقطة $(-2, 4.5)$ والمتعامد مع المستقيم $y=4x-1$

48 المار في النقطة $(3, 2)$ والموازي للمستقيم $y=-x-7$



البرمجة الخطية

Linear Programming

4-2

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مهندسو الحدائق البرمجة الخطية لتحديد النباتات التي سيزرعونها على السطوح الخضراء.

الهدف

يجل مسائل برمجة خطية.

المفردات

Vocabulary

البرمجة الخطية

Linear programming

الشرط

Constraint

منطقة الجدوى

Feasible Region

دالة المنفعة

Objective Function

السطوح الخضراء سطوح مغطاة بالنباتات عوضاً عن المواد الأخرى، مثل الإسمنت أو القرميد، للمساعدة على تخفيض الحرارة وتحسين نوعية الهواء.

تتأثر خيارات مهندسي الحدائق بأسعار النباتات وكمية الماء التي تلزمها، وكمية ثاني أكسيد الكربون التي تمتصها.

البرمجة الخطية Linear programming طريقة لتحديد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالة تخضع لعدد من القيود تسمى شروط المسألة. **الشرط Constraint** هو إحدى المتباينات في مسألة برمجة خطية.

يُمكن تمثيل مجموعة الحلول التي تُحقق جميع الشروط بيانياً، مما يُنتج منطقة في المستوي الإحداثي تسمى **منطقة الجدوى Feasible Region**.

تمثيل منطقة الجدوى بيانياً

مثال 1

يُخطّط سيروان لهندسة حديقة لا تزيد مساحتها على 600m^2 مستخدماً نوعين من النباتات. تُغطّي نبتة النوع الأول مساحة 1.2m^2 ، بينما تُغطّي نبتة النوع الثاني مساحة 2m^2 . يبلغ ثمن كل نبتة من النوعين 2500 دينار. يجب ألا تتعدى كلفة النباتات مليون دينار. اكتب الشروط ومثل بيانياً منطقة الجدوى.

ارمز بالمتغير x إلى عدد النباتات من النوع الأول، وبالمتغير y إلى عددها من النوع الثاني. اكتب الشروط.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

عدد النباتات لا يمكن أن يكون سالباً.
المساحة المغطاة لا تزيد على 600m^2 .
كلفة النباتات لا تزيد على 100 000 دينار

حلّ بيانياً كلاً من شروط المسألة، وظلّل المنطقة التي تُشكّل تقاطع مختلف مناطق الحل. منطقة



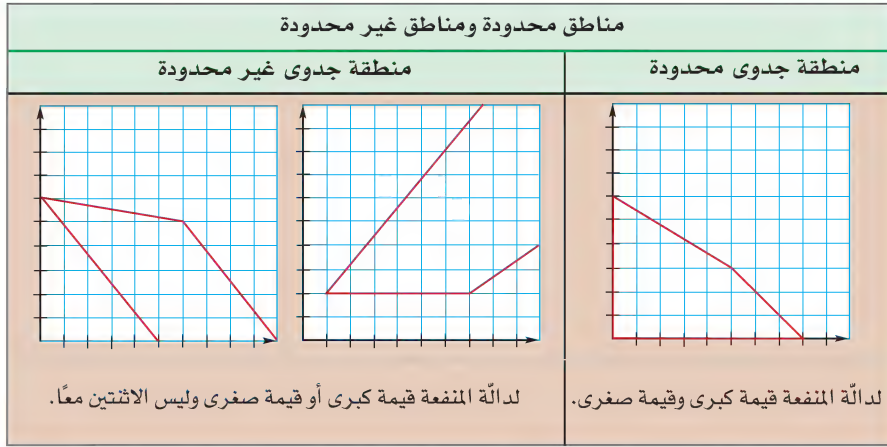
الجدوى هي المنطقة التي حصلت عليها. إنها الرباعي الذي رؤوسه $(0,0)$ ، $(400,0)$ ، $(250,150)$ ، $(0,300)$.

تحقق: إذا اخترت نقطة مثل النقطة $(100,100)$ فسوف تجد أن إحداثييهما يُحقّقان جميع الشروط. ✓

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$



عندما تحل مسألة برمجة خطية، لا تكتفي عادة بتمثيل منطقة الجدوى في المستوى الإحداثي. عليك، في أغلب الأحيان، أن تجد قيمة المتغيرات التي تجعل دالة بدلالة هذه المتغيرات تبلغ قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى. تُسمى مثل هذه الدالة **دالة المنفعة Objective Function**. تبعاً لمنطقة الجدوى، يُمكن أن يكون لدالة المنفعة قيمة كبرى أو قيمة صغرى أو الاثنان معاً، أو لا هذه ولا تلك.



يمكن، بمساعدة رياضيات متقدمة، إثبات التالي:

مبدأ الرأس في البرمجة الخطية

إذا كان لدالة المنفعة في مسألة برمجة خطية قيمة كبرى أو قيمة صغرى، فإن الدالة تبلغ هذه القيم عند رأس من رؤوس منطقة الجدوى.



حل مسألة برمجة خطية

مثال 2

يُشكل التحكم بتلوث الهواء واحداً من أبرز اهتمامات مهندس الحدائق سيروان. للوصول إلى ذلك، يعمل سيروان على أن تكون كمية النباتات التي تمتص ثاني أكسيد الكربون هي الأكبر. استعمل معدلات امتصاص ثاني أكسيد الكربون ومعطيات المثال 1 لتحديد عدد النباتات من النوعين.



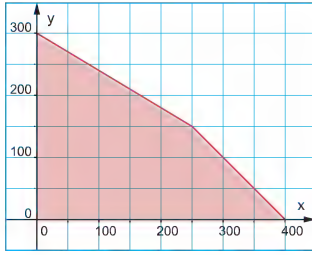
مساعدة

استعمل الحاسبة البيانية لكي تتحقق من منطقة الجدوى التي حصلت عليها. لا تنس أن تحوّل المتغيرين إلى x و y .

الخطوة 1 ارمز بالمتغير C إلى كمية ثاني أكسيد الكربون

التي يتم امتصاصها. استعمل x لعدد النباتات من النوع الأول و y لعدد النباتات من النوع الثاني.

اكتب دالة المنفعة: $C = 0.7x + 1.05y$



الخطوة 2 اكتب شروط المسألة

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

ومثل منطقة الجدوى.

الخطوة 3 احسب قيمة دالة المنفعة عند كل رأس من رؤوس منطقة الجدوى.

(x, y)	$0.7x + 1.05y$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

تبلغ دالة المنفعة قيمتها الكبرى

عند الرأس $(250, 150)$

على المهندس سيروان أن يزرع 250 نبتة من النوع الأول و 150 نبتة من النوع الثاني، لكي تبلغ كمية ثاني أكسيد الكربون التي تمتصها نباتات الحديقة حداً أقصى.

2. حدّد القيمة الكبرى لدالة المنفعة $p = 25x + 30y$

تحت الشروط التالية:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$



تطبيق على حل المسائل

مثال 3

في مهرجان للخيل التزم بيستون أن ينجز في يوم واحد توصيب وجبات الطعام في عُلب. استخدم لذلك عمالاً مختصين، أجر الواحد في اليوم 60 000 دينار، وعمالاً غير مختصين أجر الواحد في اليوم 40 000 دينار، على أن يدفع لهم كحدّ أقصى 1 440 000 دينار. يحتاج بيستون إلى مختص على الأقل مقابل كل 3 غير مختصين، ولا يتوافر سوى 16 مختصاً. ينجز المختص في الساعة 25 علبة وغير المختص 18 علبة. حدّد عدد العمال من كل فئة، لكي يكون عدد العلب المنجزة أكبر ما يُمكن.



افهم المسألة

سيتألف الجواب من شقين: عدد المختصين وعدد غير المختصين.

أنشئ لائحة بالمعلومات المهمة.

- أجر المختص 60 000 دينار في اليوم، وأجر غير المختص 40 000 دينار في اليوم.
- حدّد بيستون 1 440 000 دينار كحدّ أقصى لأجور العمال.
- يُنجز المختص في الساعة 25 علبة، ويُنجز غير المختص 18 علبة.
- يحتاج بيستون إلى مختص على الأقل مقابل 3 غير مختصين.
- يتوافر 16 عاملاً مختصاً فقط.

خطّطُ للحل

ارمز بالمتغير x إلى عدد العمال غير المختصين، وبالمتغير y إلى عدد العمال المختصين. اكتب شروط المسألة ودالة المنفعة، بالاستناد إلى المعلومات المهمة التي كتبتها.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

عدد العمال لا يكون سالباً

أجور العمال لا تتجاوز 1 440 000 دينار.

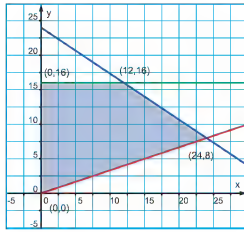
عامل مختص واحد على الأقل لكل 3 عمال غير مختصين

عدد العمال المختصين المتوافر هو 16

ارمز بالمتغير p إلى عدد العلب المنجزة في الساعة. دالة المنفعة هي $p = 18x + 25y$.

حل

حدّد بيانياً منطقة الجدوى وحدّد الرؤوس. ثم احسب قيمة دالة المنفعة عند كل رأس.



$$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$$

$$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$$

$$p(12, 16) = 18(12) + 25(16) = 616$$

$$p(24, 8) = 18(24) + 25(8) = 632$$

تبلغ دالة المنفعة قيمتها الكبرى عند الرأس $(24, 8)$. على بيتسون أن يستخدم 8 عمال مختصين و 24 عاملاً غير مختصاً.

انظر إلى الوراء

تأكد من أن الزوج المرتب $(24, 8)$ يُحقّق جميع شروط المسألة.

$$y \leq 16$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$8 \leq 16 \checkmark$$

$$8 \geq 0 \checkmark$$

$$24 \geq 0 \checkmark$$

$$40000x + 60000y \leq 1440000$$

$$y \geq \frac{1}{3}x$$

$$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$$

$$y \geq \frac{1}{3}(24)$$

$$1440000 \leq 1440000 \checkmark$$

$$8 \geq 8 \checkmark$$

3. يرغب مدير مكتبة في شراء خزانات للكتب. تحتاج المكتبة إلى 320 m من الرفوف.

تؤمّن الخزانة من النوع الأول 32 m من الرفوف وثمانها 200 000 دينار. وتؤمّن

الخزانة من النوع الثاني 16 m من الرفوف وثمانها 125 000 دينار. بالاستناد إلى

قياسات قاعة المكتبة التي تتسع على الأكثر لـ 8 خزانات من النوع الأول و 12 خزانة

من النوع الثاني، كم خزانة من كل نوع على مدير المكتبة أن يشتري ليدفع أقل مبلغ

ممكناً؟



فكر وناقش

الشروط	منطقة الجدوى
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 50px; height: 50px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> برمجة خطية </div>	
الرؤوس	دالة المنفعة

1. ما الذي يجعل شروط مسألة برمجة خطية تضم غالباً الشرطين $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ؟
2. ما الذي يجعل دالة المنفعة لمسألة برمجة خطية شرطاً $\begin{cases} x+y > 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ تملك قيمة كبرى أو قيمة صغرى وليس الاثنين معاً ؟
3. كيف تعرف أن معلومة في مسألة برمجة خطية تعود إلى الشروط أو إلى دالة المنفعة ؟
4. كن منظماً انسخ الجدول، ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثلاً، باستعمال معطيات من المثالين 1 و 2.



4-2 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات تُسمّى المتباينات في مسألة برمجة خطية ؟ (الشروط أو دالة المنفعة)

مثل بيانياً كل منطقة جدوى.

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x - 2 \\ y \leq -2x + 3 \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x + 1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x + 6 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x + 3 \\ y \leq -x + 7 \end{cases}$$

2

1 انظر المثال

حدّد قيم x و y التي تُعطي دالة المنفعة قيمتها الكبرى أو الصغرى.

2 انظر المثال

الشروط	دالة المنفعة	قيمة كبرى أم قيمة صغرى ؟
شروط مسألة التمرين 2	$p = 10x + 16y$	قيمة كبرى
شروط مسألة التمرين 3	$p = 3x + 5y$	قيمة صغرى
شروط مسألة التمرين 4	$p = 2.4x + 1.5y$	قيمة كبرى

5

6

7

8 طب أسنان يعمل طبيب الأسنان ريبوار، 7 ساعات يومياً. يُخصّص نصف ساعة للمريض الذي يريد تنظيف أسنانه ويتقاضى منه 40 000 دينار، وساعة للمريض الذي يريد معالجة لثته ويتقاضى منه 95 000 دينار. يستطيع الطبيب استقبال 4 حالات معالجة لثة على الأكثر في اليوم. جد عدد حالات تنظيف الأسنان وعدد حالات معالجة اللثة اللذين يؤمّنان للطبيب المدخول الأكبر.

3 انظر المثال

تمارين وحل مسائل

مثّل بيانياً كل منطقة جدوى.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x - 3 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$$

11

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x - 7 \end{cases}$$

10

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x - 4 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$$

9

تمارين حرة

أنظر	لحل
التمارين	المثال
1	11 - 9
2	12 - 14
3	15

حدّد قيم x و y التي تُعطي دالة المنفعة قيمتها الكبرى أو الصغرى.

الشروط	دالة المنفعة	قيمة كبرى أم قيمة صغرى ؟
شروط مسألة التمرين 9	$p = -21x + 11y$	قيمة كبرى
شروط مسألة التمرين 10	$p = -2x - 4y$	قيمة صغرى
شروط مسألة التمرين 11	$p = x + 3y$	قيمة كبرى

12

13

14



النوع	المدة (ثا)	الكلفة (دينار)
إذاعة	20	400 000
تلفزيون (الفترة المسائية)	30	1 500 000
تلفزيون (فترة السهرة)	30	1 200 000
صحف		300 000

15 إعلانات خصّصت إحدى الشركات

مبلغ 60 مليون دينار لتنظيم حملة دعائية لمنتجاتها على التلفزيون في الفترة المسائية، وعلى عدد من الإذاعات. قرر المسؤول عن الحملة أن يستعمل ما بين 30 و 60 مرة البث الإذاعي. استعمل الجدول لتجد عدد الدعايات في فترة التلفزيون المسائية، وفي الإذاعة، التي تؤمّن أطول وقت ممكن من الدعاية، ضمن حدود الميزانية.

16 تُباع بطاقات سباق الشرق للسيارات بسعيرين: 25 000 دينار للمقاعد العليا و 45 000 دينار

للمقاعد السفلى. قرّرت إدارة السباق ألا يزيد عدد المتفرجين على 160 000 متفرج.

أ حدّد عدد البطاقات التي ينبغي بيعها من كل فئة لتأمين أكبر مردود ممكن، علماً بأن عدد المقاعد العليا لا يزيد على 120 000 مقعد، وعدد المقاعد السفلى لا يزيد على 60 000 مقعد.

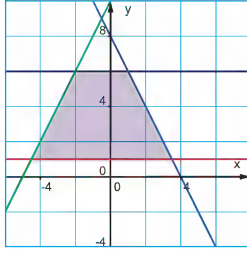
ب كيف يتغيّر النظام والحل إذا توقّعت إدارة السباق أن يكون إيراد كل مقعد من المقاعد العليا 60 000 دينار وكل مقعد من المقاعد السفلى 30 000 دينار، من بيع الشطائر والمرطبات؟



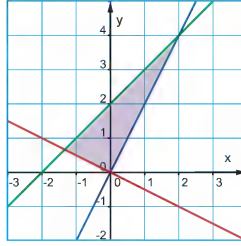
17 صناعة تنتج مؤسسة الفجر نوعين من المراوح. يستغرق تصنيع مروحة النوع الأول 4 ساعات

عمل ويؤمّن ربحاً قدره 40 000 دينار، بينما يستغرق تصنيع مروحة النوع الثاني 6 ساعات عمل ويؤمّن ربحاً قدره 80 000 دينار. لا تتعدى طاقة الإنتاج اليومية 15 مروحة من النوع الأول و 4 مراوح من النوع الثاني. ما الحد الأدنى لعدد ساعات العمل في اليوم التي تؤمّن للمؤسسة ربحاً لا يقل عن 400 000 دينار يومياً؟

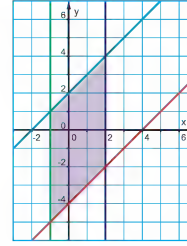
هندسة فيما يلي تمثيلات بيانية لمناطق جدوى في مسائل برمجة خطية. اكتب نظام متباينات لكل منها.



20



19



18

21 حركة سير قرّرت إدارة الطرقات السريعة تسيير دوريات خاصة لمساعدة السيّارات التي تتعرّض للنقص في الوقود بتزويدها بغالونين من الوقود، أو السيّارات التي تتعطل إحدى عجلاتها. يستغرق تزويد سيارة بالوقود 15 دقيقة، وإصلاح العجلة 45 دقيقة. ما أكبر عدد من السيّارات يُمكن لدورية واحدة أن تساعد في 8 ساعات، علماً بأنّ حمولتها القصوى من الوقود 28 غالوناً؟

22 تفكير ناقد هل يُمكن ألا يكون لمسألة برمجة خطية حل؟ أعط مثلاً يدعم جوابك.

23 تغذية يُنتج أحد مصانع الغذاء الصحي نوعين من المأكولات باستعمال إضافات من بروتين الصويا والفيتامينات. يتطلب تصنيع الوحدة من النوع الأول أونصتين من بروتين الصويا وأونصة واحدة من الفيتامينات. وتحقّق ربحاً قدره 25 000 دينار، ويتطلب تصنيع الوحدة من النوع الثاني 3 أونصات من بروتين الصويا وأونصة واحدة من الفيتامينات وتحقّق ربحاً قدره 32 000 دينار. كم وحدة من كل نوع على المصنع أن يُنتج للحصول على أكبر ربح ممكن، علماً بأنّ مخزونه من بروتين الصويا ومن الفيتامينات 100 أونصة؟

24 تفكير ناقد أعط مثلاً على مسألة برمجة خطية تتضمن منطقة الجدوى فيها قيماً سالبة.

25 اكتب كيف تميّز إن كان عليك البحث عن القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالة المنفعة في مسألة برمجة خطية وفقاً لشروط المسألة؟

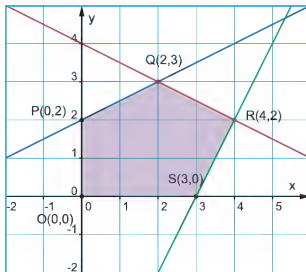
26 اكتب كيف تجد إحداثيات رؤوس منطقة الجدوى؟

نافذة

على تاريخ الرياضيات



تم تطوير علم البرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية في القرن العشرين. وقد لعب هذا العلم، وهو جزء من علم أوسع يسمى أبحاث العمليات، دوراً في كسب هذه الحرب بالمساعدة على حسن توزيع الموارد العسكرية.



27 أي نقطة تُعطي دالة المنفعة $P = -x + y$ قيمتها الكبرى في مسألة البرمجة الخطية التي يُمثّل الشكل المقابل منطقة الجدوى فيها؟

R (ج)

P (أ)

S (د)

Q (ب)

28 رؤوس منطقة الجدوى في مسألة برمجة خطية هي النقاط $(-2, 6)$ ، $(-1, 2)$ ، $(0, 0)$. أي من دوال المنفعة أدناه لها قيمة دنيا سالبة في منطقة الجدوى؟

$P = -x + 3y + 2$ (ج)

$P = -4x + y - 1$ (أ)

$P = -5x - y$ (د)

$P = 12x + 7y$ (ب)

29 تُخطّط شركة بناء كبرى لإنشاء مبان تجارية ومبان سكنية على قطعة من الأرض مساحتها $30\,000\text{ m}^2$. يتطلب كل مبنى سكني 250 m^2 وكل مبنى تجاري 3000 m^2 . تبيع الشركة مليون دينار في كل مبنى سكني، و 20 مليون دينار في كل مبنى تجاري. أي مما يلي يمكن اعتباره دالة المنفعة لهذه المسألة، ويؤمن أكبر ربح ممكن، علماً بأن عدد المباني التجارية يزيد على 6؟

$P = 1000000x + 20000000y$ (ج)

$P = 250x + 3000y$ (أ)

$P = 300\,000 - x - 6y$ (د)

$P = 250x + 100000y$ (ب)

تحدّ وتوسّع



30 **أدوية** تُخطّط إحدى شركات تصنيع الأدوية لاختبار نوع جديد من المضادات الحيوية على نوعين، A و B ، من البكتيريا. يتطلب الحكم على الدواء الجديد تجربته على ما لا يقل عن 700 عيّنة من البكتيريا، من بينها ما لا يقل عن 400 عيّنة من النوع B . لمساعدة الشركة على إنزال كلفة التجربة إلى الحد الأدنى:

أ) مثّل بيانياً منطقة الجدوى لهذه المسألة.

ب) ماذا تمثّل كل من النقطتين $(350, 400)$ و $(400, 350)$ لهذه المسألة؟

ج) هل تُحقّق كل من هاتين النقطتين شروط المسألة؟ أوضّح السبب.

مراجعة لولبية

احسب، في كل تمرين، $f(7)$ و $f(-\frac{1}{2})$. (الصفوف السابقة)

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **33**

$f(x) = 0.5x$ **32**

$f(x) = \frac{1}{2x - 3}$ **31**

حوّل دالة المطلق $f(x) = |x|$ بحيث يُصبح رأسها في النقطة المحددة. ارسم بيان الدالة الجديدة. (الصفوف السابقة)

$(-2.5, 0.75)$ **36**

$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ **35**

$(6, -3)$ **34**

هندسة مثّل بيانياً كل نظام متباينات، وصنّف الشكل الهندسي الذي يُمثّل منطقة الحل. (الدرس 3-2)

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ y \leq x \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$
 38

$$\begin{cases} y \leq 6 \\ y - 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$
 37

اختبار جزئي

الفصل

2

1-2 المتباينات الخطية بمجهولين

حلّ بيانياً كل متباينة خطية بمجهولين.

$$2x+5y>10 \quad 2$$

$$y-1\leq 5 \quad 1$$

$$3(2x-1)+y>6x-4 \quad 4$$

$$3x-4y>5x+12 \quad 3$$

مع تارا 30 000 دينار لتشتري بها بطاقات معايدة. ثمن البطاقة الكبيرة 2 500 دينار وثمان الصغيرة 1500 دينار. اكتب متباينة تمثل الحالة مستعملاً مجهولين يرمز كل منهما إلى عدد البطاقات من كل نوع. حلّ المتباينة بيانياً.

2-2 النمادج الخطية

دوّنت طبيبة الأطفال، على عدة أسابيع، كم ساعة عملت في الأسبوع، وكم تقاضت بآلاف الدنانير عن عملها. يُبين الجدول أدناه هذه المعطيات لأسابيع اختارتها الطبيبة عشوائياً.

عدد الساعات	28	12	30	18	23	8
الأجر	525	240	530	315	465	152

- أ) مثلّ هذه المعطيات بنقاط بيانية مستعملاً عدد ساعات العمل كمتغير حر.
- ب) استعمل الحاسبة البيانية لتجد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه المعطيات. ماذا يعني ميل هذا المستقيم للطبيبة؟
- ج) استعمل المعادلة التي وجدتها لتقدير ما ستتقاضاه الطبيبة لو عملت 40 ساعة في الأسبوع.

3-2 حل أنظمة المتباينات الخطية

حلّ بيانياً كل نظام متباينات.

$$\begin{cases} y \geq 2x+3 \\ y > -x \end{cases} \quad 9$$

$$\begin{cases} y+x \leq 0 \\ y \leq 4-x \end{cases} \quad 8$$

$$\begin{cases} y-x < 3 \\ y+x < 3 \end{cases} \quad 7$$

4-2 البرمجة الخطية

في كل مسألة، حدّد بيانياً منطقة الجدوى، ثم حدّد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لدالة المنفعة $P=4x+5y$.

$$\text{: قيمة كبرى} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x+4 \\ y \leq -3x+9 \end{cases} \quad 11$$

$$\text{: قيمة صغرى} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x-1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x+4 \end{cases} \quad 10$$

حل الأنظمة الخطية بثلاثة مجاهيل

Solving Linear systems in 3 unknowns

5-2



لماذا نتعلم هذا الموضوع؟

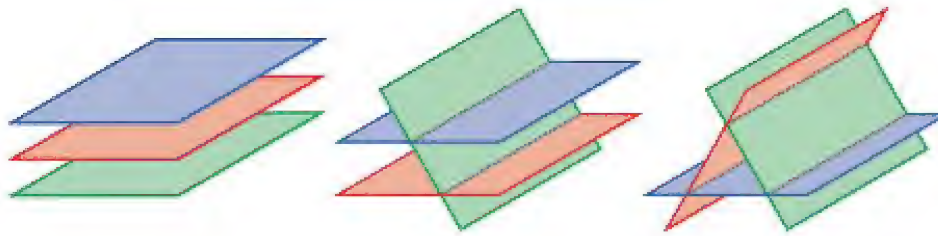
يُمكنك استعمال نظام من 3 معادلات خطية بثلاثة مجاهيل لحل الكثير من مسائل الحياة، كإيجاد نظام تثقيب الدرجات في مباراة الدخول إلى كلية الهندسة (مثال 2)

الأهداف

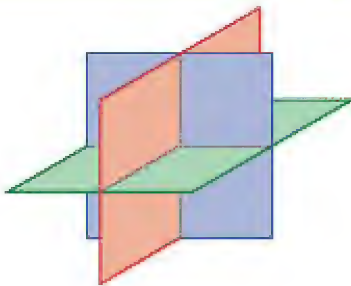
يُمثل في الفضاء الإحداثي حلول نظام خطي بثلاثة مجاهيل.
يحل جبرياً نظاماً خطياً بثلاثة مجاهيل.

تعلّمت في الصفوف السابقة أن تحل نظاماً خطياً من معادلتين خطيتين بمجهولين، أو نظاماً خطياً 2×2 . غالباً ما تُسمّى الأنظمة الخطية من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل، الأنظمة 3×3 . لكي تجد حلاً وحيداً لنظام معادلات خطية، تحتاج عموماً أن يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل. تذكر من الفصل السابق أن معادلة خطية بثلاثة مجاهيل تتمثل في الفضاء الإحداثي بواسطة مستوى. عندما تتمثل، في الفضاء الإحداثي، نظاماً خطياً من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل تحصل على 3 مستويات. قد تتقاطع هذه المستويات أو لا. كل نقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة تمثل حلاً للنظام. ينتج من ذلك أن النظام قد يكون له حل وحيد أو عدد غير محدود من الحلول، وقد لا يكون له حلول.

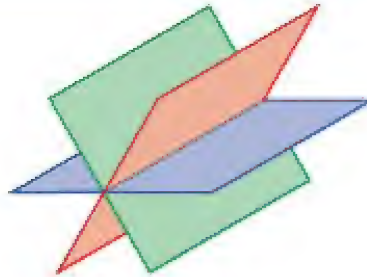
أنظمة مستحيلة (لا حلول لها)



أنظمة محدّدة (حل وحيد)



أنظمة غير محدّدة (عدد غير محدود من الحلول)



قد يكون صعباً تحديد حلول نظام خطي 3×3 باستعمال تمثيله في الفضاء الإحداثي. لكن بمقدورك أن تحل مثل هذا النظام جبرياً باستعمال الحذف والتعويض لتحويله من نظام خطي 3×3 إلى نظام خطي 2×2 ، ثم حل النظام الحاصل بالطرق التي تعلّمتها سابقاً.

حل نظام خطي من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل

مثال 1

استعمل الحذف لحل النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & \textcircled{1} \\ 2x-2y+z=7 & \textcircled{2} \\ x+y+2z=-4 & \textcircled{3} \end{cases}$$

الخطوة 1 احذف أحد المجاهيل الثلاثة.

يبدو المجهول y مرشحاً طبيعياً للحذف، لأنّ معاملتيه في المعادلتين $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ متعاكسان.اجمع المعادلتين $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x+2y-3z &= -2 \\ \textcircled{2} \quad 2x-2y+z &= 7 \\ \hline 3x \quad \quad -2z &= 5 \end{aligned} \quad \textcircled{4}$$

استعمل المعادلتين $\textcircled{1}$ و $\textcircled{3}$ لإيجاد معادلة ثانية بالمجهولين x و z .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x+2y-3z &= -2 & x+2y-3z &= - \\ \textcircled{2} \quad -2(x+y+2z) &= -2(-4) \rightarrow & 2x-2y+z &= 7 \\ \hline \textcircled{3} \quad 3x-2z &= 5 & 3x-2z &= 5 \\ \textcircled{4} \quad 3x-2z &= 5 & 3x-2z &= 5 \\ \textcircled{5} \quad -x-7z &= 6 & -x-7z &= 6 \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

الخطوة 2 احذف مجهولاً ثانياً، وحل المعادلة الناتجة لتحصل على قيمة المجهول الثالث. احذف المجهول x .

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad 3x-2z &= 5 & 3x-2z &= 5 \\ \textcircled{5} \quad -x-7z &= 6 \rightarrow & -3x-21z &= 18 \\ \hline & & -23z &= 23 \\ & & z &= -1 \end{aligned}$$

الخطوة 3 استعمل إحدى معادلتَي النظام 2×2 لتحسب قيمة x .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -x-7z &= 6 \\ \textcircled{2} \quad -x-7(-1) &= 6 \\ & -x+7 &= 6 \\ & -x &= -1 \\ & x &= 1 \end{aligned}$$

الخطوة 4 عوّض عن x و z بقيمتيهما في إحدى معادلات النظام الأصلي لتحسب قيمة y .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x+y+2z &= -4 \\ \textcircled{2} \quad (1)+y+2(-1) &= -4 \\ & y-1 &= -4 \\ & y &= -3 \end{aligned}$$

حل النظام هو، $(1, -3, -1)$

1. استعمل الحذف لحل النظام التالي:

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$



يُمكنك أيضاً استعمال التعويض لحل نظام خطي 3×3 . هنا أيضاً، تقضي الفكرة بتحويل النظام 3×3 إلى نظام 2×2 .

تطبيق على مباريات الدخول

مثال 2

المجموع	لغة إنكليزية	علوم	رياضيات	المرشح
700	70	60	90	سوزان
590	80	70	60	آزاد
240	60	60	0	هشيار

يخضع الراغبون في الدخول إلى كلية الهندسة لمسابقة في 3 مواد هي الرياضيات والعلوم واللغة الإنكليزية. لحساب مجاميع المرشحين، تعتمد اللجنة الفاحصة إلى تثقيف درجة المتباري في كل

مادة بثقل (عدد تُضرب فيه الدرجة) قد يختلف عن ثقل درجته في المادتين الباقيتين. يُبين الجدول المقابل درجات 3 مرشحين في المواد الثلاث، ومجموع كل منهم بعد التثقيف. استعمل معطيات الجدول لتجد ثقل كل مادة.

الخطوة 1 ارمز بالمتغير x إلى ثقل مادة الرياضيات، وبالمتغير y إلى ثقل مادة العلوم، وبالمتغير z إلى ثقل مادة اللغة الإنكليزية. اكتب نظام معادلات يُعبّر عن معطيات الجدول.

درجات سوزان.

درجات آزار.

درجات هشيار.

$$\begin{cases} 90x + 60y + 70z = 700 & \text{①} \\ 60x + 70y + 80z = 590 & \text{②} \\ 60y + 60z = 240 & \text{③} \end{cases}$$

لاحظ أنّ المتغير x غير ظاهر في المعادلة الثالثة، لأنّ هشيار نال 0 في الرياضيات. غياب متغير لا يبدّل في الأمر شيئاً. إذا نظرت إلى المعادلة الثالثة، تلاحظ أنها تسمح بحساب y بدلالة z . هذا الأمر يساعد على استعمال التعويض لتحويل النظام إلى نظام خطّي من معادلتين بمجهولين.

الخطوة 2 احسب المتغير y بدلالة المتغير z باستعمال المعادلة ③.

احسب y بدلالة المتغير z .

$$60y + 60z = 240$$

$$y = 4 - z$$

الخطوة 3 عوّض عن y بقيمته في كل من المعادلتين ① و ②.

عوّض ثم بسّط

$$\begin{cases} 90x + 60(4 - z) + 70z = 700 \rightarrow 90x + 10z = 460 & \text{④} \\ 60x + 70(4 - z) + 80z = 590 \rightarrow 60x + 10z = 310 & \text{⑤} \end{cases}$$

الخطوة 4 استعمل الحذف لحل النظام الذي حصلت عليه، اطرَح المعادلة ⑤ من المعادلة ④.

$$90x + 10z = 460 \quad \text{④}$$

$$60x + 10z = 310 \quad \text{⑤}$$

$$30x = 150 \quad \text{⑥}$$

الخطوة 5 حل المعادلة التي حصلت عليها.

$$30x = 150$$

$$x = 5$$

الخطوة 6 عوّض عن x بقيمته في المعادلة ④ لحساب قيمة z .

$$90(5) + 10z = 460$$

$$10z = 10$$

$$z = 1$$

الخطوة 7 عوّض عن كل من x و z بقيمته في المعادلة ① واحسب قيمة y .

$$90(5) + 60y + 70(1) = 700$$

$$60y = 180$$

$$y = 3$$

الحل هو (5, 3, 1). ثقل درجة الرياضيات 5 ودرجة العلوم 3 ودرجة اللغة الإنكليزية 1.

2. حدّد تثقيل كل مادة في مسابقة الدخول إلى كلية الطب وفقاً لمعطيات الجدول أدناه.



المرشح	رياضيات	علوم	لغة إنكليزية	المجموع
شيرين	80	70	50	430
سولاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

كان لكل من النظامين في المثالين 1 و 2 حل وحيد. لكن قد لا توجد حلول لنظام خطّي 3×3 أو قد يكون له عدد غير محدود من الحلول.

تصنيف أنظمة المعادلات الخطية 3×3

مثال 3

صنّف النظام التالي وحدّد عدد حلوله.

$$\begin{cases} 4x - 2y + 4z = 8 & \text{①} \\ -3x + y - z = -4 & \text{②} \\ -2x + 2y - 6z = 4 & \text{③} \end{cases}$$

يُمكن هنا استعمال الحذف لأنّ معاملي المتغيّر y في المعادلتين ① و ③ متعاكسان. ابدأ بجمع هاتين المعادلتين.

$$4x - 2y + 4z = 8 \quad \text{①}$$

$$-2x + 2y - 6z = 4 \quad \text{③}$$

$$\underline{2x} \quad \underline{-2z = 12} \quad \text{④}$$

$$4x - 2y + 4z = 8$$

$$4x - 2y + 4z = 8$$

$$\underline{2(-3x + y - z = -4)} \rightarrow \underline{-6x + 2y - 2z = -8}$$

$$\underline{-2x} \quad \underline{+2z = 0} \quad \text{⑤}$$

حصلت على نظام من معادلتين خطيتين بمجهولين.

$$\begin{cases} 2x - 2z = 12 & \text{④} \\ -2x + 2z = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

احذف المتغيّر x . اجمع المعادلتين ④ و ⑤.

$$\text{④} \quad 2x - 2z = 12$$

$$\text{⑤} \quad \underline{-2x + 2z = 0}$$

$$0 = 12 \quad \text{X}$$

بما أن 0 لا يُمكن أن يساوي 12، فهذه المساواة خطأ. ينتج من ذلك أنّ النظام مستحيل.

3. صنّف كل نظام وحدّد عدد حلوله.



$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 2x - 4y + 6z = 10 \\ y - z = -2 \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ -9x + 3y - 6z = -12 \end{cases} \quad \text{أ}$$

فكر وناقش

1. انظر إلى الأنظمة المستحيلة وغير المحددة الممثلة في الصفحة الأولى من هذا الدرس. صف وضعية أخرى لثلاثة مستويات تُمثل نظاماً مستحيلاً، وضعية أخرى تُمثل نظاماً غير محدد.

2. كن منظماً انسخ الجدول، ثم أكمله بوصف وجوه التشابه ووجوه الاختلاف بين الأنظمة الخطية 3×3 والأنظمة الخطية 2×2 .

أنظمة المعادلات الخطية

2×2 3×3

اعلم
احفظ

التمارين

5-2

تمارين موجّهة

استعمل الحذف لحل كل نظام.

1 انظر المثال

$$\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases} \quad 3$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases} \quad 1$$

2 انظر المثال

4 إدارة أعمال تتبع إدارة حديقة الحيوانات ثلاثة أنواع من البطاقات: للأطفال والياfeين والكبار. يُبين الجدول مبيعات بطاقات الدخول إلى حديقة الحيوانات خلال 3 ساعات. جد ثمن البطاقة من كل نوع.

الدخول إلى حديقة الحيوانات				
الوقت	الكبار	الـياfeون	الأطفال	قيمة المبيعات
16:00 – 15:00	5	10	12	310 000
17:00 – 16:00	5	5	4	155 000
18:00 – 17:00	4	2	3	92 000

3 انظر المثال

صنّف كل نظام خطي وحدّد عدد حلوله.

$$\begin{cases} -2x+3y+z=15 \\ x+3y-z=-1 \\ -5x-6y+4z=-16 \end{cases} \quad 7$$

$$\begin{cases} 2x+4y-5z=-10 \\ -x-2y+8z=16 \\ -2x+4y+2z=4 \end{cases} \quad 6$$

$$\begin{cases} 2x+4y-2z=4 \\ -x-2y+z=4 \\ 3x+6y-3z=10 \end{cases} \quad 5$$

تمارين وحلُّ مسائل

استعمل الحذف لحل كل نظام.

$$\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases} \quad \text{10}$$

$$\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases} \quad \text{9}$$

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases} \quad \text{8}$$

تمارين حرة

انظر	حل
التمارين	المثال
1	10-8
2	11
3	14-12

11 تسليّة في مباراة مطرب المستقبل، تُقوّم لجنة التحكيم المتبارين بناءً على 3 معايير: الموهبة والوقوف على المسرح والأداء. لكل من هذه المعايير نسبة مئوية من التقويم النهائي. يُبيّن الجدول أدناه تقويم ثلاثة متبارين وفقاً لكل معيار بالإضافة إلى التقويم النهائي لكل منهم. ما النسبة المئوية من التقويم النهائي التي تعود إلى كل معيار؟

مباراة مطرب المستقبل				
المتباري	الموهبة	الوقوف على المسرح	الأداء	التقويم النهائي
زانا	8	9	10	9.2
فيان	9	7	8	8.1
آراس	6	10	8	7.8

صنّف كل نظام خطّي وحدّد عدد حلوله.

$$\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases} \quad \text{14}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases} \quad \text{13}$$

$$\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases} \quad \text{12}$$

15 هندسة يساوي قياس الزاوية A في مثلث ABC ضعف مجموع قياسَي الزاويتين B و C . كما يساوي قياس الزاوية B ثلاثة أضعاف قياس الزاوية C . ما قياس كل زاوية؟

16 رياضة كان لوي دامبيه الأول في تسجيل النقاط في تاريخ الرابطة الأميركية لكرة السلة. يبلغ مجموع نقاطه 13 726 نقطة موزعة على سلة من ثلاث نقاط وسلة من نقطتين وسلة من نقطة واحدة. حقّق دامبيه 2144 نقطة في رميات النقطتين زيادة على ما حقّقه في رميات النقطة الواحدة. وسجّل 1558 نقطة في رميات النقطة الواحدة زيادة على نقاط رميات الثلاث نقاط. كم نقطة سجّل دامبيه في كل نوع من الرميات؟

$$\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$$

17 تفكير ناقد يتألف النظام التالي من معادلتين بثلاثة مجاهيل

أ صِف ما يحدث عندما تحاول أن تحل هذا النظام.

ب أَوْضَح السبب الذي يَحْتَمُّ ألا يقلّ عدد معادلات نظام خطّي عن عدد المجاهيل، لكي يكون للنظام حل وحيد.

18 اكتب يتقاطع مستويان من بين المستويات الثلاثة التي تمثّل معادلات نظام خطّي 3×3 وفق مستقيم. ما النوع الممكن لمثل هذا النظام؟

19 يُمثّل النظام أدناه الوجوه الثلاثة (كل معادلة تمثّل مستويًا) لهرم ثلاثي القاعدة، حيث تقع هذه القاعدة في المستوي الإحداثي xy ، وحيث القياسات بالأمتار.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

- أ ما إحداثيات رأس الهرم؟
 ب يرغب المهندس في وضع عمود يسند رأس الهرم. ما ارتفاع هذا العمود؟
 ج ما إحداثيات نقطة ارتكاز العمود؟

تحضير للاختبار

20 أي نقطة تمثّل حل النظام

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$$

- أ (2, -2, -1) ج (2, 1, -1)
 ب (0, 2, -1) د (3, -2, 2)

- 21 سوزان وميران وسافان أخوات. عمر سوزان ضعف عمر ميران الذي يقل 12 سنة عن عمر سافان. بعد 5 سنوات، سيصبح عمر سافان ضعف عمر ميران. ما عمر كل منهن؟
 أ سوزان 6، ميران 3، سافان 15 ج سوزان 5، ميران 10، سافان 22
 ب سوزان 34، ميران 17، سافان 29 د سوزان 14، ميران 7، سافان 19

22 جواب مختصر ما قيمة x في حل النظام

$$\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+3z=12 \\ 4y+z=10 \end{cases}$$

تحدّ وتوسّع

23 استعمل الطريقة التي تراها مناسبة لحل النظام

$$\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$$

24 اقتصاد وظّف 3 أصدقاء أموالاً في 3 أنواع من الأوراق المالية: أ، ب، ج. وظّف كل منهم مليون دينار موزعاً المبلغ على الأنواع الثلاثة. يُبين الجدول أدناه كم وظّف كل منهم في كل نوع من الأوراق المالية، وما ربحه في نهاية العام. ما النسبة المئوية لمردود كل نوع؟

التوظيف في الأوراق المالية				
الشخص	أ	ب	ج	الربح
آزاد	300 000	300 000	400 000	56 000
نوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دلسوز	100 000	300 000	600 000	30 000

مراجعة لولبية

ما إحداثيًا صورة النقطة، $(2, -3)$ بكل سحب؟ (الصفوف السابقة)

25 6 وحدات إلى اليمين، وحدة واحدة إلى أعلى **26** 4 وحدات إلى اليسار، وحدتان إلى أسفل

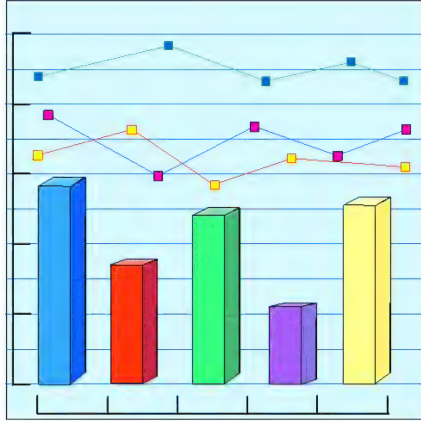
27 بناء كانت قياسات المطبخ على مخطط الدار 11 cm في 8 cm . ما القياسات الحقيقية للمطبخ إذا كان مقياس الرسم $1\text{ cm}:0.65\text{ m}$ ؟ (الصفوف السابقة)

اكتب كل معادلة على صورة الميل - التقاطع، ثم ارسم المستقيم الذي يمثلها. (الصفوف السابقة)

30 $2x + 5y = 15$

29 $3y - 2x = -12$

28 $4x - 3y = -6$



القياسات الإحصائية

Statistical Measurements

6-2

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل الإحصائيون قياسات النزعة المركزية وقياسات التشبُّث لتحليل المعطيات الإحصائية. (مثال 2)

الأهداف

يجد قياسات النزعة المركزية وقياسات التشبُّث لمجموعة معطيات إحصائية. يدرس تأثير وجود قيم متطرفة في مجموعة معطيات.

المفردات

Vocabulary

المتوسط المُثَقَّل

Weighted average

التوزيع الاحتمالي

Propability Distribution

تذكر أن المتوسط والوسيط والمنوال هي من قياسات النزعة المركزية، أي إنها قياسات تصف مركز مجموعة من المعطيات.

المتوسط Mean هو ناتج قسمة مجموع القيم على عددها. يُشار إليه عادة بالرمز \bar{x} . **المنوال Mode** هو القيمة الأكثر تردُّدًا في المجموعة، يمكن أن يكون لمجموعة المعطيات أكثر من منوال، كما يمكن ألا يكون لها أي منوال. **الوسيط Median** هو القيمة الواقعة في وسط القيم عندما يتم ترتيبها صعودًا أو نزولًا إذا كان عدد القيم فرديًا؛ ومتوسط القيمتين الواقعتين في الوسط إذا كان هذا العدد زوجيًا.

إيجاد مقاييس النزعة المركزية

1

مثال

جد المتوسط والوسيط والمنوال لمجموعة المعطيات التالية:

$$\{6, 4, 3, 4, 2, 5, 3, 4, 5, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{x} = \frac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \frac{45}{12} = 3.75 \text{ المتوسط}$$

$$\frac{4+4}{2} = 4 \quad : 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \quad : 4 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \text{ الوسيط}$$

المنوال: القيمة الأكثر تردُّدًا هي 4. المنوال هو 4.

التباين

Variance

الانحراف المعياري

Standard Deviation

القيم المتطرفة

Outliers

القيمة المتوقعة

Expected value

الربيع

Quartile

1. جد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

$$\{2, 5, 6, 2, 6\} \text{ ب}$$

$$\{6, 9, 3, 8\} \text{ أ}$$



المتوسط المُنَقَّل Weighted average هو المتوسط الذي يُحسب مراعيًا تكرار كل قيمة. افترض أنه تم تقويم 30 كتابًا كما هو مبين في الجدول التالي:

تقويم الكتب				
التقويم	★ ★ ★ ★	★ ★ ★	★ ★	★
عدد الكتب	8	12	7	2

$$\frac{8(4)+12(3)+7(2)+2(1)+1(0)}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8 \text{ المتوسط المُنَقَّل لتقويم الكتب هو } 2.8$$

يسمى المتوسط المُنَقَّل لمجموعة من القيم العددية الناتجة عن تجربة ما، **القيمة المُتَوَقَّعة Expected value** لهذه التجربة. فالقيمة المنتظرة، مثلًا، لعدد النجوم التي يحوزها كتاب تم اختياره عشوائيًا من الكتب الثلاثين هي 2.8.

التوزيع الاحتمالي Probability distribution لتجربة عشوائية هو دالة تقرر كل نتيجة ممكنة من نتائجها بعدد يمثل احتمال تحققه.

مثال 2 إيجاد القيمة المتوقعة

يُبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد الألعاب في كل من الدورات العالمية في السنوات من 1923 إلى 2004. ما العدد المتوقع للألعاب في دورة واحدة؟

الدورات العالمية				
عدد الألعاب n	7	6	5	4
احتمال n لعبة	$\frac{11}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$

القيمة المتوقعة: $4\left(\frac{5}{27}\right) + 5\left(\frac{5}{27}\right) + 6\left(\frac{6}{27}\right) + 7\left(\frac{11}{27}\right)$ استعمل المتوسط المتكثف

$$\text{بسط} = \frac{20}{27} + \frac{25}{27} + \frac{36}{27} + \frac{77}{27} = \frac{158}{27} \approx 5.85$$

العدد المتوقع للألعاب خلال دورة واحدة هو 5.85 تقريباً.

إضاءة

مجموع كل الاحتمالات في أي

توزيع احتمالي يساوي 1.

في المثال 2، نجد أن:

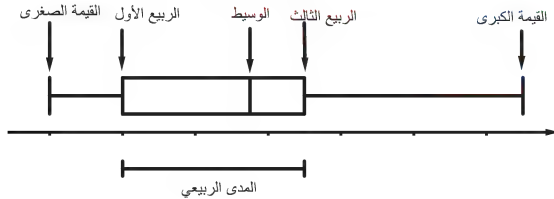
$$\frac{5}{27} + \frac{5}{27} + \frac{6}{27} + \frac{11}{27} = 1$$

2. يُبين الجدول أدناه التوزيع الاحتمالي لعدد حوادث السير في الأسبوع عند أحد تقاطعات الطرق، بالاستناد إلى إحصائيات السنوات الماضية. جد القيمة المتوقعة لعدد الحوادث في أسبوع.



عدد الحوادث n	3	2	1	0
احتمال وقوع n حادثاً	0.02	0.08	0.15	0.75

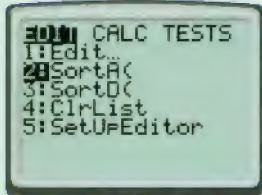
بيان الشاربين box-and-whisker-plot مخطط يمثل توزيع مجموعة معطيات. يُظهر هذا البيان 5 نقاط أساسية: القيمة الكبرى والقيمة الصغرى، الوسيط، الربعين الأول والثالث.



الربع الأول First quartile هو وسيط القيم الأصغر من وسيط المجموعة، ورمزه Q_1 .
الربع الثالث Third quartile هو وسيط القيم الأكبر من وسيط المجموعة، ورمزه Q_3 .
المدى الربيعي Interquartile range هو الفرق بين الربع الثالث والربع الأول، أي $Q_3 - Q_1$ ، وهو يمثل 50% من المعطيات.

رسم بيان الشاربين

من طالب إلى طالب



عليك أن ترتب المعطيات قبل البدء بإنشاء بيان الشاربين. أدخل المعطيات إلى الحاسبة البيانية باستعمال وظيفة اللائحة. استعمل بعد ذلك خيار الترتيب من بين خيارات STAT لترتيب المعطيات صعوداً.
 يُمكنك أيضاً أن تستعمل برنامجاً حاسوبياً مثل EXCEL لترتيب المعطيات.

مثال 3

إنشاء بيان الشاربيين وتحديد المدى الربيعي

أنشئ بيان الشاربيين وحدد المدى الربيعي لمعطيات المجموعة.

{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8}

الخطوة 1 رتب المعطيات صعوداً.

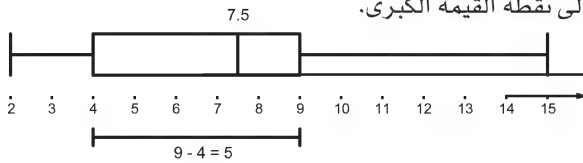
2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

الخطوة 2 جد القيمتين الكبرى والصغرى والوسيط والربيعين الأول والثالث.

$\{2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7\}$ ، $\{8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15\}$
 القيمة الصغرى الربيع الأول الوسيط 7.5 الربيع الثالث القيمة الكبرى

الخطوة 3 أنشئ بيان الشاربيين.

ارسم محور الأعداد ثم ارسم نقطة فوق كل قيمة من القيم الخمس. ارسم بعد ذلك المستطيل ما بين نقطة الربيع الأول ونقطة الربيع الثالث، مع قطعة مستقيمة عمودية عند الوسيط. أخيراً، ارسم الشاربيين من نقطة الربيع الأول إلى نقطة القيمة الصغرى، ومن نقطة الربيع الثالث إلى نقطة القيمة الكبرى.



المدى الربيعي هو 5: إنه المسافة بين الربيعين الأول والثالث، أي طول المستطيل.

3. أنشئ بيان الشاربيين، وحدد المدى الربيعي لمعطيات المجموعة.

{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23}



يمكن أن يكون لمجموعتي معطيات، مثل {19, 20, 21} و {0, 20, 40}، المتوسط نفسه والوسيط نفسه، مع كونهما مختلفين كلياً. لذا، يولي الإحصائيون أهمية كبرى لتشتت المعطيات خارج المتوسط أو الوسيط. وقد أدخلوا، من أجل ذلك، قياسات جديدة للتعبير عن التشتت. من هذه القياسات المدى والمدى الربيعي والتباين والانحراف المعياري.

التباين Variance، ويرمز إليه بالرمز σ^2 ، هو متوسط تربيعات المسافات بين المتوسط ومختلف القيم. الانحراف المعياري Standard deviation، ويرمز إليه بالرمز σ ، هو الجذر التربيعي للتباين، وهو من أكثر القياسات الإحصائية فائدة واستعمالاً.

يدل صغر قيمة الانحراف المعياري على وجود أكثرية المعطيات في جوار قياسات النزعة المركزية، بينما يدل كبر هذه القيمة على تشتت المعطيات بعيداً عن هذه القياسات.

قراءة

يستعمل الإحصائيون الرمز \bar{x} (اقرأ إكس بار) للدلالة على المتوسط، والحرف اليوناني σ (اقرأ سيغما) للدلالة على الانحراف المعياري.

إيجاد التباين والانحراف المعياري	
الخطوة 1	جد متوسط المعطيات.
الخطوة 2	جد الفرق بين المتوسط وكل من المعطيات، واحسب تربيعه.
الخطوة 3	جد التباين σ^2 عن طريق جمع الأعداد التي حصلت عليها في الخطوة 2 وقسمتها على عددها.
الخطوة 4	جد الانحراف المعياري بحساب الجذر التربيعي للتباين.

إيجاد المتوسط والانحراف المعياري

مثال 4

تُمثّل المجموعة {4, 11, 12, 11, 7, 3, 9, 16, 13, 14} نسب مادة معيّنة في دم مريض على مدى 10 أيام. جد متوسط هذه المعطيات وانحرافها المعياري.

الخطوة 1 جد المتوسط.

$$\bar{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

الخطوة 2 جد الفرق بين المتوسط وكل قيمة، ثم احسب تربيعه.

14	13	16	9	3	7	11	12	11	4	القيمة x
4	3	6	-1	-7	-3	1	2	1	-6	$x - \bar{x}$
16	9	36	1	49	9	1	4	1	36	$(x - \bar{x})^2$

الخطوة 3 جد التباين.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

الجدول أعلاه.

الخطوة 4 جد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$$

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.

متوسط هذه المعطيات هو 10، وانحرافها المعياري هو 4.02 تقريباً.

4. جد المتوسط والانحراف المعياري للمعطيات أدناه حول عدد المرات التي يتوقف فيها المصعد في نقلات متعددة. {0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0}



القيم المتطرفة Outliers في مجموعة معطيات، قيم تقع خارج سياق أكثرية قيم المجموعة، كأن تكون أكبر بكثير منها أو أصغر بكثير منها. يؤثر وجود مثل هذه القيم بشدة على المتوسط والانحراف المعياري. إذا كانت قيمة متطرفة ناتجة عن خطأ في القياس، يعمد الإحصائيون إلى حذفها. هناك طرائق عدة لتحديد ما إذا كانت قيمة متطرفة. من هذه الطرق اعتبار القيم التي تبعد عن المتوسط ثلاثة أضعاف الانحراف المعياري قيمةً متطرفة.

دراسة القيم المتطرفة

مثال 5

تُبيّن المجموعة أدناه الدرجات التي نالها طلاب الصف العاشر في اختبار الرياضيات: {51, 55, 56, 53, 56, 48, 56, 48, 54, 47, 50, 96, 57, 58, 59, 45, 51}

الخطوة 1 أدخل المعطيات في اللائحة L1 في الحاسبة البيانية.

الخطوة 2 جد المتوسط والانحراف المعياري. اضغط STAT ثم اختر CALC. ثم اختر 1:1-variable. اضغط ENTER فتحصل على الشاشة المقابلة.

1-Var Stats	
$\bar{x}=55.29411765$	المتوسط
$\Sigma x=940$	
$\Sigma x^2=54012$	
$Sx=11.27921044$	الانحراف المعياري
$\sigma x=10.94244142$	
$n=17$	

المتوسط: 55.29 تقريباً

الانحراف المعياري: 10.92 تقريباً

الخطوة 3 حدّد القيم المتطرفة.

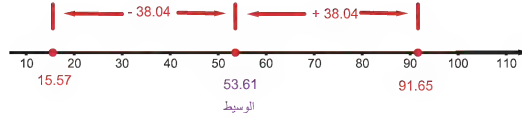
ابحث عن القيم التي تبعد عن المتوسط

3 أمثال الانحراف المعياري.

3 أمثال الانحراف المعياري هو $3 \times 10.92 = 32.76$ تقريباً.

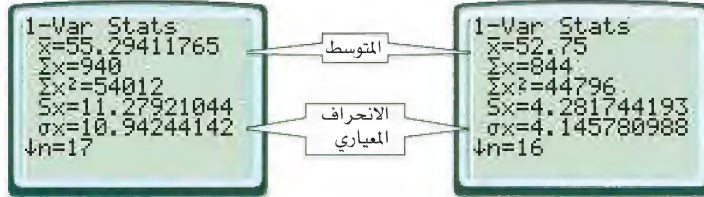
تذكّر

يتم إدخال المعطيات في الحاسبة البيانية بالضغط على STAT واختيار Edit: 1 ...



القيم المتطرفة هي القيم التي تزيد على $32.76 + 55.29 = 88.05$ أو تقل عن $55.29 - 32.76 = 22.53$. هناك قيمة متطرفة واحدة هي 96.

الخطوة 4 احذف القيمة المتطرفة لتتبيّن تأثيرها في المتوسط والانحراف المعياري.



أدى وجود القيمة المتطرفة إلى رفع المتوسط من 52.75 إلى 92.55، وإلى رفع الانحراف المعياري من 4.16 إلى 10.92.

5. حدّد القيم المتطرفة في مجموعة المعطيات {3, 19, 4, 4, 2, 3}، وأوضح كيف تؤثر في قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري.




فكر وناقش

1. أوضح تأثير إضافة العدد نفسه إلى كل قيمة في مجموعة معطيات على متوسط هذه المجموعة.
2. أوضح تأثير إضافة العدد نفسه إلى كل قيمة في مجموعة معطيات على الانحراف المعياري لهذه المجموعة.
3. ما تأثير مضاعفة التباين على الانحراف المعياري؟
4. **كن منظمًا** انسخ المخطط وأكمله. اكتب في كل إطار تعريفًا لما يحتويه، ومثالاً عليه.



تمارين موجّهة

1 انظر المثال

 $\{5, 7, 4, 7, 6, 7\}$ 

$\{10, 14, 18, 22, 26\}$ **4**

2 انظر المثال

5 جد القيمة المتوقعة للجائزة.

3 انظر المثال

 $\{2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4\}$ **7** $\{3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11\}$ 6 $\{33, 34, 31, 27, 22\}$ **8**

4 انظر المثال

$\{10, 12, 14, 15, 18, 20, 23\}$ **10**

 $\{3, 3, 4, 5, 5\}$ **9** $\{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$ **11**

5 انظر المثال

1

بالسنتيمتر طول الطاولة التي يجلسون إليها. دُونَ المعلم
قياسات التلاميذ على الشكل التالي: 49، 50، 49، 48،
19، 50، 49، 48، 50، 49. حدّد القيم المتطرّفة،
واشرح كيف تؤثر في قيمة كل من المتوسط والانحراف
المعياري.



تمارين وحل مسائل

التمارين المحرة

16 جد العدد المتوقع لعدد مرات الحصول على الصورة.

$\{4, 16, 25, 9, 36, 49\}$ **13**

$\{5, 10, 15, 20, 25\}$ **14**

$\{1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8\}$ **15**

رمي 3 قطع نقود معدنية				
عدد المرات	0	1	2	3
الاحتمال	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

التمارين الحرة	
حل	أنظر
التمارين	المثال
15-13	1
16	2
19-17	3
22-20	4
23	5

أنشئ بيان الشاربيّن لكل مجموعة معطيات، وجد المدى الربيعي.

17 {12, 15, 12, 6, 18, 29} 18 {2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42}

19 {3, 4, 3, 1, 2}

جد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات.

20 {4, 4, 4, 4, 5} 21 {8, 12, 30, 35, 48, 50, 62}

22 {14, 26, 40, 52}

23 كرة سلة لعب آرى 13 مباراة في كرة السلة وحقق النقاط التالية: 9، 16، 24، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. جد المتوسط والانحراف المعياري.

حدّد القيم المتطرفة، وشرح تأثيرها في قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري.

24 تفكير ناقد اكتب مجموعة معطيات لا يكون المتوسط ولا الوسيط من بينها.

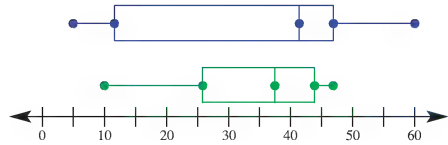
25 تسوّق ذهب هريم إلى السوق لشراء ميزان دقيق لقياس درجة حرارة الغرفة. وجد في أحد المحال 4 موازين تدل على درجات الحرارة التالية 25، 26، 8، 24. أي مقياس من مقاييس النزعة المركزية لا ينبغي لهريم أن يستعمله ليختار الميزان المناسب؟

يعتبر بعض الإحصائيين أن قيمة من قيم مجموعة معطيات هي قيمة متطرفة إذا قلت عن (الربيع الأول - 1.5 × المدى الربيعي) أو زادت على (الربيع الثالث + 1.5 × المدى الربيعي).

أي من قيم كل مجموعة هي قيمة متطرفة بنظر هؤلاء الإحصائيين؟

26 {2, 3, 4, 5, 5, 25} 27 {91, 90, 79, 15, 82, 90, 88}

28 {1, 36, 34, 33, 35, 92}



استعمل بياني الشاربيّن المقابلين، والعائدين إلى

مجموعتي معطيات، حل التمارين من 29 إلى 32.

29 أي مجموعة لها القيمة الكبرى؟ بكم تزيد

هذه القيمة على القيمة الكبرى للمجموعة الأخرى؟

30 أي مجموعة وسيطها هو الأكبر؟ قدر بكم هو أكبر من وسيط المجموعة الأخرى.

31 قدر المدى الربيعي لكل مجموعة.

32 أي مجموعة لها الانحراف المعياري الأصغر؟ أوضح ذلك.

33 حظك في ربح جائزة النصف مليون دينار هو 0.1%، في حين أن حظك في خسارة الألف دينار التي دفعته ثمن البطاقة، هو 99.9%. ما القيمة المتوقعة لربحك: (مساعدة: هناك قيمتان ممكنتان لربحك: 500 000 و -1000)

34 حظك في ربح جائزة المئة ألف دينار هو 10%، وحظك في خسارة 2000 دينار هو 30%. وهناك

احتمال 60% في أن تتوقف اللعبة. ما القيمة المتوقعة لربحك؟

35 خطأ في التحليل في ما يلي محاولتان لإيجاد الانحراف المعياري للمعطيات 4، 6، 8، 10. أي محاولة خطأ؟ أوضح الخطأ.

ب

$7-4=3 \rightarrow 3$
$7-6=1 \rightarrow 1$
$7-8=-1 \rightarrow 1$
$7-10=-3 \rightarrow \frac{3}{8}$
$8 \div 4 = 2$
$\sqrt{2} \approx 1.4$

أ

$7-4=3 \rightarrow 9$
$7-6=1 \rightarrow 1$
$7-8=-1 \rightarrow 1$
$7-10=-3 \rightarrow \frac{9}{20}$
$20 \div 4 = 5$
$\sqrt{5} \approx 2.24$

36 اكتب هل تكون القيمة المتوقعة لمجموعة معطيات واحداً من هذه المعطيات دوماً؟ هل تنتمي أحياناً إلى هذه المجموعة أم لا تنتمي أبداً؟ أعطِ مثلاً يدعم جوابك.

37 تقوم لعبة على رمي مكعبَي أعداد وضرب العددين الظاهريين.

- أ ما القيمة المتوقعة في هذه اللعبة؟
 ب ما احتمال أن يكون أحد نواتج الضرب أكبر من القيمة المتوقعة؟
 ج ما احتمال أن يكون أحد نواتج الضرب أصغر من القيمة المتوقعة؟
 د هل جوابا السؤالين (ب) و (ج) متساويان؟ أوضح ذلك.

38 يُبين الجدول معدلات تساقط المطر السنوية (بالسنتيمتر) من 1994 إلى 2003 في إحدى المدن.

السنة	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
المعدل	9.4	17.0	7.3	7.0	16.1	5.4	6.9	8.5	4.2	9.2

- أ جد المتوسط والانحراف المعياري لهذه المعطيات.
 ب في أي سنوات كان بعد المعدل عن المتوسط أكبر من الانحراف المعياري؟
 ج جد وسيط هذه المعطيات ومداها الربيعي.

تحضير للاختبار

39 أي مجموعة معطيات لها الانحراف المعياري الأصغر؟

- أ {1, 5, 7, 50} ب {100, 200, 300, 400}
 ج {2, 10, 102, 110} د {100, 101, 102, 105}

40 أي مما يلي لا يصح على مجموعتي المعطيات {0, 48, 49, 50, 51, 52, 100} و {0, 1, 2, 50, 98, 99, 100}؟

- أ لهما المتوسط نفسه. ب لهما المدى نفسه.
 ج لهما التباين نفسه. د لهما الوسيط نفسه.

41 كان متوسط نتائج أحد الاختبارات 50. أي مما يلي لا يمكن أن يكون صحيحاً؟

- أ نصفها كان صفراً والنصف الثاني مئة. ب كان المدى 50.
 ج نصف النتائج كان 25 والنصف الآخر 50. د جميعها كانت 50.

تحدّ وتوسّع

42 مجموعة معطيات متوسطها 4 ووسيطها 3 وانحرافها المعياري 1.6.

أ افترض أنك ضربت كل قيمة في 5، فكم سيكون متوسط المجموعة الجديدة؟ وسيطها؟
انحرافها المعياري؟

ب افترض أنك أضفت 5 إلى كل قيمة، فكم سيكون متوسط المجموعة الجديدة؟ وسيطها؟
انحرافها المعياري؟

مراجعة لولبية

43 **تجارة** تعمل سارة في إحدى المكتبات الكبرى. تتقاضى سارة 725 000 دينار في الشهر يُضاف إليها 1750 ديناراً عن كل كتاب تبيعه. قبضت سارة 1 425 000 دينار الشهر الماضي. كم كتاباً باعت؟ (الصفوف السابقة)

جد كل ناتج ضرب. (الصفوف السابقة)

$$44 \quad (2-x^2)(2x^2+5x-3) \quad 45 \quad 4xy^2(x^2y+3x^2-2y)$$

تم رمي مكعب أعداد. ما احتمال كل حدث؟

46 الحصول على 1 أو عدد زوجي.

47 الحصول على 4 أو عدد فردي.

48 الحصول على عدد يقبل القسمة على 2 أو 6.

جمع المعطيات اختبارياً

Collecting Experimental Data



يُمكنك القيام بتجربة لتوليد معطيات وتجميعها وتنظيمها، ثم تحليلها لصوغ مقولات في الرياضيات.

نشاط 1

النرد الأزرق

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

النرد الأحمر

أنشئ جدولاً بمجاميع العددين الناتجين
عن رمي نردين.

- 1 صف كل تناظر تلاحظه على الجدول.
- 2 استعمل الاحتمال النظري لإنشاء توزيع احتمالي.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتماله											

- 3 استعمل التوزيع الاحتمالي السابق لإيجاد القيمة المتوقعة.
- 4 ما المجموع الأكبر احتمالاً وما المجموع الأقل احتمالاً؟
- 5 هل هناك مجاميع تتساوى في الاحتمال؟ اذكرها إن وجدت.

حاول

- 1 ارم نردين 36 مرة، ودون النتائج في جدول.
 - 2 أنشئ توزيعاً احتمالياً باستعمال النتائج التي توصّلت إليها.
 - 3 استعمل التوزيع الاحتمالي الذي حصلت عليه في السؤال 7، لإيجاد القيمة المتوقعة.
- استند إلى الاختبار الذي قمت به للإجابة عن الأسئلة التالية:
- 4 ما المجموع الأكبر احتمالاً؟ وما المجموع الأقل احتمالاً؟
 - 5 هل هناك مجاميع تتساوى في الاحتمال؟ اذكرها إن وجدت.
 - 6 قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج النظرية.
 - 7 تشارك مع عدد من زملائك في نتائج الاختبارات التي قام بها كل منكم. قارن بين النتائج التي حصلت عليها بعد التجميع وبين ما حصلت عليه نتيجة اختبارك. قارن بينها وبين النتائج النظرية.



التوزيعات الثنائية

Binomial Distributions

7-2

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال التوزيعات الثنائية لتحديد حظك في ربح جوائز العروض التجارية. (مثال 3)

تعلّمت في الصف العاشر ضرب الحدوديات. سوف تتعلم الآن حالة خاصة من ضرب الحدوديات وهي نشر قوى ثنائيات الحدود.

الأهداف

يستعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر حدودية ثنائية الحدود. يجد الاحتمالات الثنائية ويختبر الفرضيات.

المفردات

Vocabulary

مبرهنة ذات الحدين
Binomial theorem

نشر قوى ثنائيات الحدود

1

مثال

انشر $(x+y)^3$.

اكتب على صورة ضرب. $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$

اضرب عاملين. $= (x+y)(x^2 + 2xy + y^2)$

وزّع. $= x(x^2) + x(2xy) + x(y^2) + y(x^2) + y(2xy) + y(y^2)$

اضرب. $= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$

بسّط. $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

التجربة الثنائية

Binomial experiment

الاحتمال الثنائي

Binomial probability

1. انشر.

نقطة
مراقبة



ب $(2x-1)^3$

أ $(x+4)^4$

تفحص عوامل نشر $(x+y)^3$. إنها الأعداد الموجودة على الصف من الرتبة 3 في مثلث باسكال.

مثلث باسكال	نشر قوى ثنائية الحدود	
1	1	$(a+b)^0 =$
1 1	$a+b$	$(a+b)^1 =$
1 2 1	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2 =$
1 3 3 1	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b)^3 =$
1 4 6 4 1	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$(a+b)^4 =$
1 5 10 10 5 1	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	$(a+b)^5 =$

تُشكّل الأعداد الواردة في كل صف من صفوف مثلث باسكال معاملات نشر قوة ثنائية الحدود بأسّ يساوي رتبة الصف (لاحظ أن رتب صفوف باسكال تبدأ بالصفر وليس بـ 1). يُمكن استكمال النمط في صفوف مثلث باسكال للحصول على معاملات نشر قوة ثنائية الحدود بأي أس كان $(a+b)^n$ حيث n عدد صحيح غير سالب.

نشر قوى ثنائية الحدود



عند نشر $(a+b)^n$ ، تذكر ما يلي:

1. عدد الحدود في نشر $(a+b)^n$ هو $n+1$.
2. معاملات نشر $(a+b)^n$ هي أعداد مثلث باسكال في الصف n .
3. أس قوة a هو n في الحد الأول ثم ينقص واحدًا كلما انتقلنا حدًا.
4. أس قوة b هو الصفر في الحد الأول، ثم يزيد واحدًا كلما انتقلنا حدًا.
5. مجموع أس قوة a وقوة b في كل حد يساوي n .

من طالب إلى طالب نشر قوى ثنائيات الحدود

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

أستعمل مخططًا لنشر قوى ثنائية الحدود. سوف أستعمل $(x+y)^4$ كمثال. أكتب، في الصف الأول من الجدول، الأعداد الواردة في الصف 4 من مثلث باسكال. أكتب في الصف الثاني من الجدول قوى x بالترتيب التنازلي للأس انطلاقًا من اليسار. في الصف الثالث من الجدول، أبدأ بكتابة قوى y بالترتيب التنازلي للأس انطلاقًا من اليمين. أخيرًا، أضرب الحدود في كل عمود لأحصل على $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

مثال 2 استعمال مثلث باسكال لنشر قوى ثنائية الحدود

انشر القوة ثنائية الحدود.

أ $(y-3)^4$

اكتب أعداد الصف 4 من مثلث باسكال 1 4 6 4 1

$$[1(y)^4(-3)^0] + [4(y)^3(-3)^1] + [6(y)^2(-3)^2] + [4(y)^1(-3)^3] + [1(y)^0(-3)^4]$$

$$y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$$

ب $(4z+5)^3$

اكتب أعداد الصف 3 من مثلث باسكال 1 3 3 1

$$[1(4z)^3(5)^0] + [3(4z)^2(5)^1] + [3(4z)^1(5)^2] + [1(4z)^0(5)^3]$$

$$64z^3 + 240z^2 + 300z + 125$$

2. انشر القوة ثنائية الحدود.



ج $(3x+1)^4$

ب $(x-4)^5$

أ $(x+2)^3$

من ناحية أخرى، هناك علاقة بين مثلث باسكال وأعداد التوافيق.

مثلث باسكال	التوافيق	نشر قوى ثنائية الحدود
1	${}_0C_0$	$(a+b)^0 = 1$
1 1	${}_0C_0$ ${}_1C_1$	$(a+b)^1 = 1$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$	$(a+b)^2 = 1$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$	$(a+b)^3 = 1$

يُمكنك أن تستلهم نمط الجدول السابق لنشر قوة ثنائية حدود باستعمال مبرهنة ثنائية الحدود.

مبرهنة ثنائية الحدود

أيًا يكن العدد الصحيح غير السالب n ، فإن

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}_nC_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_nC_n x^0 y^n$$



نشر قوى ثنائيات الحدود

مثال 3

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر القوة ثنائية الحدود.

$$(x+y)^4$$

اكتب أعداد الصف 4 من مثلث باسكال.

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= {}_4C_0 x^4 y^0 + {}_4C_1 x^3 y^1 + {}_4C_2 x^2 y^2 + {}_4C_3 x^1 y^3 + {}_4C_4 x^0 y^4 \\ &= 1x^4 y^0 + 4x^3 y^1 + 6x^2 y^2 + 4x^1 y^3 + 1x^0 y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$(3p+q)^3$$

اكتب أعداد الصف 3 من مثلث باسكال.

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\begin{aligned} (3p+q)^3 &= {}_3C_0 (3p)^3 q^0 + {}_3C_1 (3p)^2 q^1 + {}_3C_2 (3p)^1 q^2 + {}_3C_3 (3p)^0 q^3 \\ &= 1 \times 27p^3 \times 1 + 3 \times 9p^2 q + 3 \times 3pq^2 + 1 \times 1q^3 \\ &= 27p^3 + 27p^2 q + 9pq^2 + q^3 \end{aligned}$$

تذكّر

عند نشر $(x+y)^n$ ، يتناقص أس x من n إلى 0 ويزداد أس y من 0 إلى n . كما أن جمع الأسين في كل حد هو n .

3. استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر القوة ثنائية الحدود.

$$(a+2b)^3$$

$$(x-y)^5$$



التجربة الثنائية تجربة عشوائية يتكرر فيها، باستقلالية، فعل عشوائي له نتيجتان ممكنتان: النجاح أو الفشل، بحيث يكون احتمال النجاح p هو نفسه في كل مرة، واحتمال الفشل q هو نفسه في كل مرة. بما أن للفعل العشوائي نتيجتين ممكنتين فإن $p+q=1$ أو $q=1-p$. في ما يلي أمثلة على تجارب ثنائية.

التجربة	النجاح	الفشل	احتمال النجاح	احتمال الفشل
رمي قطعة نقود معدنية 10 مرات	الصورة	الكتابة	$p=0.5$	$q=0.5$
رمي النرد 100 مرة	الحصول على 3	الحصول على غير 3	$p=\frac{1}{6}$	$p=\frac{5}{6}$

افترض أن احتمال أن يكون شخص ما أعسر (يكتب باستعمال يده اليسرى) هو 0.1، وأنك ترغب في إيجاد احتمال أن يكون شخصان من بين ثلاثة أعسرين. هناك ${}_3C_2$ طريقة لتكوين مجموعة من شخصين من بين الثلاثة.

ارمز بالحرف L إلى كون الشخص أعسر وبالحرف R إلى كونه غير أعسر. طرق اختيار أعسرين هي LLR و LRL و RLL . احتمال كل من هذه النتائج الممكنة هو $0.1 \times 0.1 \times 0.9$. يقودنا ما سبق إلى قانون الاحتمال الثنائي.

الاحتمال الثنائي



إذا تكررت تجربة ثنائية n مرة باستقلالية، وإذا كان p احتمال النجاح و q احتمال الفشل في كل مرة، فإن احتمال النجاح r مرة من بين n مرة هو:

$$P(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

يُسمى هذا الاحتمال الاحتمال الثنائي.

إيجاد الاحتمالات الثنائية

مثال 4

من كل 5 مراكب تجتاز الممر البحري، واحد يتجه إلى عرض البحر مباشرة متجاوزاً المرفأ. تتجه 4 مركب لتجتاز الممر.

أ ما احتمال أن يتجه مركبان فقط نحو عرض البحر مباشرة؟

احتمال أن يتجه مركب نحو عرض البحر هو $0.2 = \frac{1}{5}$

$$P(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r} \quad n=4 \quad \text{لأن التجربة تتكرر 4 مرات (4 مراكب).}$$

$$P(2) = {}_4 C_2 p^2 q^{4-2} \quad \text{عدد النجاحات } r=2 \text{ (مركبان فقط يتجهان إلى عرض البحر).}$$

$$= 6(0.04)(0.64) = 0.1536$$

احتمال أن يتجه مركبان فقط نحو عرض البحر مباشرة هو 15.36%

ب ما احتمال أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة؟

أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة يعني أن يتجه نحو عرض البحر مركبان أو ثلاثة أو أربعة.

$$P(2) + P(3) + P(4)$$

$${}_4 C_2 (0.2)^2 (0.8)^{4-2} + {}_4 C_3 (0.2)^3 (0.8)^{4-3} + {}_4 C_4 (0.2)^4 (0.8)^{4-4}$$

$$0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808$$

احتمال أن يتجه مركبان على الأقل نحو عرض البحر مباشرة هو 18.08%

4. **أ** تُحدّد إدارة المدرسة عشوائياً لكل طالب أستاذاً من بين ثلاثة أساتذة ليكون

مرجعه في أمور الدراسة.

ما احتمال أن يكون الأستاذ أوميد مرجع اثنين من الطلاب الثلاثة المقبلين؟

ب ستتقدم شيرين إلى اختبار من نوع الخيار من متعدد، يتألف من 5 أسئلة لكل

منها 4 إجابات مقترحة.

ما احتمال أن تجيب بشكل صائب عن سؤالين على الأقل؟



تطبيق على حل المسائل

مثال 5

تقدّم شركة مرطبات عرضاً تجارياً لمشتري الزجاجات التي تنتجها. طبعت على أغلبية بعض الزجاجات صورة لمن يحالفه الحظ. ذكرت الشركة أنها طبعت صور الهدية بمعدل زجاجة واحدة من كل 4 زجاجات. اشترى شيروان 10 زجاجات. ما احتمال أن يربح هديتين على الأقل؟



1 افهم المسألة

المطلوب احتمال أن يربح شيروان هديتين على الأقل.

اذكر المعلومات المهمة :

- اشترى شيروان 10 زجاجات.
- الاحتمال الثنائي في أن تربح الزجاجاة هدية هو $0.25 = \frac{1}{4}$.

2 خطط

الطريقة المباشرة لحل المسألة هي حساب $P(2) + P(3) + \dots + P(10)$. غير أن حساب احتمال الحدث المتمم يبدو أسهل؛ ذلك أنه يتطلب حساب $P(0) + P(1)$ ، لأن الحدث المتمم لربح هديتين على الأقل هو ربح هدية واحدة أو عدم ربح أي هدية. جد احتمال الحدث المتمم وا طرحه من 1.

3 حل

الخطوة 1 جد

$$\begin{aligned}
 & P(0) + P(1) \\
 & P(0) + P(1) = {}_{10}C_0 (0.25)^0 (0.75)^{10-0} + {}_{10}C_1 (0.25)^1 (0.75)^{10-1} \\
 & = 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^9 \\
 & \approx 0.0563 + 0.1877
 \end{aligned}$$

الخطوة 2 استعمل الحدث المتمم لإيجاد الجواب.

$$1 - 0.2440 \approx 0.7560$$

احتمال أن يربح شيروان هديتين هو 0.76 تقريباً.

4 تحقق

الجواب معقول. فالقيمة المتوقعة للربح هي $10 \times \frac{1}{4} = 2.5$ أي $\frac{10}{4}$ وهو قريب من 2. إذن، احتمال أن يربح شيروان هديتين على الأقل يتجاوز 0.5.

5. ☐ أ سيتقدم بيستون إلى اختبار من نوع الخيار من متعدد يتألف من 20

سؤالاً، لكل منها 4 إجابات مقترحة.

ما احتمال أن يجيب بشكل صحيح عن سؤالين على الأقل؟

☐ ب تنتج آلة نوعاً من قطع الغيار للسيارات. احتمال أن تكون القطعة صالحة

هو 98%. أنتجت الآلة 25 قطعة. ما احتمال ألا يزيد عدد القطع الصالحة

على 23؟



فكر وناقش

1. ما درجة الحدودية الناتجة عن نشر $(2x+8)^7$ ؟ ما عدد حدودها؟
2. كم يساوي $p+q$ في تجربة ثنائية؟ أوضح جوابك.
3. ما المقادير الثلاثة التي تضربها في بعضها لإيجاد احتمال النجاح r مرة في تجربة ثنائية تتكرر n مرة؟
4. كن منظماً انسخ الجدول وأكمله. حل كل مسألة تكتبها.

التجارب الثنائية	
مثال	احتمال
	احتمال r نجاح في تجربة تتكرر n مرة
	احتمال r نجاح على الأقل في تجربة تتكرر n مرة
	احتمال r نجاح على الأكثر في تجربة تتكرر n مرة
	احتمال باستعمال الحدث المتمم



التمارين

7-2

تمارين موجّهة

1 مفردات عدد النتائج الممكنة في تجربة ثنائية هو _____

انشر كل مقدار بالضرب.

(x-3y)³ 5 (x+1)⁴ 4 (x+y)⁴ 3 (x+2)³ 2

انشر كل مقدار باستعمال مثلث باسكال.

(2x-y)⁵ 9 (x+2y)³ 8 (2x+y)⁴ 7 (x-2)⁴ 6

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

(x+y)⁶ 13 (p-2)⁶ 12 (3x+5)³ 11 (x+3)⁴ 10

14 على مدير المدرسة أن يختار 6 طلاب للمشاركة في صورة تذكارية لطلاب المدرسة.

ما احتمال أن يكون بين الطلاب الستة 4 رياضيين علماً بأن احتمال أن يكون الطالب رياضياً هو 30%؟ ما احتمال أن يكون 4 من الطلاب على الأقل رياضيين؟

15 تسوق يعرض قسم الحلوى في أحد المتاجر ألواح الشوكولاتة. واحد من كل 5 ألواح

يحمل قسيمة مخفية تخول الشاري الحصول على اللوح مجاناً. اشترت ميان 4 ألواح من الشوكولاتة، ما احتمال أن تربح 3 بطاقات؟ ما احتمال أن تربح بطاقتين على الأقل؟

انظر المثال 5

16 صناعة يُوضَّب مصنع منتجاته في علب كرتونية، ويطبع على الوجه العلوي من كل علبة طابعه الخاص. إلا أن احتمال أن يكون الطابع على الوجهين العلوي والسفلي هو 2%. حُمِلت شاحنة 30 علبة. ما احتمال أن تحمل علبتان طابع المصنع على الوجهين العلوي والسفلي؟

تمارين وحلُّ مسائل

انشر كل مقدار بالضرب.

$$(4+y)^3 \quad \mathbf{20}$$

$$(x-y)^4 \quad \mathbf{19}$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^4 \quad \mathbf{18}$$

$$(2x-2)^3 \quad \mathbf{17}$$

انشر كل مقدار باستعمال مثلث باسكال.

$$(2x-3y)^4 \quad \mathbf{24}$$

$$(x+y)^5 \quad \mathbf{23}$$

$$(x-2)^5 \quad \mathbf{22}$$

$$(x-3y)^4 \quad \mathbf{21}$$

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

$$(2a+3c)^3 \quad \mathbf{28}$$

$$(4+3x)^5 \quad \mathbf{27}$$

$$(2m-1)^3 \quad \mathbf{26}$$

$$(y+5)^4 \quad \mathbf{25}$$

29 حقوق مدنية جرى استفتاء 100 000 مواطن حول حق الإنسان في التعبير عن رأي غير شعبي، وكان 83% من المستفتين مع هذا الحق. جرى اختيار 8 من المستطلعين بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون 6 منهم على الأقل مع هذا الحق؟

30 تم سحب 5 كرات من كيس غير شفاف الواحدة بعد الأخرى، مع إعادة كل كرة قبل سحب الكرة التالية. احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء هو 15%. ما احتمال أن تكون كرتان من بين الخمس سوداوين؟ ما احتمال أن تكون كرتان على الأقل من بين الخمس سوداوين؟

31 جينات تنتظر امرأة حامل أن تلد 3 توائم. ما احتمال أن تكون التوائم ذكراً وأنثيين؟ ما احتمال أن تكون التوائم الثلاثة إناثاً؟

32 علم النبات احتمال أن تزهر شجرة من نوع معين هو 25%. ما احتمال أن تزهر 4 شجرات من بين 15 شجرة من هذا النوع، تم اختيارها عشوائياً؟

استعمل مبرهنة ثنائية الحدود لنشر المقدار.

$$(p+q)^7 \quad \mathbf{36}$$

$$(4k-1)^4 \quad \mathbf{35}$$

$$(c+6)^3 \quad \mathbf{34}$$

$$(x-y)^5 \quad \mathbf{33}$$

37 سفر تسجِّل شركات الطيران حجوزاً على الطائرة تزيد على عدد مقاعدها، ذلك أن بعض المسافرين يُلغون حجزهم في آخر لحظة. افترض أن احتمال ألا يلغي الراكب حجزه هو 0.91. سجَّلت الشركة 22 حجراً على طائرة من 20 مقعداً. ما احتمال أن يجد كل مسافر مقعداً؟

38 جينات وضعت أنثى القنفذ 4 جراء. ما احتمال أن يكون الأربعة ذكوراً؟ ما احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل ذكوراً؟



جد كل احتمال، عند رمي قطعة نقود معدنية 10 مرات.

39 أكثر من 7 كتابات 40 كتابتان على الأقل 41 5 كتابات فقط

42 **مراقبة الجودة** يُنتج أحد المصانع قطع غيار للسيارات. احتمال أن تكون القطعة صالحة هو 95%. ما احتمال ألا يزيد عدد القطع غير الصالحة في صندوق من 8 قطع على قطعة واحدة؟

43 **حاسبة بيانية** تتضمن الحاسبة البيانية الدالة randBin لمحاكاة تجربة ثنائية وحساب عدد حالات النجاح. لمحاكاة تجربة ثنائية من $n=6$ فعلاً عشوائياً واحتمال نجاح $p=0.3$ وعدد نجاحات $r=5$ ، اضغط على **MATH** واختر PRB ثم randBin(وأدخل 6 ثم 0.3 ثم 5، فاصلاً بين كل عدد والآخر بالفاصلة ",". **أ** حاك تجربة عشوائية ثنائية من $n=5$ أفعال عشوائية، واحتمال نجاح $p=0.8$ وعدد نجاحات $r=5$.

ب استعمل القانون لإيجاد احتمال 4 نجاحات.

ج قارن بين النتيجتين.

44 **خطوات متعددة** $p=0.8$ و $n=10$. استعمل الحاسبة البيانية لتجد الاحتمال الثنائي لعدد نجاحات من 0 إلى 10. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة. أنشئ أعمدة بيانية لتمثيل النتائج التي حصلت عليها.

صِف هيئة الرسم البياني. ما العلاقة بين هذا الرسم البياني والقيمة المتوقعة؟

45 **تفكير ناقد** أيهما أكثر احتمالاً: عائلة من 4 أولاد، هم بنتان وصبيان، أم عائلة من 4 أولاد، هم ثلاثة من جنس واحد، والرابع من الجنس الآخر؟

46 يبلغ العدد المتوقع لأيام المطر في إحدى المناطق 82 يوماً في السنة، بالاستناد إلى معطيات تاريخية. افترض أن نزول المطر في مختلف الأيام أحداث مستقلة.

أ ما احتمال أن يكون يوم اختيار عشوائياً، يوماً ماطرًا؟

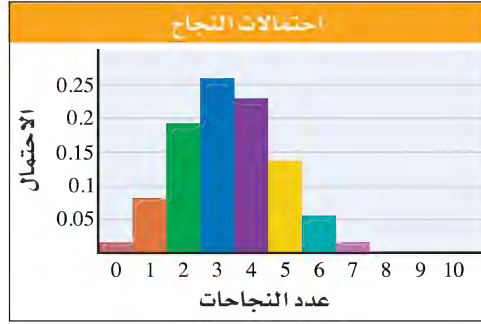
ب ما احتمال أن يكون عدد الأيام الماطرة في أسبوع اختيار عشوائياً، 3 فقط؟

ج ما احتمال أن يكون عدد الأيام الماطرة في أسبوع اختيار عشوائياً، 3 على الأقل؟

47 يحتوي كيس غير شفاف على 10 كرات نصفها أحمر والنصف الآخر أزرق. سحب أوميد 3 كرات على التوالي من دون إعادة، ودوّن في كل مرة لون الكرة المسحوبة. أوضح السبب الذي يجعل هذه التجربة العشوائية غير ثنائية.

48 **سفر** بيّنت دراسة قامت بها إحدى شركات الطيران، أن 45% من المسافرين يحملون أكثر من حقيبة بأيديهم عند صعودهم إلى الطائرة. استقبلت المضيضة، في إحدى الرحلات أول 5 مسافرين. ما احتمال ألا يقل عن 3 عدد الذين يحملون أكثر من حقيبة؟

49 **اكتب** صِف حالة يكون مناسباً فيها استعمال الحدث المتمم لحساب الاحتمال الثنائي.



تقدير استعمل الرسم البياني المقابل لحل

التمرينين 50 و 51. يُبين هذا الرسم

احتمالات r نجاحات في تجربة ثنائية
يتكرر فيها الفعل العشوائي 10 مرات.

50 قدّر احتمال ألا يزيد عدد النجاحات على 2.

51 قدّر قيمة احتمال النجاح p . أوضح كيف

وجدت الجواب.

تحضير للاختبار

52 أي مما يلي خطأ في تجربة ثنائية؟

أ) النتائج الممكنة اثنتان: نجاح أو فشل

ج) الأفعال العشوائية مترابطة

ب) احتمال النجاح ثابت

د) الأفعال العشوائية هي نفسها

53 تتألف تجربة ثنائية من تكرار مرتين لفعل عشوائي، احتمال النجاح فيه 40%. ما احتمال
النجاح مرة واحدة؟

أ) 16% ب) 36% ج) 48% د) 52%

54 تتألف تجربة ثنائية من تكرار خمس مرات لفعل عشوائي، احتمال النجاح فيه 20%. أي مما يلي
يعطي احتمال النجاح 3 مرات؟

أ) $3(0.2)^3(0.8)^2$ ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ د) $10(0.2)^2(0.8)^3$

55 **جواب فقط** يُنتج أحد المصانع قطعاً إلكترونية للحواسيب. احتمال أن تكون القطعة
غير صالحة هو 4%. جرى اختيار 10 قطع بشكل عشوائي. ما احتمال ألا يكون بينها أكثر من
قطعة واحدة غير صالحة؟ قَرّب الجواب إلى أقرب نسبة مئوية صحيحة.

56 **جواب قصير** يحمل 18.8% من مواطني أحد البلدان أحد الأسماء المئة الأكثر شيوعاً. جرى
اختيار 10 أشخاص بشكل عشوائي. ما احتمال أن يحمل 3 منهم أو أكثر اسماً من تلك الأسماء.

تحدّ وتوسّع

57 **جينات** احتمال أن يكون المرء أعسر هو 0.1. يجلس 650 شخصاً في قاعة محاضرات.

أ) ما العدد المتوقع للأشخاص العُسر في القاعة؟ أوضح ذلك.

ب) يُحسب الانحراف المعياري لتجربة ثنائية مؤلفة من تكرار فعل عشوائي n مرة باستعمال
القاعدة $\sigma = \sqrt{npq}$. ما قيمة الانحراف المعياري؟

58 جد كلاً من الاحتمالين واذكر أيهما أكبر.

أ) الحصول على العدد 1 مرة واحدة على الأقل عند رمي النرد 6 مرات.

ب) الحصول على العدد 1 مرتين على الأقل عند رمي النرد 12 مرة.

59 بيّن أن أي عدد C_{r+1} في مثلث باسكال يساوي مجموع العددين اللذين يُحيطان به C_r و C_{r+1} حيث $r \neq 0$ ، $r \neq n$ و $n > 1$.

60 **بولينغ** احتمال أن يُصيب لاعب البولينغ مرة واحدة في محاولتين هو 40%.

- أ اكتب معادلة لحساب p ثم حلّها.
 ب ما احتمال أن يُصيب اللاعب في المحاولتين؟

مراجعة لولبية

احسب في كل حالة $f(-3)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ؟ (الصفوف السابقة)

62 $f(x) = (-x)^2 - 3x + 1$

61 $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

حدّد إن كان y دالة أسية بدلالة x . إذا كان الأمر كذلك، استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد دالة أسية تمثل معطيات الجدول.

63	x	1	2	3	4	5
	y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

64	x	1	2	3	4	5
	y	10	22	36	52	70

جد المتوسّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات. (الدرس 2-6)

66 $\{6, 13, 9, 7, 6, 4\}$

65 $\{2, 18, 15, 14, 18\}$

68 $\{10, 5, 15, 5, 8\}$

67 $\{24, 20, 32, 24, 16, 34\}$

الفصل

2

دليل الدراسة : مراجعة

حلّ بيانياً نظام المتباينات الخطية.

$$\begin{cases} y-3x < 3 \\ 3y \geq x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1 > 4x \\ y \leq x+1 \end{cases}$$

حلّ بيانياً نظام المتباينات الخطية وصنّف الشكل الهندسي الذي يُمثل منطقة الحل.

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -x+2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$$

14 إدارة أعمال يرغب صاحب محل لبيع البن أن يحضّر ما لا يزيد على 120 كيلوغراماً من خليط نوعين من البن يقل ثمن الكيلوغرام الواحد منه عن 10 000 دينار. استعمل لأجل ذلك نوعاً ثمن الكيلوغرام الواحد منه 8 000 دينار ونوعاً آخر ثمن الكيلوغرام منه 11 500 دينار. اكتب نظام متباينات يبيّن الكمّيات المستعملة من النوعين، ثم حلّ النظام بيانياً.

15 يقدم أحد المقاهي شطائر باردة وأخرى ساخنة.

يبيّن الجدول معطيات عن الشطائر التي يبيعها المقهى. لا يتعدّى عدد الشطائر التي يبيعها المقهى 125 شطيرة من النوعين يومياً. يربح المقهى 750 ديناراً في الشطيرة الباردة و 1000 دينار في الشطيرة الساخنة. كم شطيرة من كل نوع عليه أن يبيع في اليوم ليحقق أقصى ربح ممكن؟

الحد الأقصى	الحد الأدنى	الشطائر المباعة
80	60	باردة
60	40	ساخنة

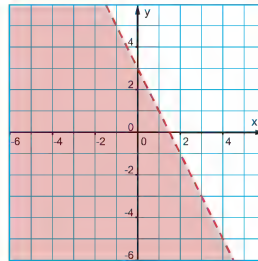
حدّد بيانياً منطقة الجدوى.

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 0 \\ y < 2x+1 \\ y \leq -x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+1 \\ y \leq -\frac{3}{4}x+6 \end{cases}$$

حلّ بيانياً كلا من المتباينات التالية:

$$y \leq x+3 \quad y > -3$$

$$6x-2y > 8 \quad 2x+4y > -12$$

**5** اكتب متباينة بمجهولين بحيث يشكّل الرسم المقابل حلّها البياني.**6** تتبع إدارة أحد المتاحف نوعين من بطاقات الدخول: بطاقة صالحة

ليوم واحد وثمنها 12 000 ديناراً وبطاقة صالحة ليومين وثمنها 21 000 دينار. كانت مبيعات بطاقات الدخول في أحد الأيام أكثر من 2 520 000 ديناراً. اكتب متباينة وحلّها بيانياً.

7 أنشئ نقاطاً بيانية تمثّل معطيات الجدول. جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 يبيّن الجدول أدناه معطيات عن المدخول السنوي لبعض الأشخاص، وقيمة المنزل الذي يملكونه.

المدخول السنوي (بملايين الدنانير)	قيمة المنزل (بملايين الدنانير)
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

أ مثّل بيانياً هذه المعطيات، مستعملاً المدخول كمتغيّر حر.**ب** جد معامل الارتباط r والمستقيم الأكثر تمثيلاً.**9** بلغت مبيعات فرع أحد المخازن الكبرى 12 مليار دينار. كانت مبيعات أحد الفرعين 75% على الأقل من مجموع المبيعات. اكتب نظام متباينات خطية، وحلّه بيانياً لتحديد المبيعات الممكنة لكل من الفرعين.

جد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.

$$6, 8, 0, 8, 5 \quad 30$$

$$12, 15, 13, 13, 15, 12 \quad 31$$

32 يُبين الجدول التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث يوميًا في مدينة صغيرة. جد العدد المتوقع للحوادث في يوم.

عدد الحوادث n	0	1	2	3
احتمال n حادثًا	0.65	0.22	0.1	0.03

33 أنشئ بيان الشاربين لمجموعة المعطيات ثم حدّد المدى الربيعي: 33, 52, 65, 48, 83, 29, 50, 71.

34 كان عدد السباقات التي ربحها أحد سائقي السيارات الرياضية في كل عام من الأعوام العشرة الماضية كما يلي: 5, 7, 4, 11, 8, 10, 6, 9, 7. جد عدد السباقات التي لا يزيد بعدها عن المتوسط انحرافًا معياريًا واحدًا.

35 تقدم طلاب الصف النهائي لاختبار الدخول إلى الجامعة، وكان متوسط درجاتهم 81.3، بينما كان الانحراف المعياري 4.4. نال كاوه 96 درجة من 100. هل درجته قيمة متطرفة .

36 كانت درجات نشميل في 6 اختبارات كما يلي: 73, 88, 86, 90, 87, 29. جد المتوسط والانحراف المعياري لهذه المعطيات. كانت درجتها في الاختبار السابع 32. أوضح تأثير هذه الدرجة على كل من المتوسط والانحراف المعياري.

انشر باستعمال مبرهنة ثنائية الحدود.

$$(x-2y)^4 \quad 38 \quad (5+2x)^3 \quad 37$$

39 سردار هدا في فريق لكرة القدم. احتمال أن يصيب الهدف في ضربة حرة هو 0.65. نال سردار 75 ضربة حرة. جد العدد المتوقع لإصابته الهدف، في هذه الضربات وجد الانحراف المعياري.

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x+3 \end{cases} \quad 19 \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ y > \frac{1}{2}x - 6 \end{cases} \quad 18$$

20 ما أقصى قيمة لدالة المنفعة $p=6x+10y$ تحقق شروط التمرين 16؟

21 ما أقصى قيمة لدالة المنفعة $p=14x+9y$ تحقق شروط التمرين 17؟

تنتج إحدى المؤسسات نوعين من نعال الأحذية: نوع سميك يتطلب تصنيع الوحدة منه 6 دقائق ويحقق ربحاً قدره 8 000 دينار، ونوع رقيق يتطلب تصنيع الوحدة منه 4 دقائق ويحقق ربحاً قدره 9 000 دينار. بمقدور شبكة الإنتاج أن تعمل حتى 12 ساعة، أو 720 دقيقة يوميًا. تبعاً لمتطلبات السوق، تنتج المؤسسة من النعال السمكة ضعفين على الأقل مما تنتجه من النعال الرقيقة.

22 اكتب البرنامج الخطّي الذي يمثل هذه المسألة، وحدّد بيانياً منطقة الجدوى.

23 اكتب دالة المنفعة.

24 ما أعلى ربح يُمكن للمؤسسة أن تحقّقه في يوم واحد؟

25 مبيعات يبيع محل للهواتف الجوالّة ما بين 10 و 52 هاتفًا جوالًا مع عقد للصيانة؛ وما بين 5 و 10 هواتف من دون عقد صيانة. لا تتعدى مجمل مبيعات المحل 30 هاتفًا في اليوم. يربح المحل 35 000 دينار في كل هاتف يبيعه مع عقد صيانة، و 5 000 دينار في كل هاتف يبيعه بدون عقد صيانة. كم هاتفًا من كل نوع عليه أن يبيع ليحقق أقصى ربح ممكن؟

استعمل الحذف لحل كل نظام.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases} \quad 27 \quad \begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases} \quad 26$$

صنّف النظام وحدّد عدد حلوله.

$$\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases} \quad 29 \quad \begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases} \quad 28$$

الفصل

2

اختبار الفصل

6 جد القيمة الصغرى لدالة المنفعة $P=5x+9y$ تحت

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x+1 \\ y \leq -3x+6 \end{cases} \quad \text{الشروط التالية:}$$

صنّف النظام الخطّي وحلّ بالحذف النظام المحدّد.

$$\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+y+2z=8 \\ 6x-2y-2z=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+z=-2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 2x-3y+2z=-7 \end{cases}$$

يُبيّن الجدول أدناه عدد الأقمار لكل كوكب في النظام الشمسي.

عدد الأقمار	الكوكب
0	عطارد
0	الزهرة
1	الأرض
2	المريخ
63	المشتري
33	زحل
27	أورانوس
13	نبتون
1	بلوتو

9 هل القيمة 63 قيمة متطرفة؟ أوضح ذلك.

10 احسب المتوسط والوسيط والمنوال والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات التالية: 93، 107، 110، 103، 98، 95، 12، 111، 128، 99، 114، 90. حدّد القيم المتطرفة في هذه المجموعة. اشرح كيف يتأثر المتوسط والانحراف المعياري بالقيم المتطرفة.

11 انشر ثنائية الحدود $(3x+4)^4$.

احتمال الربح في إحدى الألعاب هو 15%. لعب هشيار 10 مرات.

12 جد احتمال أن يربح مرتين.

13 جد احتمال أن يربح مرتين على الأقل.

1 يبيع نادي دهب قمصاناً وقبعات تحمل شعار

النادي، ليجمع 2 400 000 دينار على الأقل. ثمن القميص 15 000 دينار وثمان القبعة 8 000 دينار. اكتب متباينة تمثّل عدد القبعات وعدد القمصان التي يجب بيعها. حلّ المتباينة بيانياً.

2 قام فريق من الباحثين بدراسة عن المستشفيات، ودوّن في جدول معطيات عدد الأسرة وعدد العاملين في المستشفى.

عدد الأسرة	عدد العاملين
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

أ مثّل بيانياً معطيات الجدول معتمداً عدد الأسرة كمتغيّر حر.

ب جد معامل الارتباط ومعادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم مع النقاط البيانية.

ج قدّر عدد الأسرة في مستشفى يعمل فيه 80 شخصاً.

حلّ بيانياً نظام المتباينات.

$$\begin{cases} y+x \geq 3 \\ y-4 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-4x \geq 4 \\ y-x \geq 1 \end{cases}$$

5 كيمياء يعمل أحد الكيميائيين على تركيب 250 ml

على الأكثر من محلول ملوحته 18% على الأقل باستعمال محلولين: ملوحة الأول 9% والثاني 24%. اكتب نظام متباينات وحلّه لتجد الكمية التي عليه استعمالها من كل محلول.

اختبار تراكمي

الفصل

2

7 كلفة استئجار سيارة 39 950 ديناراً يُضاف إليها 400 دينار عن كل كيلومتر تقطعه السيارة. أي مما يلي يُمثل بشكل أفضل العلاقة بين الكلفة C وعدد الكيلومترات المقطوعة k ؟

- أ $C = 39\,950 + 400k$
 ب $C = 39\,950k + 400$
 ج $C = 39\,950 + 400k$
 د $C = 39\,950k + 400k$

8 ما تقاطعات المستوي $2x + y - 5z = 20$ مع محاور الفضاء الإحداثي؟

- أ $z = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 0$
 ب $z = -5$ ، $y = 1$ ، $x = 2$
 ج $z = -4$ ، $y = 20$ ، $x = 10$
 د $z = 4$ ، $y = 20$ ، $x = 10$

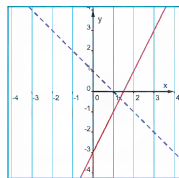
9 رؤوس منطقة الجدوى هي النقاط $(0,0)$ ، $(-2,6)$ ، $(3,-1)$ ، $(-1,1)$ ، $(-5,-5)$. ما القيمة الكبرى لدالة المنفعة $P = 4x - y$ في هذه المنطقة؟

- أ 0 ب 7 ج 13 د 25

10 يقصد رفند جامعة تبعد عن منزله 660 km. قدر رفند أن عليه أن يقود سيارته 8 ساعات تقريباً إذا قاد بسرعة ثابتة قدرها 90 km/h. أي من الدوال أدناه تمثل عدد الكيلومترات التي قطعها رفند بعد x ساعة من مغادرته المنزل؟

- أ $f(x) = 660 - 90x$ ب $f(x) = 660 + 90x$
 ج $f(x) = 660 - 80x$ د $f(x) = 90x$

11 أي نظام متباينات له منطقة الحل التالية؟

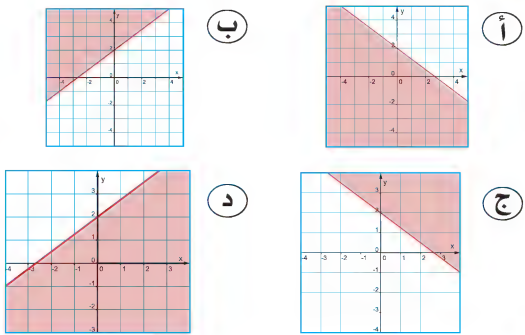


- أ $\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y \geq -x + 1 \end{cases}$ ب $\begin{cases} y \leq 2x - 3 \\ y > -x + 1 \end{cases}$
 ج $\begin{cases} y < 2x - 3 \\ y > -x + 1 \end{cases}$ د $\begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ y < -x + 1 \end{cases}$

1 أي مما يلي معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة $(-2, 7)$ وميله -3 ؟

- أ $y = -3x - 1$ ب $y = -3x + 1$
 ج $y = -3x + 13$ د $y = -\frac{1}{3}x + 1$

2 أي مما يلي يُمثل منطقة الحل للمتباينة $y + \frac{3}{4}x \geq 2$ ؟



3 أي من مجموعات الأعداد التالية لا ينتمي إليها -3 ؟

- أ الصحيحة ب الحقيقية
 ج النسبية د الطبيعية

4 اكتب المقدار $4\sqrt{50} + 3\sqrt{72}$ على أبسط صورة.

- أ $4\sqrt{7}$ ب $7\sqrt{12}$
 ج $12\sqrt{5}$ د $38\sqrt{2}$

5 ما ميل المستقيم $-3y = 6x + 12$ ؟

- أ -4 ب -2 ج $-\frac{1}{2}$ د $-\frac{1}{4}$

6 يُبين الجدول أدناه معطيات عن الأجور اليومية التي يتقاضاها العاملون في إحدى الشركات وفقاً لسنوات خبرتهم. أي مما يلي يمثل قيمة معقولة لميل المستقيم الأفضل تمثيلاً؟

الأجر بالدنانير	عدد سنوات الخبرة
33 407	0
34 273	2
37 882	5
40 185	8
42 977	10
45 864	12
53 811	15

- أ 450 ب 750 ج 1275 د 2650

الفصل 2 أنظمة المعادلات والمتباينات الخطية

12 أي من الأنظمة الخطية أدناه نظام محدد؟

أ $\begin{cases} 2y + 3x = -8 \\ 9x = -24 - 6y \end{cases}$ ب $\begin{cases} 2y + 7x = 24 \\ 5y - 6 = -4x \end{cases}$

ج $\begin{cases} y = -x + 4 \\ 3y + 3x = -21 \end{cases}$ د $\begin{cases} 2y = 3x - 6 \\ 8y - 12x = 80 \end{cases}$

جواب مختصر

13 عند حساب مجموع النقاط التي يحصل عليها المرشح لامتحانات الدخول إلى كلية الطب، يتم ضرب الدرجة التي نالها في العلوم في 2، والدرجة التي نالها في الرياضيات في 3، والدرجة التي نالها في الأحياء في 4. أمّا درجته في اللغة فلا تُضرب في أي معامل. كانت درجات شيرزاد 49 في اللغة، و 32 في الفيزياء، و 2 في الرياضيات. وكان مجموع نقاطه 411. كم كانت درجته في الأحياء؟

14 جد أصغر عدد صحيح موجب يشكّل حلاً للمتبينة $\frac{|430-3x|}{3} > 816$.

15 أكل هلو 3 قطع من البيتزا، و 8 ثمرات من الفريز، واكتسب 975 سعرة حرارية. بينما اكتسب بلند 950 سعرة حرارية، بعد أن أكل 4 قطع من البيتزا و 6 ثمرات من الفريز. كم سعرة حرارية في قطعة البيتزا؟

جواب مختصر

16 اشترت مجموعة من زوار حديقة الحيوانات 4 بطاقات دخول للكبار، و 5 بطاقات للصغار، ودفعت 68 000 دينار، بينما دفعت مجموعة أخرى 216 000 دينار ثمنًا لـ 12 بطاقة للكبار و 17 بطاقة للصغار.

أ اكتب نظام معادلات يمثل المسألة.

ب حلّ هذا النظام بيانيًا.

ج حلّ النظام باستعمال طريقة أخرى. أوضح السبب الذي يجعل الطريقة التي استعملتها أفضل من الطريقة البيانية. ما ثمن البطاقة من كل نوع؟

17 النقطة B هي صورة النقطة A(3,4) بالانعكاس حول المحور الأول.

أ ما إحداثيًا النقطة B؟

ب النقطة C هي صورة النقطة B بالسحب 3 وحدات إلى اليسار، ووحدتين إلى أسفل. ما إحداثيا C؟

18 الدالة $g(x)$ هي الدالة الناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = 4x - 3$ بسحب إلى أسفل 5 وحدات.

أ اكتب معادلة الدالة $g(x)$.

ب اكتب معادلة الدالة $h(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $g(x)$ ، بالانعكاس حول المحور الأول.

جواب مفصل

19 في مصنع الستائر 820 علبة من خيوط القطن و 1250 علبة من خيوط النايلون. يستهلك صنع ستارة من النوع الرخيص 18 علبة من خيوط القطن و 32 علبة من خيوط النايلون، بينما يستهلك صنع ستارة من النوع الجيد 36 علبة من خيوط القطن و 28 علبة من النايلون.

أ اكتب شروط المسألة.

ب ارسم منطقة الجدوى، وحدد رؤوسها.

ج يربح المصنع 170 000 دينار في الستارة من النوع الرخيص، و 190 000 دينار في الستارة من النوع الجيد. اكتب دالة المنفعة.

د كم ينبغي أن يصنّع المصنع من كل نوع، ليحقق أقصى ربح؟

المصفوفات Matrices

الفصل

3

الفصل الأول

الدروس

- | | |
|-------------------------------|-----|
| المصفوفات | 1-3 |
| ضرب المصفوفات | 2-3 |
| المصفوفات والتحويلات الهندسية | 3-3 |
| المحددات | 4-3 |

اختبار جزئي

- | | |
|--------------------------------------|-----|
| مقلوب المصفوفة | 5-3 |
| تكنولوجيا حل نظام خطي باستعمال Excel | |
| الأعداد المركبة | 6-3 |
| العمليات على الأعداد المركبة | 7-3 |

العالم التقني

يُمكنك استعمال المصفوفات لعرض المعطيات وتحليلها، كتزايد عدد المراهقين الذين يملكون آلات تكنولوجية.

هل أنت مستعد؟

المُفردات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | | | |
|----|---|---|-------------------|
| أ | عملية لا يتغير ناتجها إذا بادلت بين عاملَيْها مثل $a+b=b+a$ و $ab=ba$. | 1 | نصف قطر الدائرة |
| ب | المسافة بين مركز الدائرة ونقطة عليها. | 2 | النظام المستحيل |
| ج | نظام معادلات لا حلول له. | 3 | النظام غير المحدد |
| د | تغيير في موقع شكل هندسي أو في قياساته أو في هيئته. | 4 | التحويل الهندسي |
| هـ | نظام معادلات له عدد غير محدود من الحلول | | |

جمع الأعداد الصحيحة وطرحها

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | | | |
|----|------------------|---|------------------|---|-------------|
| 7 | $-2+(-3)+(-5)$ | 6 | $-8+14+(-3)$ | 5 | $2+7+(-10)$ |
| 10 | $9+8-7+5-(-3)+2$ | 9 | $20-(-5)+(-3)-2$ | 8 | $-9+15-7+1$ |

ضرب الأعداد الصحيحة وقسمتها

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | | | | | |
|----|-----------------|----|----------|----|----------|----|--------------|
| 14 | $-15 \div (-3)$ | 13 | $16(-2)$ | 12 | $-6(-1)$ | 11 | $-18 \div 9$ |
|----|-----------------|----|----------|----|----------|----|--------------|

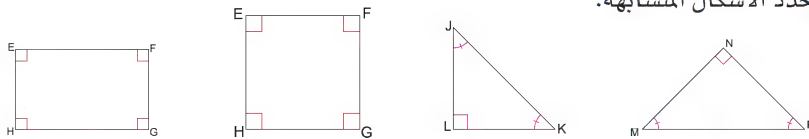
تراتب العمليات

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---------------------|
| 16 | $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$ | 15 | $2(0.5)+2(0.6)$ |
| 18 | $4(3-6+2)-5(2+0-1)$ | 17 | $3(2+7+0)-5(3+6+4)$ |

تمييز الأشكال المتشابهة

حدّد الأشكال المتشابهة.



إيجاد القياسات المجهولة في الأشكال المتشابهة

- | | |
|----|--|
| 20 | المثلثان DEF و ABC متشابهان. $m\widehat{FDE} = 35^\circ$. أي زاوية أخرى يساوي قياسها 35° ؟ |
| 21 | المثلثان JKL و FGH متشابهان. $JL=12$ ، $GH=12$ ، $FH=8$ ، جد KL . |

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Adress	العنوان
Dimensions	الرتبة
Entry	العنصر
Main diagonal	القطر الرئيس
Matrix	المصفوفة
Square matrix	المصفوفة المربعة

في الماضي

درست سابقاً

- تنظيم المعطيات في جداول.
- إجراء العمليات على الأعداد الحقيقية.
- حل الأنظمة الخطية 2×2 .
- حل معادلات تربيعية.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- تنظيم المعطيات في مصفوفات.
- إجراء العمليات على المصفوفات.
- حل نظام معادلات خطية باستعمال المصفوفات.
- تحويل أشكال هندسية باستعمال المصفوفات.
- إجراء العمليات على الأعداد المركبة.

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل،
تابع الخطوات التالية:

1. يُخبرك عنوان عدد في مصفوفة عن العمود والصف اللذين يقع العدد عند تقاطعهما، ما العنصران اللذان تستعملهما لتحديد عنوان منزل في مدينة؟
2. تُخبرك رتبة المصفوفة عن عدد صفوفها وعدد أعمدها. ماذا تفهم من صديقك إذا قال إن الملعب 50 m في 30 m ؟
3. القطر الرئيس في المصفوفة ينطلق من الزاوية العليا إلى اليسار نحو الزاوية السفلى إلى اليمين. هل يقع رقم هذه الصفحة من الكتاب على قطرها الرئيس؟
4. تعرف أن طول المربع وعرضه متساويان، ماذا تستنتج عن مصفوفة وُصفت بأنها مصفوفة مربعة .

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- خلال دراستك لموضوعات أخرى مثل الهندسة والإحصاء وإدارة الأعمال.
- في المباريات التي تتضمن مستويات مختلفة من الصعوبات.
- خارج المدرسة لتنظيم المعطيات ومعالجتها خلال تحليلك لنتائج التغيرات التي تطرأ عليها.

الرياضيات

قراءة

وكتابة



استراتيجية قراءة : قراءة رموز الرياضيات وإدراك ما تعنيه

تُشكّل قراءة رموز الرياضيات وفهم ما تعنيه مهارة لا بد منها لكي تستوعب الموضوعات في الرياضيات. خلال دراستك للرياضيات باستعمال هذا الكتاب، اقرأ بصوت مسموع المقادير التي تتضمن رموزاً وكتابات رياضية. سوف يساعدك مثل هذا التمرين أن تصبح قادراً على ترجمة الرموز إلى كلمات.



اللامنتهي

مطلق x 

بالمئة



جذر تربيعي



يساوي

الرموز الشائعة



لا يساوي



لا يقل عن



لا يزيد على



أكبر من



أصغر من

رموز التباين

مجموعة x حيث

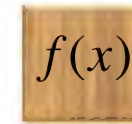
أو (اتحاد)



و (تقاطع)



نظام

 f أوف x رموز الدوال
والمجموعات

كتابة رمزية	ترجمتها إلى كلمات
$f(x) = \sqrt{16x} - 4$	f أوف x تساوي الجذر التربيعي لـ $16x$ ناقص 4.
$\frac{ x-15 }{6} \leq 12$	مطلق x ناقص 15، مقسوماً على 6 لا يزيد على 12.
$\{x/(x \leq -19) \vee (x > 8)\}$	مجموعة الأعداد x حيث x لا يزيد على -19 أو هو أكبر من 9.
$\begin{cases} y \leq -4x+8 \\ y > x-6 \end{cases}$	نظام المتباينتين المؤلف من « y لا يزيد على سالب 4 في x زائد 8» و « y أكبر من x ناقص 6».

حاول

ترجم كل كتابة رمزية إلى كلمات.

$$f(y) = |15y| + \frac{y}{2}$$

2

$$\{x/(x \geq -7) \vee (x \leq -1)\}$$

1

$$[-5, \infty)$$

4

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x \end{cases}$$

3

اكتب الجملة التالية باستعمال رموز الرياضيات.

مجموعة الأعداد x ، حيث يقع x بين سالب 8 و 10.

5

1-3

Matrices المصفوفات



من يستعمل هذا الأمر؟

تُستعمل المصفوفات لتنظيم المعطيات، كأن تُنظَّم المعطيات عن موجودات محل تجاري باستعمال المصفوفات. (المثال 3).

الأهداف

يستعمل المصفوفات لتمثيل معطيات من الرياضيات ومن الواقع.
يجمع المصفوفات ويطرحها.
يضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

المفردات

Vocabulary

المصفوفة
Matrix

رتبة المصفوفة
Dimensions

عنصر المصفوفة
Entry

عنوان العنصر
Adress

يُبين الجدول أدناه النشاط التجاري على مدى شهر نيسان لمحل بيع الأدوات المنزلية. يُظهر الجدول موجودات المحل (جردة أول نيسان) والمبيعات (خلال شهر نيسان) والمشتريات (خلال شهر نيسان أيضاً).

	الموجودات في أول نيسان		المبيعات خلال شهر نيسان		المشتريات خلال شهر نيسان	
	كبيرة	صغيرة	كبيرة	صغيرة	كبيرة	صغيرة
طاوولات الحديقة	10	8	7	9	15	20
مواقد الشواء	12	15	15	12	18	24

يمكنك تمثيل المعطيات عن موجودات المحل باستعمال مصفوفة.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{كبيرة} \\ \text{صغيرة} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{طاوولات الحديقة} \\ \text{مواقد للشواء} \end{array}$$

المصفوفة Matrix هي جدول مستطيل مؤلف من خلايا يُحيط به قوسان قائمان وتتضمن كل خلية عدداً يُسمى **عنصراً Entry** من عناصر المصفوفة. رتبة **Dimension** المصفوفة تدل على عدد صفوفها وعدد أعمدها، وهي تُكتب على الشكل التالي: عدد الصفوف \times عدد الأعمدة. فإذا كان للمصفوفة صفان وثلاثة أعمدة، فإن رتبته هي 2×3 (اقرأ 2 في 3). أما رتبة مصفوفة الموجودات أعلاه فهي 2×2 . لكل عنصر من عناصر المصفوفة عنوان **Adress** يدل على موقعه في المصفوفة. يتكون عنوان العنصر من رقم الصف الموجود عليه، متبوعاً برقم العمود الذي يحويه. فالعنصر 10 في المصفوفة أعلاه هو العنصر الموجود على الصف 1 والعمود 2. نرسم إلى هذا العنصر بالرمز m_{12} .

استعمال المصفوفات لعرض المعطيات

استعمل معطيات المبيعات خلال شهر نيسان.

استعمل مصفوفة لعرض المعطيات.

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{كبيرة} \\ \text{صغيرة} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{طاوولات الحديقة} \\ \text{مواقد للشواء} \end{array}$$

ما رتبة المصفوفة S ؟

للمصفوفة S صفان وعمودان. رتبته 2×2 .

ما العنصر s_{12} ؟

يقع العنصر s_{12} عند تقاطع الصف الأول والعمود الثاني، إنه 9. يدل هذا العنصر على أن المحل باع في نيسان 9 طاوولات كبيرة للحديقة.

د ما عنوان العنصر 15 ؟

يقع العنصر 15 على تقاطع الصف الثاني مع العمود الأول، إنه العنصر m_{21} .

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

1. استعمل المصفوفة المقابلة للإجابة.

أ ما رتبة المصفوفة M ؟

ب ما هو العنصر m_{32} ؟

ج يظهر الصفر في موقعين، ما عنوان كل منهما ؟

تتساوى مصفوفتان إذا كانتا من الرتبة نفسها، وإذا تساوت العناصر المتقابلة في المصفوفتين (أي العناصر التي لها العنوان نفسه في المصفوفتين).

تساوي المصفوفات

2 مثال

حدّد قيمة كل من x و y بحيث تتساوى المصفوفتان.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$$-8y=-8 \quad \text{و} \quad 2x=8$$

$$y=1 \quad \text{و} \quad x=4$$

2. حدّد قيمة كل من x و y بحيث تتساوى المصفوفتان.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

جمع المصفوفات وطرحها

جبرياً	عددياً	بالكلمات
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 11 & 22 \end{bmatrix}$	<p>لكي تجمع مصفوفتين أو تطرحهما، اجمع العناصر المتقابلة أو اطرحها.</p>

لكي تجمع مصفوفتين أو تطرح إحداهما من الأخرى، يجب أن تكون المصفوفتان من الرتبة نفسها.

الجمع غير ممكن. المصفوفتان من رتبتي مختلفتين

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{14} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$

الجمع ممكن. المصفوفتان من الرتبة نفسها

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$$

جمع المصفوفات وطرحها

مثال 3

استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكنًا.

A + C **أ**

اجمع كل عنصر في المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية.

$$A + C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & -2+2 \\ -3+0 & 10+(-9) \\ 2+(-5) & 6+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 1 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$$

C - A **ب**

$$C - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 2-(-2) \\ 0-(-3) & (-9)-10 \\ -5-2 & 14-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -19 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

C + B **ج**

بما أن رتبة المصفوفة C (3×2) تختلف عن رتبة المصفوفة B (2×3) فإن عملية الجمع غير ممكنة.

3. اجمع أو اطرح عندما يكون ذلك ممكنًا.

$$D - B \quad \text{ج} \quad B - A \quad \text{ب} \quad B + D \quad \text{أ}$$



تعلم أن الضرب هو جمع مكرّر. يصح هذا الأمر على ضرب المصفوفة في عدد.

فإذا كانت $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ يُمكنك كتابة $M + M$ على الصورة $2M$.

يُمكنك ضرب مصفوفة في عدد. للقيام بذلك، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.

$$2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 5 \end{bmatrix}$$

تطبيق على التجارة

مثال 4

بالعودة إلى النشاط التجاري لمحل بيع الأدوات المنزلية، احسب المصفوفة $M - S + D$ حيث M مصفوفة الموجودات و S مصفوفة المبيعات و D مصفوفة المشتريات. ماذا

تمثل المصفوفة الناتجة؟

$$\begin{aligned} M - S + D &= \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8-7+15 & 10-9+20 \\ 15-15+18 & 12-12+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} \text{كبيرة} & \text{صغيرة} \\ \text{طاولات للحديقة} & \text{مواقد للشواء} \end{matrix} \end{aligned}$$

تمثل المصفوفة الناتجة موجودات المحل في نهاية شهر نيسان. كان في المحل، في نهاية شهر نيسان،

16 طاولة حديقة صغيرة و 21 كبيرة؛ كما كان فيه 18 موقدًا صغيرًا و 24 كبيرًا.

4. احسب المصفوفة $A+2B-3C$ حيث

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نقطة
مراقبة



كتابة المقادير المصفوفية على أبسط صورة

مثال 5

استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

اكتب على أبسط صورة.

أ $2A-3B$ إن كان ذلك ممكناً.

$$2A-3B = 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

بما أن ضرب مصفوفة في عدد لا يغير رتبته، فإن رتبتي المصفوفتين $2A$ و $3B$ غير متساويتين، مما يجعل الطرح غير ممكن.

ب $C-2A$

$$\begin{aligned} C-2A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2) \times 4 & (-2) \times (-2) \\ (-2) \times (-3) & (-2) \times 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إضاءة

يُشكل قوسا المصفوفة رمز تجميع. لحساب المقدار $C-2A$ ، ابدأ بتوزيع -2 على جميع عناصر المصفوفة A قبل البدء بالجمع تماماً كما تفعل مع المقادير العددية.

5. اكتب على أبسط صورة عندما يكون ذلك ممكناً.

أ $2B+3C$

ب $4A-3C$

ج $D+0.5D$

نقطة
مراقبة



خصائص جمع المصفوفات وطرحها

اعلم
احفظ

جبرياً	عددياً	بالكلمات
$A+B=B+A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	خاصية التبديل جمع المصفوفات عملية تبديلية.
$A+B+C = (A+B)+C = A+(B+C)$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	خاصية التجميع جمع المصفوفات عملية تجميعية.
$A+0=A$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	المصفوفة المحايدة في الجمع المجموعة الصفيرية هي عنصر محايد في جمع المصفوفات.
إذا كانت B معكوس A فإن $A+B=0$ حيث 0 مصفوفة صفيرية.	$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	معكوس المصفوفة معكوس المصفوفة M هي المصفوفة الناتجة عن إحلال محل كل عنصر من عناصر M معكوسه.

إضاءة

المصفوفة الصفيرية مصفوفة جميع عناصرها تساوي 0.

فكر وناقش

1. جد جميع الرتب الممكنة لمصفوفة عدد عناصرها 8 .
2. صِف عملية على المصفوفات تؤدي إلى عكس إشارة كل عنصر من عناصرها .
3. كن منظمًا انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار مثالاً عددياً ومثالاً مصفوفياً.

العملية	أعداد	مصفوفات
الجمع		
الطرح		
الضرب في عدد		



التمارين

1-3

تمارين موجّهة

1 مفردات تُشكّل القيمة الموجودة على تقاطع صف وعمود في المصفوفة (عنصرًا أو عنوان عنصر).

2 عمل هشيار وشيركو ودلسوز في بيع البطاقات لحفل نهاية السنة الدراسية. يُبين الجدول أدناه المعطيات التي تتعلق بما باعوه من بطاقات.

بيع بطاقات حفل نهاية السنة الدراسية			
الطالب	بطاقات منفردة	دفاتر بطاقات	المبلغ الكلي
هشيار	39	15	114 000 دينار
شيركو	108	8	143 000 دينار
دلسوز	13	25	138 000 دينار

أ استعمل مصفوفة A لعرض معطيات الجدول.

ب ما رتبة المصفوفة A ؟

ج ما العنصر a_{13} ؟ ماذا يُمثّل ؟

د ما عنوان العنصر 143 000 ؟

انظر المثال 1

3 حدّد قيمة كل من x و y بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

انظر المثال 2

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 4 إلى 7. اجمع أو اطرح عندما يكون ذلك ممكناً.

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B + A \quad \boxed{7}$$

$$B - A \quad \boxed{6}$$

$$B - C \quad \boxed{5}$$

$$A + B \quad \boxed{4}$$

انظر المثال 3

أسعار الملابس الرياضية بالدنانير			
تفصيل	مع شعار	عادي	
قميص قطني	14 000	13 000	9 000
سروال قصير	11 000	9 500	6 000
سروال طويل	23 000	21 000	15 000

8 استهلاك يُبين الجدول المقابل أسعار ثلاثة أنواع من ألصة الرياضة قبل تطبيق الضريبة عليها. مثل هذه الأسعار في مصفوفة M ، ثم جد المصفوفة T التي تمثل قيمة الضريبة لكل نوع، علماً بأن النسبة المئوية للضريبة هي 8.25%. اكتب المصفوفة A التي تمثل أسعار الأنواع الثلاثة بعد إضافة الضريبة.

انظر المثال 4

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 9 إلى 12. اكتب الناتج على أبسط صورة، عندما يكون ذلك ممكناً.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2C - A \quad \boxed{12}$$

$$A - 2B \quad \boxed{11}$$

$$\frac{1}{2}C \quad \boxed{10}$$

$$3B \quad \boxed{9}$$

انظر المثال 5

تمارين وحل مسائل

خيارات السفر			
الدرجة	بطاقة	فندق	سيارة
أولى	425 500	396 000	65 990
أعمال	385 980	245 500	45 900
اقتصادية	275 120	103 250	29 500

13 استعمل معطيات الجدول للإجابة عن الأسئلة.

- أ استعمل مصفوفة A لعرض معطيات الجدول.
 ب ما رتبة المصفوفة A ؟
 ج ما العنصر a_{32} ؟ ماذا يُمثل ؟
 د ما عنوان العنصر 385 980 ؟

تمارين حرة	
لحل التمارين	أنظر المثال
1	13
2	14
3	18-15
4	19
5	23-20

14 حدّد قيمة x و y بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 2x & y+1 & -2y \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3x-2y & 14 & -x \end{bmatrix}$$

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 15 إلى 18. اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكناً.

$$D = \begin{bmatrix} 5.1 & 2.5 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3.2 & -1 \\ -1.5 & 2.4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -4.2 & -1 \\ 2.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D + F \quad \boxed{17}$$

$$D + E \quad \boxed{16}$$

$$F - E \quad \boxed{15}$$

$$E + F \quad \boxed{18}$$

19 دراسة جامعية يُبيّن الجدول أدناه الكلف السنوية للدراسة الجامعية.

القيمة التقديرية للكلفة السنوية للدراسة الجامعية			
جامعة رسمية وطنية	جامعة رسمية أجنبية	جامعة خاصة	الكلفة بالدينار
12 841 000	19 188 000	27 677 000	

يُقدّر الخبراء أن هذه الكلف سوف تزداد 5% العام المقبل. استعمل ضرب مصفوفة في عدد لتجد القيمة التقديرية للدراسة في كل نوع من الأنواع الثلاثة.

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 20 إلى 23. اكتب الناتج على أبسط صورة حيث يكون ذلك ممكناً.

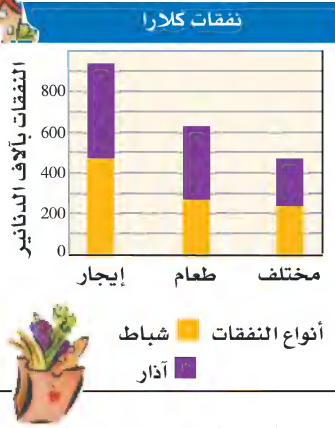
$$G = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H - 0.3G \quad 23$$

$$2K - G \quad 22$$

$$\frac{1}{2}(H + J) \quad 21$$

$$2G \quad 20$$



24 تقدير يُبيّن الرسم البياني المقابل ما حصلت عليه كلارا بعد أن استعملت الحاسوب لتدوين نفقاتها خلال شهري شباط وآذار. استعمل مصفوفة $(3 \times 1)F$ لتمثيل نفقاتها خلال شهر شباط وأخرى M لتمثيل نفقاتها خلال شهر آذار. اجمع المصفوفتين لتحصل على نفقاتها الكلية خلال الشهرين.

25 هندسة تُمثّل المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 3 & 3.5 \end{bmatrix}$ أنصاف أقطار 4 دوائر.

أ) اكتب المصفوفة التي تُمثّل محيطات هذه الدوائر.

ب) هل يُمكن الحصول على مصفوفة تُمثّل مساحات هذه الدوائر باستعمال جمع المصفوفات وضربها في عدد؟ أوضح ذلك.

تفكير ناقد اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً، أو خطأ دائماً.

26 يُمكن جمع مصفوفتين لهما العدد نفسه من العناصر.

27 يُمكن جمع مصفوفتين إذا اختلف عدد العناصر بينهما.

28 يُمكن جمع مصفوفتين لكل منهما 3 صفوف و 4 أعمدة.

29 إذا كان ممكناً جمع مصفوفتين، فإن طرحهما ممكن أيضاً.

30 أ) اكتب مصفوفة تُمثّل إحداثيات رؤوس المثلث، بحيث تقع الإحداثيات

الأولى في الصف الأول والإحداثيات الثانية في الثاني.

ب) استعمل عملية على المصفوفات لإضافة 3 إلى كل إحداثي

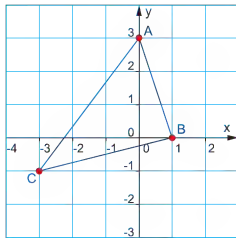
أول و 1 إلى كل إحداثي ثان.

ج) ارسم المثلث الذي تُمثّل المصفوفة الجديدة إحداثيات رؤوسه. كيف تحصل على هذا المثلث

انطلاقاً من المثلث الأصلي؟

31 حدّد قيم x و y و z بحيث تصح المساواة المصفوفية.

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ y & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 9 & z \end{bmatrix}$$



32 **خطأ في التحليل** أوضح الخطأ: $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

33 **اكتب** هل طرح المصفوفات عملية تبديلية؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

تحضير للاختبار

34 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 2 \\ 1.5 & 2.1 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 6 \\ 6 & 6.4 & 0 \end{bmatrix}$. أي مقدار يساوي المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) $2C - \frac{1}{2}B$ (ب) $C - 2B$ (ج) $B - 2C$ (د) $2B - \frac{1}{2}C$

35 أي من المقولات التالية تصح دائماً في المصفوفة E من الرتبة $m \times n$ ؟

- (أ) عدد عناصرها $m \times n$ (ب) لها عنصر e_{nm}
- (ج) عدد عناصرها $m + n$ (د) لها m عمود و n صف.

36 ما قيمة x التي تحقق $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 48 & 32 \\ 8 & 28 \end{bmatrix}$ ؟

- (أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

37 **جواب مختصر** جد قيمة x التي تحقق $[2 \ -2] - 2[5 \ -x] = [-8 \ -1]$.

تحدّ وتوسّع

38 **تفكير ناقد** ماذا تقول عن مصفوفة عدد عناصرها عدد أولي؟ أوضح ذلك.

39 ما الذي يجعل المصفوفتين $A - B$ و $A + (-B)$ متساويتين، حيث A و B لهما الرتبة نفسها؟

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	18	6
14	10	6
2	2	16

40 في المربعات السحرية، كالمربّعين المقابلين، تحصل دائماً على العدد نفسه إذا جمعت الأعداد الموجودة في أي صف أو أي عمود أو أي قطر. هل مجموع مصفوفتين تُشكّل كل منهما مربّعاً سحرياً، يُشكّل بدوره مربّعاً سحرياً؟ أوضح ذلك.

41 جد المصفوفة B حيث تصح المساواة $3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

مراجعة لولبية

اكتب مقداراً جبرياً لتمثيل كل حالة. (الصفوف السابقة)

42 محيط مثلث أطوال أضلاعه 3 أعداد زوجية متتالية.

43 عدد البطاقات التي بيعت لـ 20 شخصاً، علماً بأن كلاً منهم اشترى n بطاقة.

44 **نقود** مع شيلان 36 قطعة نقود من فئتي ألف دينار و 500 دينار. ما قيمة هذا المبلغ، علماً بأن عدد القطع من فئة 500 دينار هو ضعف عدد القطع من ألف دينار؟ (الصفوف السابقة)

حدّد إن كانت النقطة المعطاة حلاً لنظام المعادلتين. (الصفوف السابقة)

45 $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$: (2, -2)

46 $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$: (4.5, 2)



ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

2-3

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل صاحب مؤسسة المصفوفات لإيجاد قيمة المدخلات والكلف والأرباح. (مثال 3)

الأهداف

يعرف خصائص المصفوفات في الضرب.
ي ضرب مصفوفة في أخرى.

المفردات

Vocabulary

ناتج ضرب المصفوفتين
Matrix product
المصفوفة المربعة
Square matrix
القطر الرئيس
Main diagonal
مصفوفة الوحدة
Unit matrix

تعلّمت في الدرس السابق كيف تضرب مصفوفة في عدد. يُمكنك أيضًا أن تضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى. يُنتج ضرب مصفوفة في أخرى مصفوفة تُسمى **ناتج ضرب المصفوفتين** **Matrix product**. تُطبّق القاعدتان التاليتان عند ضرب مصفوفة في أخرى.

- يُمكن ضرب المصفوفة A في المصفوفة B ، أي حساب $A \times B$ أو AB إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B .
- ناتج ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في مصفوفة من الرتبة $n \times p$ هو مصفوفة من الرتبة $m \times p$.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 4 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$C \quad D \quad CD$

$3 \times 2 \quad 3 \times 5 \quad \text{غير معرف}$

عدد الصفوف \neq عدد الأعمدة ($2 \neq 3$)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$A \quad B \quad AB$

$2 \times 3 \quad 3 \times 4 \rightarrow 2 \times 4$

عدد الصفوف = عدد الأعمدة

غالبًا ما تُستعمل الكتابة $A_{m \times n}$ للدلالة على أن المصفوفة هي من الرتبة mn .

إضاءة

تذكّر التالي: لكي يكون ناتج ضرب مصفوفتين معرفًا، فلا بد لعدد أعمدة المصفوفة اليسرى أن يساوي عدد صفوف المصفوفة اليمينية.

تمييز إمكانية ضرب مصفوفتين

مثال 1

اذكر إن كان ناتج ضرب المصفوفتين معرفًا أم لا. فإذا كان معرفًا، أعط رتبته.

- أ** $A_{2 \times 5} \quad B_{5 \times 3}$
 $A \quad B \quad AB$
 $2 \times 5 \quad 5 \times 3 = 2 \times 3$
بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن ناتج الضرب معرف، وهو مصفوفة من الرتبة 2×3 .
- ب** $C_{4 \times 3} \quad D_{4 \times 5}$
 $C \quad D \quad CD$
 $4 \times 3 \quad 4 \times 5$ غير معرف
بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة D ، فإن ناتج الضرب غير معرف.

1. استعمل مصفوفات المثال للإجابة عن الأسئلة. اذكر إن كان ناتج ضرب المصفوفتين معرفًا أم لا. فإذا كان معرفًا، أعط رتبته.

DB **ج** DC **ب** BA **أ**

كما استعملت النظر أفقيًا لتعرف أعمدة المصفوفة A وعموديًا لتعرف صفوف المصفوفة B بغية تقرير إن كان ناتج الضرب AB معرفًا، فإنك ستقوم بالشيء نفسه لحساب عناصر المصفوفة ناتج الضرب.

ضرب المصفوفات



جبرياً	عددياً	بالكلمات
$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} =$	$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} =$	لحساب العنصر p_{kj} في المصفوفة $P=AB$ ، اضرب كل عنصر في الصف k من المصفوفة A في العنصر الذي يقابله في العمود j من المصفوفة B ، ثم اجمع نواتج الضرب هذه.
$\begin{bmatrix} a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix}$	

ضرب المصفوفات

2 مثال

$$D = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

احسب ناتج الضرب إن كان مُعرِّفاً.

AB

تفحص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرِّفاً. رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة B هي 3×2 . الناتج AB معرِّف، وسوف يكون مصفوفة من الرتبة 2×2 . اضرب الصف 1 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B ، كما هو مبين أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{11} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(5) + 4(-2) + 9(6)$$

اضرب الآن الصف 1 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B ، كما هو مبين أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{12} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ ? & ? \end{bmatrix} \quad 0(1) + 4(7) + 9(0)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B ، كما هو مبين أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{21} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & ? \end{bmatrix} \quad (-3)(5) + 3(-2) + 2(6)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B ، كما هو مبين أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{22} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad (-3)(1) + 3(7) + 2(0)$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 46 & 28 \\ -9 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{إذاً}$$

ب BA

تفحص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرّفًا. رتبة المصفوفة B هي 3×2 ورتبة المصفوفة A هي 2×3 . الناتج BA معرّف وهو مصفوفة من الرتبة 3×3 .

$$BA = \begin{bmatrix} 5(0) + 1(-3) & 5(4) + 1(3) & 5(9) + 1(2) \\ -2(0) + 7(-3) & -2(4) + 7(3) & -2(9) + 7(2) \\ 6(0) + 0(-3) & 6(4) + 0(3) & 6(9) + 0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 23 & 47 \\ -21 & 13 & -4 \\ 0 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$

ج AD

تفحص الرتب لكي تقرر إن كان ناتج الضرب معرّفًا. رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة D هي 2×2 . الناتج AD غير معرّف.

انتبه!

لاحظ أن ناتج الضرب AB و BA يختلفان عادة. لا يتمتع ضرب المصفوفات بخاصية التبديل.

2. احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكنًا.

ب DA **أ** BD 

تُستعمل المصفوفات في إدارة الأعمال لحساب المداخل والكلف والأرباح.

**مثال 3** تطبيق على إجراء الجرد

تبيع شركة الفجر للتجهيزات الرياضية نوعين من ألبسة الجري في مخزنين. يُبين الجدول الأول موجودات المخزنين من كل نوع ألبسة، والثاني أسعار المبيع والكلفة والربح لكل وحدة من وحدات كل نوع. جد الكلفة الكلية لنوعي الألبسة في كل مخزن.

المداخل والكلف والأرباح بالآلاف الدنانير			
	السعر	الكلفة	الربح
عادي	89	44	45
ممتاز	119	58	61

موجودات المخزنين		
	عادي	ممتاز
المخزن 1	14	10
المخزن 2	7	8

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المداخل والكلف والأرباح لكل مخزن.

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 & 44 & 45 \\ 119 & 58 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14(89) + 10(119) & 14(44) + 10(58) & 14(45) + 10(61) \\ 7(89) + 8(119) & 7(44) + 8(58) & 7(45) + 8(61) \end{bmatrix}$$

أرباح كلف مداخل

$$= \begin{bmatrix} 2436 & 1196 & 1240 \\ 1575 & 772 & 803 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \text{ المخزن} \\ 2 \text{ المخزن} \end{matrix}$$

كلف الألبسة في المخزن 1 هي 1196 ألف دينار وفي المخزن 2 772 ألف دينار.

3. بدل موجودات المخزن 2 بحيث تصبح 6 من النوع العادي و 9 من النوع الممتاز. احسب المصفوفة ناتج الضرب من جديد وحدد أرباح المخزن 2.



المصفوفة المربعة Square matrix هي مصفوفة لها العدد نفسه من الأعمدة والصفوف. إنها مصفوفة من الرتبة $m \times m$. **القطر الرئيس Main diagonal** في مصفوفة مربعة هو القطر الذي يصل الزاوية العليا إلى اليسار بالزاوية السفلى إلى اليمين.

مصفوفة الوحدة Unit matrix هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار باستثناء تلك الواقعة على القطر الرئيس حيث أنها تساوي 1. هناك مصفوفة وحدة واحدة لكل رتبة $n \times n$ من رتب المصفوفات المربعة.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي } 3 \times 3 \text{ وللرتبة } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ هي مصفوفة الوحدة للرتبة } 2 \times 2$$

في ضرب المصفوفات، تؤدي مصفوفة الوحدة من رتبة معينة في ضرب المصفوفات دور العدد 1 في ضرب الأعداد. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $m \times m$ ، فإن $AI_m = I_m A = A$.

$$\text{فإذا كانت } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{، فإن:}$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

بما أن من الممكن ضرب مصفوفة مربعة في نفسها، فيمكن إجراء ذلك تكررًا والحصول على قوة هذه المصفوفة.

مثال 4 قوى المصفوفات المربعة

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

احسب إن كان ذلك ممكنًا.

$$A^2 \quad \text{أ}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3 \times (-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^2 \quad \text{ب}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + 4 \times (-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2) \times (-1) & 5 \times 1 + 0 \times (-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3 \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

4. احسب المصفوفة إن كان ذلك ممكناً.

د I^4

ج B^3

ب A^3

أ C^2



فكر وناقش

1. صِف ما يحدث عندما تحاول أن تجد العنصر الأول في ناتج الضرب AB ، إذا كانت رتبة كل من المصفوفتين 2×3 .

2. هل ضرب المصفوفات عملية تبديلية؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

3. A مصفوفة من الرتبة 4×2 ؛ هل يُمكنك أن تحسب A^2 ؟ أوضِح السبب.

4. كن منظماً! انسخ المخطط المقابل، ثم أكمله. اكتب سؤالاً في المعين يساعد الجواب عنه على التوجه يساراً أو يميناً. ثم أكمل المخطط موضِّحاً عملية ضرب المصفوفات.

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$ وكانت B مصفوفة من الرتبة $p \times q$

§

رتبة AB : ...

لإيجاد AB ...

$AB = \dots$



التمارين

2-3

تمارين موجّهة

1 مفردات مصفوفة من الرتبة 2×2 جميع عناصرها تساوي 1 هي (مصفوفة مربعة أو مصفوفة وحدة).

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفاً، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

4 $C_{9 \times 5} D_{5 \times 9}$

3 $B_{5 \times 3} A_{4 \times 5}$

2 $A_{4 \times 5} B_{5 \times 3}$

7 $F_{2 \times 6} E_{6 \times 2}$

6 $E_{6 \times 2} F_{2 \times 6}$

5 $D_{5 \times 9} C_{9 \times 5}$

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 8 إلى 13. احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكناً.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

13 IB

12 BI

11 DC

10 CB

9 CA

8 BA

14 إعادة تصنيع يقوم طلاب ثانوية ابن الهيثم بجمع مواد قابلة لإعادة التصنيع لبيعها وتمويل حفل نهاية السنة الدراسية. يُبيّن الجدول الأول التالي ما جمعه الطلاب من المواد المختلفة في ثلاثة أسابيع. ويُبيّن الثاني المبالغ التي قبضوها كل أسبوع ثمناً للكيلوغرام الواحد من كل نوع. استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي جمعه من بيع كل نوع.

الأثمان بالدنانير				
الأسبوع	زجاج	علب	صحف	أوراق
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

المواد المجموعة			
النوع	الأسبوع 1	الأسبوع 2	الأسبوع 3
زجاج	29	25	16
علب	8	11	6
صحف	163	127	206
أوراق	53	107	84

انظر المثال 4 استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 15 إلى 18. احسب كل قوة، إن كان ذلك ممكناً.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 \quad \boxed{18}$$

$$C^2 \quad \boxed{17}$$

$$A^3 \quad \boxed{16}$$

$$A^2 \quad \boxed{15}$$

تمارين وحل مسائل

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفًا، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

$$C_{3 \times 5} D_{5 \times 1} \quad \boxed{21}$$

$$B_{2 \times 3} A_{2 \times 1} \quad \boxed{20}$$

$$A_{2 \times 1} B_{2 \times 3} \quad \boxed{19}$$

$$F_{6 \times 7} E_{7 \times 7} \quad \boxed{24}$$

$$E_{7 \times 7} F_{6 \times 7} \quad \boxed{23}$$

$$D_{5 \times 1} C_{3 \times 5} \quad \boxed{22}$$

لحل	تمارين حرة
أنظر	المثال
1	24-19
2	29-25
3	30
4	40-31

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 25 إلى 29. احسب ناتج الضرب، إن كان ذلك ممكناً.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$CI \quad \boxed{29}$$

$$IC \quad \boxed{28}$$

$$CB \quad \boxed{27}$$

$$CA \quad \boxed{26}$$

$$AB \quad \boxed{25}$$

30 جردة يبيع أحد المحالّ قياسين من صناديق الصابون. يُبيّن الجدول الأول أدناه الموجودات من هذه الصناديق في فرعين من فروع المحل، بينما يُبيّن الجدول الثاني مداخيل كل فرع وكلفه وأرباحه، لكل قياس من قياس الصناديق. جد الكلف الكلية.

المداخيل والكلف والأرباح			
ربح	كلفة	مدخول	
55 000	75 000	130 000	قياس عادي
80 000	110 000	190 000	قياس كبير

موجودات الصناديق في الفرعين		
قياس عادي	قياس كبير	
11	7	الفرع 1
8	6	الفرع 2

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 31 إلى 40. اكتب على أبسط صورة، إن كان ذلك ممكناً.

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 13 & -9 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 \quad \boxed{35}$$

$$S^3 \quad \boxed{34}$$

$$T^2 \quad \boxed{33}$$

$$B^2 \quad \boxed{32}$$

$$S^2 \quad \boxed{31}$$

$$(BA)^2 \quad \boxed{40}$$

$$3CB + 2B \quad \boxed{39}$$

$$2BA - C \quad \boxed{38}$$

$$BA \quad \boxed{37}$$

$$AB \quad \boxed{36}$$

41 سباق الدراجات يتألف سباق الدراجات من ثلاث مراحل مختلفة الصعوبة، لذلك تُضرب نتيجة كل مرحلة في عامل يراعي صعوبتها وعمر المتباري. يُبين الجدول الأول النقاط التي حصل عليها المتبارون الأربعة في كل مرحلة، بينما يُبين الثاني عامل التصحيح لكل مرحلة وكل متبارٍ.

عوامل التصحيح				
المرحلة	كوران	هلو	كاوه	كارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

نقاط المتبارين في المراحل الثلاث			
المتباري	المرحلة 1	المرحلة 2	المرحلة 3
كوران	23.0	18.5	19.5
هلو	24.0	28.5	25.0
كاوه	19.0	22.0	21.5
كارزان	27.0	26.5	28.0

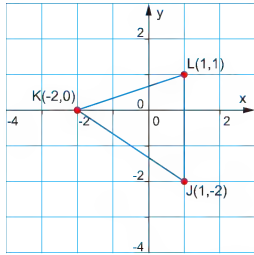
- أ) نظّم المعطيات في مصفوفتين. احسب ناتج الضرب.
 ب) استعمل المصفوفة ناتج الضرب لحساب النقاط النهائية لكل متبارٍ.
 ج) ما السبب الذي يجعل العناصر خارج القطر الرئيس في ناتج الضرب لا معنى لها في هذه المسألة؟
تفكير ناقد اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً، أو خطأ دائماً.
 أوضح جوابك.

42 إذا كانت المصفوفة A من الرتبة 2×3 وكان للمصفوفة B ثلاثة صفوف، فإن المصفوفة AB مُعرّفة.

43 إذا كانت المصفوفة A من الرتبة 2×3 وكان للمصفوفة B ثلاثة أعمدة، فإن المصفوفة AB مُعرّفة.

44 إذا كانت المصفوفة AB مُعرّفة، فإن المصفوفة BA مُعرّفة أيضاً.

45 إذا كانت المصفوفتان AB و BA مُعرّفتين فإنهما مصفوفتان مربعتان.



46 أ) **اكتب** مصفوفة تُمثّل إحداثيات رؤوس المثلث JKL .

بحيث توجد الإحداثيات الأولى في الصف الأول والإحداثيات الثانية في الثاني.

ب) استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ لضرب كل إحداثي أول وكل إحداثي ثانٍ في 2.

ج) ارسم المثلث الذي تُمثّل المصفوفة الجديدة إحداثيات رؤوسه. صف المثلث الجديد.

47 جد قيمة x بحيث تصح المساواة المصفوفية. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

48 **اكتب** ما السبب الذي يجعل المساواة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ صحيحة؟

49 **مباراة في التطريز** تشتمل مباراة التطريز على ثلاثة أشكال مختلفة الصعوبة، لذلك تُضرب نقطة كل شكل بعامل يراعي صعوبته، وعمر المتبارية. يُبين الجدول الأول نقاط المتباريات في كل شكل، ويُبين الجدول الثاني عامل التصحيح، لكل شكل وكل متبارية. جد النقاط النهائية لكل متبارية.

عوامل التصحيح			
الشكل	شارا	سازان	ديلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

النقاط التي أعطتها اللجنة الفاحصة للمتباريات			
المتبارية	الشكل 1	الشكل 2	الشكل 3
شارا	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
ديلان	16.0	19.5	18.0

50 مبيعات يُبيّن الجدول الأول أدناه مبيعات عدد من العاملين في محل لبيع الأحذية، بينما يُبيّن الثاني نسبة العمولة الجديدة والنسبة القديمة لكل بائع.

نسبة العمولة		
	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
للرجال	9%	9.5%
للنساء	9%	10%
للأولاد	13%	12%

مبيعات العاملين (بالدنانير)			
العامل	للرجال	للنساء	للأولاد
شيرزاد	5 200 000	4 200 000	2 300 000
بختيار	8 100 000	8 400 000	3 100 000
زانا	2 700 000	7 400 000	6 300 000

- أ) جد ناتج ضرب المصفوفتين. كم كانت عمولة كل بائع وفقاً لكل نسبة؟
 ب) أي بائع كان المستفيد الأكبر من تغيير نسب العمولة؟



51 أحجية على المتبارين في إحدى مسابقات التلفزيون معرفة

الموقع الذي عليهم التوجه نحوه، والذي يحدده عنصران من

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

يُحدّد العنصر P_{21} موقع خط العرض (شمالاً إذا كان العنصر موجباً، وجنوباً إذا كان العنصر سالباً) كما يُحدّد العنصر P_{12} موقع خط الطول (شرقاً إذا كان العنصر موجباً، وغرباً إذا كان العنصر سالباً). أي موقع على الخريطة المقابلة يجب أن يكون قبلة المتبارين؟

52 كرة قدم جد مجموع النقاط التي حقّقها كل فريق.

النقاط	نوع الهدف
6	رميات ركنية
1	ضربات حرة
3	أهداف

الفريق	رميات ركنية	ضربات حرة	أهداف
المدينة	11	9	4
الرياضي	15	12	6
الجزيرة	6	5	9

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

53 تفكير ناقد اكتب المصفوفة المقابلة على صورة ناتج ضرب مصفوفة، جميع عناصرها أعداد صحيحة، في عدد حقيقي.

تحضير للاختبار

54 مصفوفة من الرتبة 5×12 . أي شرط ينبغي أن تحقّقه المصفوفة C لكي يكون ناتج ضرب CB معرّفًا؟

- أ) لها 5 أعمدة ب) لها 12 عموداً ج) لها 5 صفوف د) لها 12 صفّاً

55 أي من النتائج التالية لا تساوي النتائج الثلاث الأخرى؟

$$\text{أ) } 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ب) } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ج) } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{د) } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

56 أي من المقادير التالية يساوي العنصر C_{22} في ناتج الضرب $\S C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(أ) $4(-2)+2 \times 3$ (ب) $7 \times 5 + (-1)8$ (ج) $4 \times 5 + 2 \times 8$ (د) $(-1)3 + 2 \times 8$

57 **جواب مختصر** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. اذكر إن كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} 33 & -18 \\ -14 & 64 \end{bmatrix}$ تساوي AB ، أو BA أو غير ذلك.

تحدّ وتوسّع

58 هل ضرب المصفوفات عملية تجميعية؟ أي هل $(AB)C = A(BC)$ بافتراض أن جميع نواتج الضرب مُعرّفة؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

59 **منقولة Transpose** المصفوفة A هي المصفوفة A^T الناتجة عن استبدال كل صف من صفوف

المصفوفة A بعمودها صاحب الرتبة نفسها. مثال على ذلك: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ فإن منقولتها هي المصفوفة $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

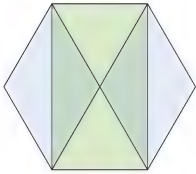
أ هل ضرب مصفوفة في منقولتها ممكن دائماً؟ أوضح جوابك.

ب جد المصفوفة $P = AA^T$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. هل تتضمن المصفوفة P عناصر متساوية؟ ما هي؟

60 احسب قوى المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ودوّن في كل مرة قيمة العنصر الموجود على الصف الثاني

والعمود الثاني من المصفوفة الناتجة؟ ما العلاقة بين هذه القيم على التوالي؟

مراجعة لولبية



تصميم زخرفي الهيئة الخارجية للشكل المقابل هي سداسي منتظم. المثلث الأخضر مثلث متساوي الأضلاع. (الصفوف السابقة)

61 كم زوجاً من الزوايا المتقابلة بالرأس يتضمّن هذا الشكل؟

62 كم مثلثاً متطابقاً مع المثلث الأخضر يتضمّن هذا الشكل؟

63 كم قطعة مستقيمة متطابقة مع ضلع السداسي المنتظم يتضمّن هذا الشكل؟

ارسم في الفضاء الإحداثي كلاً من النقاط التالية. (الدرس 1.1)

64 $(0, 4, -5)$ 65 $(2, 2, 6)$ 66 $(-3, -3, 3)$ 67 $(1, -1, -1)$

احسب كل مقدار إن كان ذلك ممكناً، حيث $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.83 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (الدرس 1.3)

68 $S+T$ 69 $V-T$ 70 $4T$



المصفوفات والتحويلات الهندسية

Matrices and Geometric Transformations

3-3

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل الفنانون أنماط تحويل مكررة للقيام بأعمالهم الفنية. (التمرين 16).

الأهداف

يستعمل المصفوفات لتحويل الأشكال الهندسية.

المفردات

Vocabulary

مصفوفة السحب

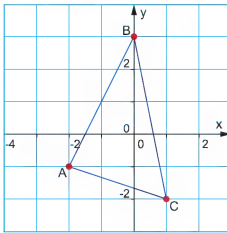
Translation matrix

مصفوفة الدوران

Rotation matrix

مصفوفة الانعكاس

Reflection matrix



يمكنك الدلالة على موقع شكل هندسي في المستوي

الإحداثي وتحديد هيئته وقياساته باستعمال أزواج مرتبة

تمثل إحداثيات رؤوسه. فمثلاً، رؤوس الشكل المقابل هي

النقاط $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$.

يمكنك تمثيل هذا المثلث بالمصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{الإحداثيات الأولى} \\ \leftarrow \text{الإحداثيات الثانية} \end{array}$$

السحب Translation تحويل هندسي يُحوّل نقطة $A(x, y)$ إلى نقطة أخرى $A'(x', y')$ ، حيث $x' = x + a$ و $y' = y + b$ (a و b عدنان حقيقيان ثابتان).

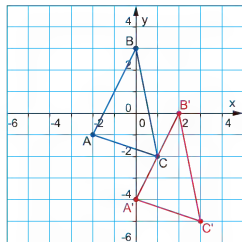
يمكن تمثيل السحب السابق بواسطة مصفوفة يتكرر فيها العمود $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بعدد رؤوس الشكل المطلوب سحبه. تُسمى هذه المصفوفة **مصفوفة السحب Translation Matrix**.

استعمال المصفوفات لسحب الأشكال الهندسية

مثال 1

اسحب المثلث ABC ، حيث $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$ ، وحدتين إلى اليمين و 3 وحدات إلى أسفل. احسب إحداثيات رؤوس المثلث الصورة ثم ارسمه.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{السحب الأفقي} \\ \leftarrow \text{السحب العمودي} \end{array}$$



لحساب إحداثيات صورة المثلث بالسحب المذكور أعلاه، اجمع المصفوفة التي تمثل المثلث الأصلي مع مصفوفة السحب.

مصفوفة السحب + مصفوفة المثلث

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2+2 & 0+2 & 1+2 \\ -1-3 & 3-3 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

صورة المثلث ABC بالسحب هي المثلث $A'B'C'$ حيث $A'(0, -4)$ و $B'(2, 0)$ و $C'(3, -5)$.

1. اسحب المثلث ABC ، حيث $A(2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -1)$ وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. احسب إحداثيات رؤوس المثلث الصورة، ثم ارسمه.



التناسب الهندسي (التحاكي) Dilation تحويل يُغيّر قياسات الشكل-الأصل (بالتكبير أو التصغير) بحيث يكون الشكل-الصورة مشابهًا للشكل-الأصل. تذكر أن للأشكال المتشابهة الهيئة نفسها من دون أن تكون لها القياسات نفسها؛ وأن الزوايا المتقابلة تتطابق بينما تتساوى نسب الأضلاع المتقابلة.

عندما يكون مركز التناسب الهندسي في نقطة الأصل من المستوي الإحداثي، يكفي أن تضرب مصفوفة الشكل-الأصل بنسبة التناسب الهندسي لكي تحصل على مصفوفة الشكل-الصورة. سوف

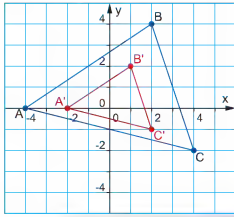
مثال 2 استعمال المصفوفات لتحويل الأشكال الهندسية بتناسب هندسي

حوّل المثلث ABC ، حيث $A(-4, 0)$ ، $B(2, 4)$ ، $C(4, -2)$ ، بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{1}{2}$ (تصغير). احسب إحداثيات رؤوس المثلث - الصورة ثم ارسمه.

اضرب مصفوفة المثلث في النسبة $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2} \times 2 & \frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{1}{2} \times 0 & \frac{1}{2} \times 4 & \frac{1}{2}(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الإحداثيات الأولى ←
الإحداثيات الثانية ←



رؤوس المثلث-الصورة هي

$A'(-2, 0)$ و $B'(1, 2)$ و $C'(2, -1)$.

2. حوّل المثلث ABC ، حيث $A(2, 3)$ ، $B(5, 1)$ ، $C(-2, -7)$ ، بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{4}{3}$ (تكبير). احسب إحداثيات رؤوس المثلث - الصورة ثم ارسمه.



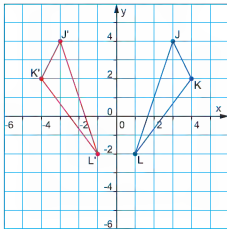
مصفوفة الانعكاس Reflection Matrix هي مصفوفة التحويل الذي يُنتج صورة شكل هندسي

بالانعكاس حول محور. لتحصل على صورة شكل هندسي بالانعكاس حول المحور الثاني، اضرب

المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة الشكل. من شأن ذلك أن يستبدل بكل إحداثي أول x معكوسه $(-x)$ وأن يحفظ كل إحداثي ثانٍ من دون تغيير.

مثال 3 استعمال المصفوفات لعكس الأشكال الهندسية

حوّل المثلث JKL ، حيث $J(3, 4)$ و $K(4, 2)$ و $L(1, -2)$ ، بالانعكاس حول المحور الثاني. احسب إحداثيات رؤوس المثلث - الصورة ثم ارسمه.



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

تم ضرب كل إحداثي أول في -1 وكل إحداثي ثاني في 1.

رؤوس المثلث-الصورة هي $J'(-3, 4)$ ، $K'(-4, 2)$ ، $L'(-1, -2)$.

انتبه!

ضرب المصفوفات ليس عملية تبديلية. لذا تأكد من أن مصفوفة التحويل مكتوبة إلى اليسار.

3. لتحصل على صورة شكل هندسي بالانعكاس حول المحور الأول، اضرب

المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة الشكل. حوّل مثلث المثال 3، بالانعكاس

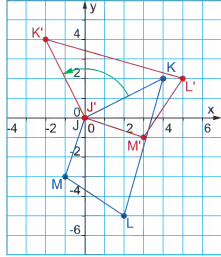
حول المحور الأول. احسب إحداثيات رؤوس المثلث - الصورة ثم ارسمه.



مصفوفة الدوران Rotation Matrix هي مصفوفة التحويل الذي يُنتج صور شكل هندسي بدوران. يُبين المثال 4 أنواعًا من مصفوفة الدوران.

إيجاد صورة شكل هندسي بدوران

استعمل كل مصفوفة لتحويل الرباعي $JKLM$ ، حيث $J(0,0)$ و $K(4,2)$ و $L(2,-5)$ و $M(-1,-3)$ ، بدوران حول نقطة الأصل. ارسم الشكل - الصورة ثم صف الدوران.

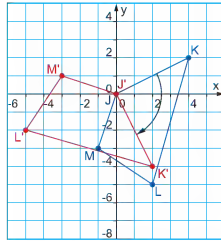


$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الصورة هي صورة الرباعي بدوران عكس حركة عقارب الساعة زاويته 90° ومركزه نقطة الأصل.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

الصورة هي صورة الرباعي بدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة زاويته 90° ومركزه نقطة الأصل.

4. استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لتحويل المثلث ABC ، حيث $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(0,-3)$ ، بدوران حول نقطة الأصل. ارسم الشكل-الصورة، ثم صف الدوران.



فكر وناقش

- صف التحويل الهندسي الناتج من ضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة شكل هندسي.
- صف التغيير الذي يُصيب الإحداثيات الأولى في مصفوفة شكل هندسي، عند ضرب كل من المصفوفات التالية فيها.
- كن مُنظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. Q هي مصفوفة مثلث. اكتب في كل إطار المقدار المصفوفي المناسب.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{أ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{د}$$

التحويل	العملية مصفوفياً
سحب المثلث عمودياً	
سحب المثلث أفقياً	
تكبير المثلث أو تصغيره	
عكس المثلث حول المحور الثاني	
عكس المثلث حول المحور الأول	
إدارة المثلث 90° حول نقطة الأصل باتجاه عقارب الساعة	
إدارة المثلث 90° حول نقطة الأصل عكس اتجاه عقارب الساعة	

اعلم
احفظ

التمارين

3-3

تمارين موجّهة

1 مفردات تُنتج صورة شكل هندسي كما لو كان أحد محاور الإحداثيات مرآة. (مصفوفة الانعكاس أو مصفوفة السحب)

1 انظر المثال اسحب الرباعي $ABCD$ حيث $A(-2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -4)$ و $D(-2, -2)$ بالسحب المحدّد في كل من التمرينين 2 و 3. جد إحداثيات رؤوس الصورة، وارسمها.

2 وحدتان إلى اليسار ووحدة إلى أعلى.

3 وحدة واحدة إلى اليمين وصفر وحدة إلى أسفل.

2 انظر المثال استعمل مصفوفة لتكبير الرباعي $ABCD$ أو تصغيره، حيث $A(-2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -4)$ و $D(-2, -2)$ ، بالتحويل المحدّد في كل من التمرينين 4 و 5. جد إحداثيات رؤوس الصورة، وارسمها.

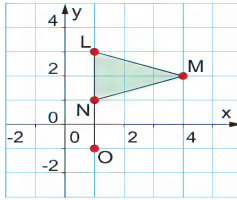
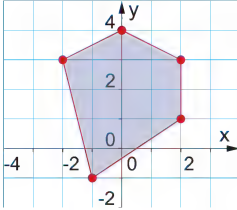
4 تصغير بنسبة 0.5.

5 تكبير بنسبة 2.

3 انظر المثال جد صورة المضلع $ABCDE$ حيث $A(-2, 3)$ و $B(0, 4)$ و $C(2, 3)$ و $D(2, 1)$ و $E(-1, -1)$ ، كما هو مُحدّد في كل من التمرينين 6 و 7. جد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

6 بالانعكاس حول المحور الثاني.

7 استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لإيجاد صورة المضلع بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



4 انظر المثال استعمل المصفوفة لإيجاد صورة الرباعي $LMNO$ حيث $L(1, 3)$ و $M(4, 2)$ و $N(1, 1)$ و $O(1, -1)$ بالدوران المُعطاة مصفوفته في كل من التمرينين 8 و 9. جد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

9 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

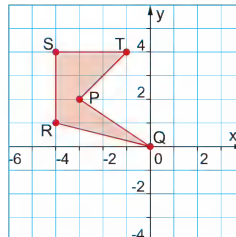
8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

تمارين وحلّ مسائل

10 اسحب الرباعي $ABCD$ حيث $A(0, 4)$ ، $B(-3, -1)$ ، $C(1, -5)$ ، $D(1, 0)$ 3 وحدات إلى اليمين و 3 وحدات إلى أعلى. جد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

11 جد صورة الرباعي $ABCD$ حيث $A(1, 2)$ ، $B(-2, 3)$ ، $C(-3, 4)$ ، $D(-4, 1)$ بتناسب هندسي مركزه نقطة الأصل ونسبته $\frac{3}{2}$. جد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.

12 جد صورة المضلع $ABCDE$ حيث $A(-2, 3)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(2, 1)$ ، $D(2, 1)$ ، $E(-1, -1)$ بالانعكاس حول المحور الأول. جد إحداثيات رؤوس الشكل-الصورة، وارسمه.



استعمل كل مصفوفة لإيجاد صور المضلع $PQRST$ حيث $P(-3, 2)$ ، $Q(0, 0)$ ، $R(-4, 1)$ ، $S(-4, 4)$ ، $T(-1, 4)$ بالدوران صاحب

المصفوفة. جد إحداثيات رؤوس الشكل - الصورة، وارسمه.

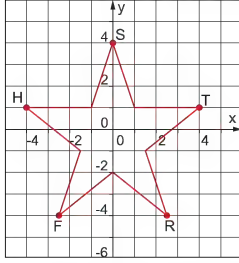
14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

تمارين حرة

لحل التمارين	أنظر المثال
10	1
11	2
12	3
13-14	4

- 15 تصميم** صمّمت جناز شعراً لنادي البيئة في مدرستها على صورة نجم البحر. إحداثيات رؤوس النجم $H(-4, 1)$ ، $F(-2.5, -4)$ ، $R(2.5, -4)$ ، $T(4, 1)$ ، $S(0, 4)$



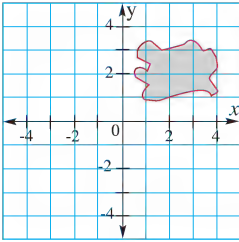
أ استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ لإدارة النجم $\frac{1}{10}$ دورة

حول نقطة الأصل. قَرِّب إحداثيات رؤوس النجم -

الصورة إلى أقرب نصف وحدة.

ب هل دار النجم في اتجاه حركة عقارب الساعة أم عكسه؟

- 16 رسم** للقيام بعملية تبليط فنية، يتم رسم شكل أساسي وتحويله تكراراً بتحويلات هندسية بحيث تغطي الأشكال الناتجة المساحة المراد تبليطها من دون فراغات أو تجاوز لشكل على آخر. قام أحد الفنانين برسم الشكل المبين إلى اليسار.



أ بدأ الفنان بتحويل الشكل بدوران زاويته 180° حول نقطة الأصل. اكتب مصفوفة هذا التحويل.

ب جد إحداثيات الرؤوس الأربعة للشكل الناتج من التحويل.

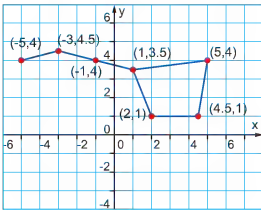
ج قام الفنان بعد ذلك بإزاحة الصورة التي حصل عليها 4 وحدات إلى أعلى، ووحدين إلى اليمين. اكتب مصفوفة الإزاحة.

د جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج من هذه الإزاحة.

هـ ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، الشكل الأصلي والشكل الأخير.

- 17 تفكير ناقد** $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. أوضح نتيجة ضرب هذه المصفوفة T في مصفوفة شكل هندسي، ثم ضرب المصفوفة T في ناتج الضرب السابق.

اكتب المصفوفة التي تُحوّل الرسم المقابل الذي يُمثّل مجرّة الدب الأكبر، بالتحويل المعطى، ثم جد إحداثيات الصورة.



18 إزاحة وحدتين إلى أعلى.

19 إزاحة وحدة واحدة إلى أسفل و 3 وحدات إلى اليسار.

20 تكبير نسبته 2.

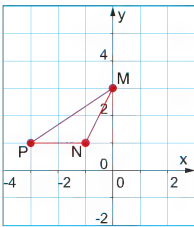
21 انعكاس حول المحور الأول.

22 دوران حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة 90° .

23 دوران حول نقطة الأصل عكس اتجاه عقارب الساعة 90° .

24 اكتب ما نتيجة ضرب المصفوفة $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ في مصفوفة شكل هندسي؟

25 اكتب مصفوفة التحويل الهندسي الذي يُحوّل الدالة $f(x)$ إلى الدالة $h(x) = -f(x)$ ، ومصفوفة التحويل الذي يُحوّلها إلى الدالة $g(x) = f(-x)$.



أ اكتب مصفوفة المثلث المقابل.

ب اضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ في مصفوفة المثلث.

ج ارسم مثلثاً جديداً مستعملاً المصفوفة الناتجة. صف هذا المثلث.

د كرر الخطوتين (ب) و (ج) مع المثلث الجديد. ماذا تقول عن المثلث الثالث؟



27 أجرى سرجون تحويل شكل هندسي بتناسب هندسي متبوع بدوران حول نقطة الأصل في اتجاه عقارب الساعة زاويته 90° ، متبوع بانعكاس حول المحور الثاني. أي سلسلة تُمثّل هذه التحويلات بالتتابع.

- أ) ضرب مصفوفة في عدد؛ جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين.
 ب) ضرب مصفوفة في عدد؛ ضرب مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين.
 ج) جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفتين؛ جمع مصفوفتين.
 د) ضرب مصفوفتين؛ جمع مصفوفتين؛ ضرب مصفوفة في عدد.

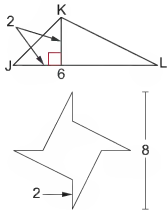
28 ما نتيجة ضرب مصفوفة شكل هندسي في المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

- أ) تكبير الشكل، ثم إدارته حول نقطة الأصل 90° في اتجاه عقارب الساعة.
 ب) تصغير الشكل، ثم إدارته حول نقطة الأصل 90° عكس اتجاه عقارب الساعة.
 ج) تصغير الشكل، ثم عكسه حول المحور الأول.
 د) تكبير الشكل، ثم عكسه حول المحور الثاني.

29 أي مصفوفة تستعمل لتحويل شكل بدوران حول نقطة الأصل زاويته 180° ؟

- أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

تحدّ وتوسّع



30 أي مصفوفة تستعمل لتحويل شكل بانعكاس حول المستقيم $y = -x$ ؟

31 أ) ارسم المثلث المقابل في المستوي الإحداثي واكتب مصفوفته.

ب) كيف تُحوّل هذا المثلث للحصول على الشكل الثاني؟

ج) استعمل مصفوفات للقيام بالتحويل، واكتب إحداثيات الرؤوس الأربعة للشكل-الصورة.

32 حوّل شكلاً هندسياً بالتحويل صاحب المصفوفة $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. صِف هذا التحويل. ما الذي يحدث إذا حوّلت شكلاً بهذا التحويل تكراراً؟

مراجعة لولبية

البطاقات	2	5	8	11
الكلفة	35 000	87 500	140 000	192 500

33 حدّد إن كانت معطيات الجدول تعرّف

دالة خطية. (الصفوف السابقة)

حدّد إن كان الزوج المرتب حلاً لنظام المتباينات. (الدرس 2-3)

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \geq 2x - 11 \\ 5x + y < 5.5 \end{cases} \quad (0, 5) \quad 35$$

$$\begin{cases} y > 2x - 8 \\ y \leq \frac{1}{4}x + 2 \end{cases} \quad (2, -4) \quad 34$$

احسب، إن كان ذلك ممكناً. (الدرس 2-3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad 38$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad 37$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad 36$$

4-3

المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule



من يستعمل هذا الأمر؟

يحتاج خبراء تغذية الرياضيين أن يحلوا أنظمة معادلات خطية لتحديد كميات السرعات الحرارية والبروتين والدهون والكربوهيدرات التي يحتاج إليها الرياضي في غذائه. (المثال 4).

الأهداف

يحسب محدد مصفوفة 2×2 أو 3×3 .
يحل نظامًا خطيًا باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات

Vocabulary

المحدد

Determinant

مصفوفة المعاملات

Coefficient matrix

قاعدة كرامر

Cramer's rule

يُزاوج علماء الرياضيات بين المصفوفات المربعة والأعداد، بحيث يقابل كل مصفوفة مربعة عدد حقيقي يُسمى **محدد المصفوفة Determinant**. يُستعمل الرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ للدلالة على محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. لمحدد المصفوفة دور مهم كما ستري لاحقًا.

محدد المصفوفة 2×2

جبريًا	عدديًا	بالكلمات
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	محدد Determinant المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$



إيجاد محدد مصفوفة 2×2

مثال 1

جد محدد المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3$$

$$= 18 - 40 = -22$$

محدد المصفوفة هو -22.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

محدد المصفوفة هو 5.

1. جد محدد المصفوفة.

نقطة

مراقبة



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix} \quad \text{ج}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{د}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{هـ}$$

يُمكنك أن تستعمل المحدّات لحل أنظمة المعادلات الخطية. لحل النظام $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

ابداً بكتابة المصفوفة $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ التي تُسمى **مصفوفة العوامل** **Coefficient matrix**. واحسب

محدّدها D ، ثم احسب المحدّدين $Dx = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ و $Dy = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$. استعمل الآن قاعدة كرامر التالية:

قاعدة كرامر للأنظمة 2×2

إذا كان محدّد مصفوفة العوامل D مختلفاً عن 0، فالنظام $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ حل وحيد هو $x = \frac{Dx}{D}$ و $y = \frac{Dy}{D}$ ، حيث $Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، $Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

يمكنك استعمال المحدّات D و Dx و Dy لتعرف إن كان النظام محدّداً (له حل وحيد) أو مستحيلاً (لا حلول له) أو غير محدّد (له عدد غير محدود من الحلول). في التصنيف التالي سنفترض أن a_1 و b_1 ليسا صفراً في الوقت نفسه، وأن a_2 و b_2 ليسا صفراً في الوقت نفسه.

تصنيف الأنظمة من معادلتين خطيتين بمجهولين		
إذا كان $D=0$ و $Dx \neq 0$ أو $Dy \neq 0$ فالنظام مستحيل.	إذا كان $D=0$ و $Dx = Dy = 0$ فالنظام غير محدّد.	إذا كان $D \neq 0$ فالنظام محدّد.

مثال 2 حل الأنظمة الخطية 2×2 باستعمال قاعدة كرامر

حل النظام الخطي باستعمال قاعدة كرامر.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

الخطوة 1 جد محدّد مصفوفة العوامل.

النظام محدّد لأن $D \neq 0$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 2(-1) = 1$$

الخطوة 2 جد المحدّدين Dx و Dy .

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

الخطوة 3 جد قيمة x و قيمة y .

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-7}{1} = -7, \quad x = \frac{Dx}{D} = \frac{-4}{1} = -4$$

للنظام حل وحيد هو $(-4, -7)$.

$$\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases} \quad \text{ب}$$

الخطوة 1 اكتب النظام على الصورة العامة.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

الخطوة 2 جد محدّد مصفوفة العوامل.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 3(-1) = 0$$

الخطوة 3 احسب Dx .

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

بما أن $D=0$ و $Dx \neq 0$ فإن النظام مستحيل.

$$Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 27 \quad y \neq 0$$

إضاءة

إذا وجدت $D=0$ و $Dx=0$.
فعليك أن تحسب Dy لتحكم
على النظام إن كان مستحيلاً
أم غير محدّد.

$$2. \text{ حلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر } \begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$$



لكي تستعمل قاعدة كرامر لحل نظام خطي 3×3 ، عليك أن تحسب محدّدات مصفوفات من الرتبة 3×3 . يُبيّن المخطّط أدناه إحدى الطرق للقيام بذلك.

اكتب العمودين الأولين إلى اليمين
المحدّد.

اجمع نواتج ضرب أعداد كل قطر أحمر، ثم
اطرح نواتج ضرب أعداد كل قطر أزرق.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) - (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3)$$

حساب محدّد مصفوفة 3×3

مثال 3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{جد محدّد المصفوفة}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{اكتب المحدّد، ثم اكتب العمودين الأولين إلى اليمين المحدّد:}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{الخطوة 1 احسب نواتج ضرب أعداد كل قطر نازل وجمع النواتج.}$$

$$(4)(10)(-1) + (-2)(1)(2) + (0)(-3)(6) = -44$$

الخطوة 2 احسب ناتج ضرب أعداد كل قطر صاعد واجمع النواتج.

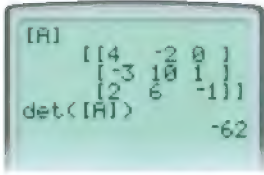
$$(2)(10)(0) + (6)(1)(4) + (-1)(-3)(-2) = 18$$

الخطوة 3 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$-44 - 18 = -62$$

محدد المصفوفة A يساوي -62 .

تحقق استعمال الحاسبة البيانية.



إضاءة

يساعدك رسم الأقطار بخط خفيف على تحديد نواتج ضرب الستة الضرورية لحساب المحدد.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

3. جد محدد المصفوفة



يمكن توسيع قاعدة كرامر لتشمل الأنظمة الخطية 3×3 .

قاعدة كرامر للأنظمة 3×3

إذا كان محدد مصفوفة العوامل مختلفاً عن 0 فالنظام

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

حل وحيد هو $x = \frac{D_x}{D}$ ، $y = \frac{D_y}{D}$ ، $z = \frac{D_z}{D}$

حيث $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ ، $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ، $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$



إذا كان $D \neq 0$ ، فالنظام حل وحيد.

إذا كان $D = 0$ و $D_x \neq 0$ أو $D_y \neq 0$ أو $D_z \neq 0$ فالنظام مستحيل.

إذا كان $D = 0$ و $D_x = D_y = D_z = 0$ فالنظام غير محدد.

تطبيق غذائي

مثال 4



السعرات الحرارية في الغرام	
السعرات	الطعام
4	بروتين
4	كربوهيدرات
9	دهون

يعمل أحد خبراء التغذية على تصميم نظام تغذية للاعب كرة القدم. يتطلب النظام من اللاعب استهلاك 3600 سعرة حرارية و 750 g من الطعام يومياً. يجب أن تشكّل السعرات الحرارية التي مصدرها البروتين والدهون 60% من مجموع السعرات الحرارية. كم غراماً من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلب هذا النظام.

يتضمن النظام الغذائي p غراماً من البروتين، و c غراماً من الكربوهيدرات و f غراماً من الدهون.

$$4p + 4c + 9f = 3600 \quad \text{مجموع السعرات الحرارية.}$$

$$p + c + f = 750 \quad \text{كمية الطعام الكلية.}$$

$$4p + 0c + 9f = 2160 \quad \text{سعرات البروتين والدهون تساوي } 60\%(3600) = 2160$$

انتبه!

انتبه إلى ضرورة كتابة 0 كمعامل للمجهول الناقص.
 $4p + 0c + 9f = 2160$

$$Df = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3600 \\ 1 & 1 & 750 \\ 4 & 0 & 2160 \end{vmatrix}, Dc = \begin{vmatrix} 4 & 3600 & 9 \\ 1 & 750 & 1 \\ 4 & 2160 & 9 \end{vmatrix}, Dp = \begin{vmatrix} 3600 & 4 & 9 \\ 750 & 1 & 1 \\ 2160 & 0 & 9 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -20$$

$$f = \frac{Df}{D} = \frac{-2400}{-20} = 120, c = \frac{Dc}{D} = \frac{-7200}{-20} = 360, p = \frac{Dp}{D} = \frac{-5400}{-20} = 270$$

يتضمن النظام 270 g من البروتين و 360 g من الكربوهيدرات و 120 g من الدهون.

4. ماذا لو...؟ يتطلب النظام استهلاك 3200 سعرة حرارية و 700 g من الطعام يوميًا. يجب أن تشكل السعرات الحرارية التي مصدرها الكربوهيدرات 70% من مجموع السعرات الحرارية. كم غرامًا من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلب هذا النظام؟



فكر وناقش

1. صِف مصفوفة لا محدد لها.
2. كيف تعرف ما ستكون عليه المحدّات الثلاثة عندما تطبق قاعدة كرامر على نظام خطّي من معادلتين بمجهولين، إذا كانت إحدى المعادلتين ناتجة من ضرب الثانية في عدد؟
3. كن منظّمًا انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار القاعدة المناسبة.

3×3 مصفوفة	2×2 مصفوفة	المحدّد
		قاعدة كرامر



التمارين

4-3

تمارين موجّهة

1 مفردات ما معنى أن يكون أحد عناصر مصفوفة المعاملات صفرًا؟

جد محدّد المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 40 \\ -5 & 66\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad 5$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -4 \end{bmatrix} \quad 4$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.25 \\ 6 & 2.5 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad 2$$

1 انظر المثال

2 استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.

$$\begin{cases} 2y = 2 - x \\ -3x + 6y = -9 \end{cases} \quad 9$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2.5x - y = 1.5 \end{cases} \quad 8$$

$$\begin{cases} 4x + y + 6 = 0 \\ 8x + 2y = 9 \end{cases} \quad 7$$

$$\begin{cases} 6x = 2 - y \\ 3x + 1 = 2y \end{cases} \quad 6$$

2 انظر المثال

جد محدّد المصفوفة.

انظر المثال 3

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 12$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0.5 & 3 \end{bmatrix} \quad 11$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad 10$$

13 استهلاك اشترت هتاو 2 kg من الفستق و 1.5 kg من اللوز و 3 kg من البندق. ودفعت 28420 دينارًا، بينما دفعت صديقتها دوين 39390 دينارًا ثمن 4.5 kg من الفستق و 2 kg من البندق. ما ثمن الكيلوغرام من كل نوع، علمًا بأن ثمن الكيلوغرام من اللوز يساوي مجموع ثمتي كيلوغرام من الفستق و كيلوغرام من البندق.

انظر المثال 4

تمارين وحلّ مسائل

جد محدّد المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix} \quad 17$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix} \quad 16$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 15$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix} \quad 14$$

تمارين حرة

أنظر المثال	لحل التمارين
1	17-14
2	21-18
3	24-22
4	25

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.

$$\begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases} \quad 21$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{y}{2} = 2 \end{cases} \quad 20$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3.5 \\ 3x - y = 2.7 \end{cases} \quad 19$$

$$\begin{cases} 0.5x + 6y = 2 \\ 0.25x + 3y = 0.5 \end{cases} \quad 18$$

جد محدّد المصفوفة.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad 24$$

$$L = \begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad 23$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix} \quad 22$$

25 رشاقة تُدَوّن آراس عدد ساعات التمارين الرياضية التي تقوم بها، وعدد السرعات الحرارية التي تحرقها كل يوم. كم سرعة تحرق آراس في كل ساعة تمارس فيها كل نوع من التمارين؟ استعمل قاعدة كرامر للحل.

سجل ساعات تمارين آراس				
	ركوب الدراجة	كرة الطاولة	السباحة	السرعات المحروقة
الاثنين	1.5h	1h	0.75h	1620
الأربعاء	0.75h		1h	915
الجمعة	1h	1.5h		1230

26 علوم يُبيّن الجدول التالي الكتل الذرية لثلاث من المواد. اكتب نظام معادلات خطيّة، واستعمل قاعدة كرامر لتحديد الكتلة الذرية لكل من الكربون (C) والهيدروجين (H) والأكسجين (O).

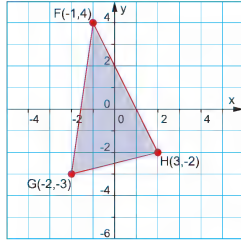
المادة	الصيغة	الكتلة الذرية
ميثان	CH ₄	16
غليسيرول	C ₃ H ₈ O ₃	92
ماء	H ₂ O	18

هندسة تساوي مساحة مثلث رؤوسه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) القيمة المطلقة

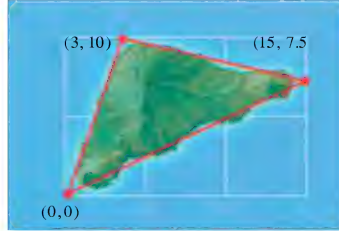
$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ للمحدد}$$

استعمل هذه المعلومة لحل التمرينين 26 و 27.

28 جد مساحة المثلث FGH .



27 جد مساحة جزيرة الفصح.



29 **تفكير ناقد** ما قيمة c التي تجعل محدّد مصفوفة معاملات النظام $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ cy = 3 - x \end{cases}$ يساوي صفرًا؟ أوضح كيف وجدت ذلك.

30 **إنترنت** طلب أحد مواقع الإنترنت تقويم أحد الموضوعات بإعطائه نقطة أو نقطتين أو 3 نقاط. كان عدد المقومين 38 شخصًا، وعدد من أعطوا 3 نقاط ضعف عدد من أعطوا نقطة واحدة. ما عدد الأشخاص الذين أعطوا كل تقويم، علمًا بأن العدد الكلي للنقاط كان 85؟

جد محدّد كل مصفوفة.

$$C = \begin{bmatrix} 6x^2 & -6x + 2x^2 \\ 3x & x - 3 \end{bmatrix} \quad 33$$

$$B = \begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix} \quad 32$$

$$A = \begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix} \quad 31$$

34 **معادن ثمينة** تبلغ كتلة قطعة نقود صغيرة من الفضة 2.268 g وكتلة قطعة نقود كبيرة 5 g . مع أوميد 425 قطعة من النوعين. قاس كتلتها فكانت 1483 g .

أ كم قطعة من كل نوع مع أوميد؟

ب ما ثمن القطع الفضيّة إذا كان ثمن القطعة الصغيرة 30 000 و ثمن القطعة الكبيرة

72 000 دينار؟

35 زارت حديقة الحيوانات مجموعة من 6 راشدين و 3 أولاد، ودفعت 48 000 دينار، في حين أن مجموعة تضمّنت اثنين من الراشدين و 10 أولاد دفعت 52 000 دينار. استعمل المجهول x لثمن بطاقة الولد، والمجهول y لثمن بطاقة الراشد.

أ اكتب نظام معادلات، يترجم المسألة.

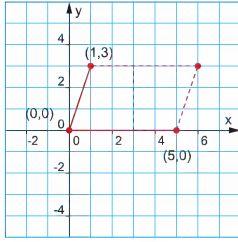
ب اكتب مصفوفة العوامل، واحسب محدّدها.

ج كم حلًا للمسألة؟

د استعمل قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من المجهولين.

هـ ما ثمن بطاقة الدخول للراشدين؟ و ثمن بطاقة الدخول للأولاد؟

36 **اكتب** كيف تتحقّق من أن تناسبًا هو صحيح؟ وكيف تتحقّق من أن محدّد مصفوفة 2×2 هو صفر. قارن.



37 خطوات متعددة تحدّد النقطتان (5, 0) و (1, 3) متوازي أضلاع أحد رؤوسه نقطة

الأصل في المستوى الإحداثي، كما يُبين ذلك الشكل المقابل.

أ جد مساحة متوازي الأضلاع.

ب ادخل النقطتين بالترتيب في $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ واحسب قيمة

هذا المحدّد. ما العلاقة بين قيمة هذا المحدّد

ومساحة متوازي الأضلاع؟

ج غيّر طول متوازي الأضلاع وعرضه، ثم احسب مساحته وقيمة المحدّد. هل تبقى العلاقة التي

وجدتها بين المحدّد والمساحة قائمة؟

د بادل بين النقطتين في السؤال (ب) بحيث تصبح النقطة (x_1, y_1) النقطة (1, 3). احسب

المساحة والمحدّد من جديد. ما تأثير هذه المبادلة في قيمة المحدّد؟

تحضير للاختبار

38 أي من الأوصاف يصح على النظام الخطّي $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$

أ غير محدّد؛ عدد غير محدود من الحلول **ج** مستحيل؛ لا حلول

ب مستحيل؛ كثير من الحلول **د** محدّد؛ حل وحيد

39 أي مصفوفة محدّدها 1؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **جواب مختصر** جد قيمة x علمًا بأن $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$.

تحدّ وتوسّع

41 افترض أن أحد أعمدة أو صفوف مصفوفة 3×3 يتألف من أصفار. ما تأثير

ذلك في محدّدها؟

42 اكتب مصفوفة محدّدها $x^2 + y^2$.

43 جد قيم a و b و c إذا كان $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

نتائج الاستفتاء		
القسم	مع النصب	ضده
الشمالي	47%	53%
الجنوبي	85%	15%
المجموع	49%	51%

44 **مدنيت** جرى استفتاء سكان مدينة مكوّنة من قسمين،

جنوبي وشمالي، بشأن إنشاء نصب تذكاري في ساحة المدينة.

يُلخّص الجدول المقابل نتائج ذلك الاستفتاء بالنسب المئوية. كم

مواطنًا من القسم الجنوبي أعطى رأيه، علمًا بأن عدد المستفتين

كان 4 826 شخصًا؟

مراجعة لولبية

45 استهلاك كان مع سافان 135 000 دينار عندما دخلت محل أحذية نسائية ووجدت حذاء خفّض ثمنه بنسبة 25%. اكتب متباينة يحقّقها السعر الأصلي للحذاء علماً بأن سافان قد اشترته. (الصفوف السابقة)

حلّ نظام المعادلات بالتعويض. (الصفوف السابقة)

$$\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases} \quad \text{48}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \quad \text{47}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases} \quad \text{46}$$

استعمل مصفوفة لتحويل المضلع $DEFG$ حيث $D(1, 1)$ و $E(4, -2)$ و $F(-2, -3)$ و $G(-1, -1)$. (الدرس 3-3)

49 سحب 5 وحدات إلى اليمين، و 3 وحدات إلى أعلى.

50 انعكاس حول المحور الأول.

51 سحب وحدة إلى اليسار، و وحدتين إلى أسفل.

52 تناسب هندسي نسبته 3.

اختبار جزئي

الفصل
3

1-3 المصفوفات والمعطيات

مواصفات ميداليات الألعاب الأولمبية			
برونزية	فضية	ذهبية	
453.6 gr	567 gr	567 gr	الكتلة
90	7.5	7.5	% نحاس
18.45	18.30	19.65	عدد ساعات التصنيع

استعمل الجدول لحل التمارين من 1 إلى 4.

1 استعمل مصفوفة M لعرض معطيات الجدول.

2 ما رتبة المصفوفة M ؟

3 ما قيمة العنصر M_{32} ؟ ماذا تمثل هذه القيمة ؟

4 ما عنوان العنصر 90 ؟

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 5 إلى 8.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1.5 & 2 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$C - 3A$ 8

$C - D$ 7

$2B$ 6

$A + C$ 5

2-3 ضرب المصفوفات

استعمل رُتَب المصفوفات $S_{5 \times 2}$ ، $R_{1 \times 5}$ ، $Q_{2 \times 5}$ ، $P_{5 \times 2}$ لحل التمارين من 9 إلى 12. اذكر إن كان

نتائج الضرب مُعرَّفًا، واكتب رتبته إذا كان كذلك.

SP 12

RS 11

QR 10

PQ 9

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 13 إلى 16.

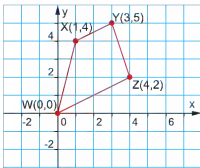
$$H = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, F = [0.5 \ 0.75 \ -1], E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

G^2 16

HG 15

FH 14

EF 13



3-3 تحويل الأشكال الهندسية باستعمال المصفوفات

جد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي بالتحويل الهندسي، وارسم هذه الصورة.

17 سحب وحدة واحدة إلى اليسار، ووحدتين إلى أسفل.

18 تصغير بنسبة $\frac{2}{3}$.

19 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. صِف الصورة.

20 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. صِف الصورة.

21 تحويل مصفوفته $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. صِف الصورة.

4-3 المحدّات

جد محدّد المصفوفة.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 25

$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.2 \\ -0.2 & 2.0 \end{bmatrix}$ 24

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ 23

$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 22

حلّ باستعمال قاعدة كرامر.

$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y = 2z + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$ 28

$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - x + 4 = 0 \end{cases}$ 27

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ y = 1 - x \end{cases}$ 26



مقلوب المصفوفة

Matrix Inverse

5-3

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل العاملون في تركيب الشيفرات وفكّها المصفوفات، للحفاظ على سرية الرسائل. (المثال 4)

الأهداف

يُقرّر إن كان لمصفوفة مقلوب أم لا.
يحل نظام معادلات خطية باستعمال مقلوب المصفوفة.

المفردات

Vocabulary

مقلوب المصفوفة

Matrix inverse

المعادلة المصفوفية

Matrix equation

مصفوفة المجهول

Variable matrix

مصفوفة الثوابت

Constant matrix

تستطيع تشفير رسالة باستعمال المصفوفات. يستعمل من تصل إليه الرسالة عملية معاكسة، لفك الشيفرة وقراءة الرسالة.
لكي يكون لمصفوفة مقلوب، يجب أن تكون مربعة. غير أن هذا الشرط غير كافٍ، لأن هناك مصفوفات مربعة لا مقلوب لها. إذا كان ناتج ضرب المصفوفة A في المصفوفة B يساوي مصفوفة الوحدة I ، فإن $AB=BA=I$. في هذه الحالة، تُسمّى المصفوفة B **مقلوب المصفوفة A Matrix Inverse**، ويُشار إليها بالرمز A^{-1} .

تحديد إن كانت مصفوفة مقلوب مصفوفة أخرى.

حدّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A .

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بما أن ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة، فإن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A .

$$B = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بالاستناد إلى ما سبق، فإن المصفوفة B ليست مقلوب المصفوفة A .

1. حدّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A .

$$B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.4 \\ 1.2 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



تذكر

مصفوفة الوحدة من الرتبة n هي المصفوفة المربعة من الرتبة n التي تساوي جميع عناصرها 0 باستثناء عناصر القطر الرئيس التي تساوي جميعها 1. فمصفوفة الوحدة من الرتبة 3 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقلوب مصفوفة مربعة من الرتبة 2

إذا كان محدد المصفوفة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مختلفاً عن الصفر، فإن لهذه المصفوفة مقلوباً هو $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

لا مقلوب لمصفوفة محددها يساوي الصفر.



مثال 2 إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

جد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{أ}$$

ابدأ بحساب محدد المصفوفة.

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2 \times 3 = 2 \neq 0$$

بما أن محدد المصفوفة مختلف عن الصفر، فإن لها مقلوباً هو:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{ب}$$

ابدأ بحساب محدد المصفوفة.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 12 - 2 \times 3 = 0$$

بما أن محدد المصفوفة يساوي الصفر، فليس للمصفوفة مقلوب.

إضاءة

للحصول على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ من المصفوفة } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بإبدال بين العنصرين a و d واستبدال بكل من العنصرين الآخرين معكوسه.

$$2. \text{ جد مقلوب المصفوفة } C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{نقطة مراقبة}$$

تستطيع استعمال المصفوفات لحل نظام معادلات خطية. باستعمال المصفوفات تحوّل حل نظام المعادلات إلى عملية شبيهة بحل معادلة خطية مثل $5x = 20$ ، عن طريق ضرب كل من طرفي المعادلة في مقلوب العامل 5، أي $\frac{1}{5}$.

للقيام بذلك، تُحوّل نظام المعادلات إلى **معادلة مصفوفية** $AX=B$ **Matrix equation**، حيث يرمز A إلى مصفوفة معاملات النظام، بينما يرمز X إلى **مصفوفة المجاهيل** **Variable matrix**. كما يرمز B إلى **مصفوفة الثوابت** **Constant matrix**.

المعادلة المصفوفية التي تمثل نظام المعادلتين الخطيتين هي:

$$A \bullet X = B$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المعاملات \rightarrow $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ \leftarrow مصفوفة الثوابت
 \uparrow
 مصفوفة المجاهيل

لحل المعادلة المصفوفية $AX=B$ ، اضرب كلا من طرفي المعادلة بمقلوب المصفوفة A (بافتراض

$$\text{وجوده): } A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\text{ناتج ضرب المصفوفة } A \text{ في مقلوبها هو مصفوفة الوحدة } I \quad IX = A^{-1}B \\ X = A^{-1}B$$

حل نظام معادلات خطية باستعمال مقلوب المصفوفة

مثال 3

اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثّل النظام الخطي $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ ، ثم حل.

الخطوة 1 اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثّل نظام المعادلتين.

$$A \quad X = B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 جد محدّد مصفوفة المعاملات.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1 \neq 0$$

الخطوة 3 جد مقلوب مصفوفة المعاملات.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 حل.

$$X = A^{-1}B \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

الحل إذن: $x = -7$ و $y = 15$.

انتبه!

بما أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً، احرص أن تضرب في المقلوب بالترتيب نفسه عند طرقي المساواة. يجب أن يكون A^{-1} الأول من اليسار في كل طرف.

3. اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثّل النظام $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ ، ثم حل.



أ	1	ز	11	ق	21
ب	2	س	12	ك	22
ت	3	ش	13	ل	23
ث	4	ص	14	م	24
ج	5	ض	15	ن	25
ح	6	ط	16	هـ	26
خ	7	ظ	17	و	27
د	8	ع	18	ي	28
ذ	9	غ	19	ـ	0
ر	10	ف	20		

تُستعمل المصفوفات التي لها مقلوب في تشفير الرسائل. افترض أنك تريد تشفير الرسالة التالية: «تصل البضاعة صباح الخميس». المرحلة الأولى في عملية التشفير هي تحويل هذه الرسالة إلى أعداد متتالية، باستعمال جدول تشفير يستبدل بكل حرف عدداً (يستعمل المرسل والمتلقي جدول التشفير نفسه). يُمكنك استعمال الجدول المقابل مثلاً حيث يرمز — إلى المسافة بين كلمتين. ابدأ بكتابة الرسالة حرفاً حرفاً مع استعمال — للفصل بين الكلمات.

تصل — ا ل ب ض ا ع — ص ب ا ح — ا ل خ م ي س
3 14 23 0 1 23 15 2 18 3 0 14 2 6 1 0 1 23 7 24 28 12

اكتب هذه المتتالية في مصفوفة من صفّين من اليمين إلى اليسار. بما أن عدد هذه الأعداد فردي، فعليك أن تضيف العدد 0 في نهاية المتتالية. بعد الانتهاء من هذا الأمر تحصل على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 18 & 1 & 15 & 2 & 23 & 1 & 0 & 23 & 14 & 3 \\ 0 & 12 & 28 & 24 & 7 & 23 & 1 & 0 & 6 & 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

ليس من الصعوبة بمكان فك شيفرة هذه الرسالة. لذا يستعمل المرسل مصفوفة مربّعة لها مقلوب لتعمية متتالية الأعداد قبل إرسالها. ويستعمل المتلقي مقلوب هذه المصفوفة لإزالة التعمية عن متتالية الأعداد التي يتلقاها. استعمل مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، واضربها في المصفوفة A ، تحصل على:

$$B = MA = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 110 & 51 & 59 & 52 & 71 & 3 & 12 & 71 & 46 & 37 \\ 0 & 81 & 266 & 127 & 140 & 129 & 166 & 7 & 30 & 166 & 108 & 91 \end{bmatrix}$$

يُرسل المرسل متتالية الأعداد التالية:

0 81 266 127 140 129 166 7 30 166 108 91 0 33 110 51 59 52 71 3 12 71 46 37

على المتلقي الآن أن يكتب هذه المتتالية في مصفوفة في صفين من اليمين إلى اليسار فيحصل على المصفوفة.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 110 & 51 & 59 & 52 & 71 & 3 & 12 & 71 & 46 & 37 \\ 0 & 81 & 266 & 127 & 140 & 129 & 166 & 7 & 30 & 166 & 108 & 91 \end{bmatrix}$$

ثم يضرب مقلوب M في C . مقلوب M هو $M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ ، وناتج الضرب $M^{-1}C$ هو

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 18 & 1 & 15 & 2 & 23 & 1 & 0 & 23 & 14 & 3 \\ 0 & 12 & 28 & 24 & 7 & 23 & 1 & 0 & 6 & 1 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

على المتلقي الآن أن يكتب عناصر المصفوفة التي حصل عليها في متتالية بدءًا من يمين الصف الأول. سوف يحصل على:

0 12 28 24 7 23 1 0 6 1 2 14 0 3 18 1 15 2 23 1 0 23 14 3

أخيرًا يكتب تحت كل عدد الحرف الذي يقابله في جدول التشفير.

0 12 28 24 7 23 1 0 6 1 2 14 0 3 18 1 15 2 23 1 0 23 14 3

ت ص ل ل ب ض ا ع ة ص ب ا ح ل ا ل خ م ي س ل

ويقرأ الرسالة: «تصل البضاعة صباح الخميس».

تطبيق على التشفير

مثال 4

تلقي راستي من صديقه لاوين الرسالة المشفرة والمعمّاة التالية.

84 7 48 55 128 70 6 41 46 107 . يستعمل لاوين وراستي مصفوفة التعمية

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} . \text{ ما رسالة لاوين؟}$$

الخطوة 1 جد مقلوب المصفوفة M .

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} ; |M| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -1$$

الخطوة 2 اكتب الرسالة التي تلقاها راستي، من اليمين إلى اليسار على صورة مصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 6 & 41 & 46 & 107 \\ 84 & 7 & 48 & 55 & 128 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 احسب $M^{-1}A$.

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 & 6 & 41 & 46 & 107 \\ 84 & 7 & 48 & 55 & 128 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 1 & 8 & 19 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 اكتب المصفوفة على صورة متتالية أعداد.

0, 1, 6, 1, 2, 14, 0, 1, 8, 19

الخطوة 5 فكّ شفير الرسالة.

0 1 6 1 2 14 0 1 8 19

غ د ا ص ب ا ح ا ب

رسالة لاوين هي: «غداً صباحاً».

4. استعمل مصفوفة التعمية $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ لفك الرسالة التالية:

20 86 19 56 72 10 46 10 29 43

نقطة
مراقبة



فكر وناقش

1. ماذا تستنتج عن المصفوفة A ، إذا عرفت أن لها مقلوباً؟
2. ما مقلوب مصفوفة الوحدة؟
3. كن منظماً انسخ الجدول وأكمّله. قارن بين مقلوب المصفوفة ومقلوب عدد حقيقي.

المصفوفات	الأعداد الحقيقية	
		الكتابة مع مثال
		كيف ترمز إلى مقلوب المصفوفة أو مقلوب العدد
		خاصية التبديل

اعلم
احفظ

التمارين

5-3

تمارين موجّهة

1 مفردات كيف تكتب نظاماً من معادلتين خطيتين بمجهولين، على الصورة المصفوفية؟

اذكر إن كانت المصفوفة الأولى مقلوب المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix} \quad 3 \quad \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad 2$$

جد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad 9 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad 8 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix} \quad 7 \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad 6 \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad 5$$

28 تفكير ناقداً ما العلاقة التي تربط بين مصفوفة ومقلوبها ومصفوفة الوحدة؟

29 شَفَر هَكَار رسالة يريد إرسالها إلى صديق. كتب الرسالة المشفرة في مصفوفة C ، واستعمل مصفوفة تعمية M ، فحصل على رسالة مشفرة ومعممة D . ما القيود التي ينبغي أن تراعيها رُتَب هذه المصفوفات؟

30 خطأ في التحليل حسب كل من شوان وسافان مقلوب المصفوفة $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. أي منهما أخطأ؟ وبيّن الخطأ.

ب	$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	سافان
أ	$M^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	شوان

31 تسليّة قال لك والدك أن في جيبه 5000 دينار مكوّنة من قطع من فئتي 50 دينارًا و 100 دينار، وأنه سيُعطيكي إياها، إذا عرفت كم قطعة نقود معه من كل فئة. رغبة منه في مساعدتك، ذكر لك أن عدد القطع كلها 73 قطعة. استعمل مقلوب مصفوفة لتربح 5000 دينار.

32 ماء وضعت بلدية المدينة صنبور ماء في إحدى الحدائق العامة ليستعمله المنتزهون. يعمل هذا الصنبور 24 ساعة في اليوم، ويُمكن استعماله بثلاث سرعات: بطيئة ومتوسطة وسريعة. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن استعمال هذا الصنبور خلال ثلاثة أيام. جد سرعات صب الصنبور الثلاث بالكيلولتر.

الكمية (كيلولتر)	سريعة (عدد الساعات)	متوسطة (عدد الساعات)	بطيئة (عدد الساعات)	
199	2	7	15	الأحد
208	4	4	16	الاثنين
236	4	8	12	الثلاثاء

33 ماذا لو... افترض أنك ضاعفت عناصر المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

- أ** كيف تتغير عناصر مقلوب هذه المصفوفة؟
ب اكتب مقولة تصف كيف تتغير عناصر مقلوب مصفوفة مُعيّنة، إذا ضربت المصفوفة في عدد k .

34 للدخول إلى حديقة الحيوانات، دفع هريم 24 000 دينار ثمن 7 بطاقات للصغار وبطاقتين للكبار. دفع مازن 46 000 دينار ثمن 4 بطاقات للكبار و 13 بطاقة للصغار. ارمز بالمجهول x إلى ثمن بطاقة الكبار، وبالمجهول y إلى ثمن بطاقة الصغار.

- أ** عبّر عن المسألة بواسطة نظام من المعادلات.
ب هل محدّد مصفوفة المعاملات يساوي الصفر؟ ما عدد الحلول؟
ج استعمل الصورة المصفوفية ومقلوب المصفوفة لإيجاد x و y .
د ما ثمن بطاقة الكبار؟ وما ثمن بطاقة الصغار؟

35 تفكير ناقد أ أثبت أن مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ب ما مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ إذا كان محددها يساوي 1؟

ج ما السبب الذي يجعل عناصر مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ أعدادًا صحيحة عندما تكون عناصرها أعدادًا صحيحة، ومحددها يساوي 1؟

36 جد قيمة x بحيث لا يكون للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ مقلوب.

37 ما مقلوب مصفوفة لها عنصر واحد $[a]$ ؟

38 كيمياء مزجت سانا كمية من محلول يحتوي على 15% من حمض الكبريت، وآخر يحتوي على 40% من هذا الحمض، وحصلت على 50L، نسبة حمض الكبريت فيها 35%. كم لترًا من كل محلول مزجت؟

39 اكتب جد ناتج الضرب $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$. ما العلاقة بين المصفوفتين؟



تحضير للاختبار



40 أي مما يلي هو الصورة المصفوفية للنظام $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ **ب** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ **د** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 أي مما يلي يصح على المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

أ للمصفوفة مقلوب، لأن محددها مختلف عن الصفر.

ب للمصفوفة مقلوب، لأن محددها يساوي الصفر.

ج لا مقلوب للمصفوفة، لأن محددها يساوي الصفر.

د لا مقلوب للمصفوفة، لأن محددها لا يساوي الصفر.

42 ما العنصر b_{11} في B إذا كانت B مقلوب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ؟

أ 1 **ب** $-\frac{1}{9}$ **ج** 3 **د** $-\frac{1}{27}$

43 أي مما يلي يصح على المصفوفة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، إذا كان محددها لا يساوي الصفر، وكان $a > 0$ و $b < 0$ و $c < 0$ و $d > 0$ ؟

أ جميع عناصر M^{-1} غير سالبة. **ب** للمصفوفة M^{-1} عنصر سالب واحد فقط.

ج للمصفوفة M^{-1} عنصران سالبان فقط. **د** للمصفوفة M^{-1} ثلاثة عناصر سالبة فقط.

44 جواب مختصر يقدم معرض لوحات فنية صورة كلفتها 25 000 دينار عن كل تبرع قيمته

500 000 دينار، وصورة كلفتها 50 000 دينار عن كل تبرع قيمته مليون دينار. جمع المعرض

تبرعات قيمتها 24 مليون دينار وقدم 35 صورة. ما عدد التبرعات من كل نوع؟

تحدّ وتوسّع

45 هويات يتم تثقيف العلامات التي ينالها الطالب في امتحان نهاية السنة الدراسية بعوامل مختلفة وفقاً للمادة. يُبيّن الجدول أدناه علامات 4 طلاب في 4 مواد، ومجموع كل منهم. عليك أن تجد ثقل كل مادة.

علامات امتحان نهاية العام الدراسي					
المجموع	اللغة الأجنبية	اللغة العربية	العلوم	الرياضيات	الطالب
1038	50	55	72	65	هيوا
890	60	66	45	40	ريبه
1030	65	60	65	55	روند
1275	75	65	75	85	دانا

46 جد قيم عناصر المصفوفة $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ لكي تكون مساوية لمقلوبها.

47 تلقى زيكال من أبيه الرسالة التالية 56 ، 38 ، 8 ، 32 ، 13 ، 8 ، 27 ، 5 ، 8 واستعمل لفكّ تعميتها مصفوفة 3×3 كل عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيس أصفار، في حين أن العناصر الأخرى كلها تساوي 1.

أ ما الرسالة التي تلقّاها؟

ب ما هي مصفوفة التعمية؟

ج رد زيكال على رسالة أبيه برسالة مشفرة مضمونها «سوف أحاول». ما الرسالة المشفرة التي تلقّاها الوالد؟

مراجعة لولبية

حلّ (الصفوف السابقة)

50 $125\%x = 117$

49 $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$

استعمل الحذف لحل نظام المعادلات. (الدرس 2-5)

52
$$\begin{cases} y - x - 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = -3 \\ 0.25x + 8z + 3 = 2y \end{cases}$$

51
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = 5 \\ -4z - 5y + 0.25z = -9 \end{cases}$$

جد محدّد المصفوفة. (الدرس 3-4)

56
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$$

55
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

54
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

53
$$\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$



الأعداد المركبة

6-3

Complex Numbers

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

يُمكن استعمال الأعداد المركبة لحل معادلة تربيعية لا جذور لها في مجموعة الأعداد الحقيقية. (مثال 4)

يُمكنك أن تتحقق بيانًا من أن الدالة $f(x) = x^2 + 1$

لا أصفار لها في مجموعة الأعداد الحقيقية. إذا حاولت حل المعادلة التربيعية المرافقة لها، $x^2 + 1 = 0$ ، تحصل على $x = \pm\sqrt{-1}$ ما يؤكّد عدم وجود جذور حقيقية لها.

لكن سيكون بمقدورك حل مثل هذه المعادلة لو عرّفت الجذر التربيعي للأعداد السالبة. وقد أدخل علماء الرياضيات هذه الجذور التربيعية وسَمّوها **الأعداد التخيلية Imaginary numbers**. أول هذه الأعداد هو **الوحدة التخيلية Imaginary Unit**، ورمزها i . $i = \sqrt{-1}$. يُمكنك كتابة الجذر التربيعي لأي عدد سالب باستعمال الوحدة التخيلية.

الأهداف

يُعرّف الأعداد التخيلية والمركبة ويستعملها.
يحل معادلات تربيعية لا جذور لها في مجموعة الأعداد الحقيقية.

المفردات

Vocabulary

الوحدة التخيلية
Imaginary unit

العدد التخيلي
Imaginary number

العدد المركب
Complex number

الأعداد التخيلية

اعلم

احفظ

في الجبر	بالأعداد	بالكلمات
إذا كان b عددًا حقيقيًا موجبًا فإن:	$\sqrt{-1} = i$	العدد التخيلي Imaginary Number هو جذر تربيعي لعدد سالب.
$\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$	$\sqrt{-2} = \sqrt{-1}\sqrt{2} = i\sqrt{2}$	يُمكن كتابة أي عدد تخيلي على الصورة bi
$\sqrt{-b^2} = ib$	$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$	حيث b عدد حقيقي و i الوحدة التخيلية.
$(\sqrt{-b})^2 = -b$	$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$	تربيع أي عدد تخيلي هو العدد السالب الذي استعمل لتعريفه.

الجزء الحقيقي
Real part

الجزء التخيلي
Imaginary part

مرافق العدد المركب
Complex conjugate

تبسيط الجذور التربيعية للأعداد السالبة

مثال 1

اكتب كل مقدار بدلالة i .

أ $3\sqrt{-16}$	ب $-\sqrt{-75}$
حلّ -16 .	حلّ -75 .
$3\sqrt{(16)(-1)}$	$-\sqrt{(75)(-1)}$
خاصية ضرب الجذور.	خاصية ضرب الجذور.
$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$
بسّط.	خاصية ضرب الجذور.
$3 \times 4\sqrt{-1}$	$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$
اضرب.	بسّط.
$12\sqrt{-1}$	$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$
اكتب بدلالة i .	اكتب بدلالة i .
$12i$	$-5\sqrt{3}i = -5i\sqrt{3}$

1. اكتب كل مقدار بدلالة i .

نقطة
مرافقة

ج $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

ب $2\sqrt{-36}$

أ $\sqrt{-12}$

حل معادلة تربيعية جذراها تخيلاني

مثال 2

حل المعادلة.

$$x^2 = -81 \quad \text{أ}$$

خذ الجذر التربيعي. $x = \pm\sqrt{-81}$

اكتب بدلالة i . $x = \pm 9i$

تحقق

$x^2 = -81$	$x^2 = -81$
$(-9i)^2 = -81$	$(9i)^2 = -81$
$81i^2 = -81$	$81i^2 = -81$
$81(-1) = -81 \checkmark$	$81(-1) = -81 \checkmark$

$$3x^2 + 75 = 0 \quad \text{ب}$$

أضف -75 إلى كل طرف. $3x^2 = -75$

اقسم كل طرف على 3. $x^2 = -25$

خذ الجذر التربيعي. $x = \pm\sqrt{-25}$

اكتب بدلالة i . $x = \pm 5i$

تحقق

$3x^2 + 75 = 0$	$3x^2 + 75 = 0$
$3(\pm 5i)^2 + 75 = 0$	$3(\pm 5i)^2 + 75 = 0$
$3(25)i^2 + 75 = 0$	$3(25)i^2 + 75 = 0$
$75(-1) + 75 = 0 \checkmark$	$75(-1) + 75 = 0 \checkmark$

2. حل المعادلة.

نقطة مراقبة

$$x^2 + 36 = 0 \quad \text{أ}$$

$$x^2 + 48 = 0 \quad \text{ب}$$

$$9x^2 + 25 = 0 \quad \text{ج}$$

الأعداد المركبة C

$3+7i$ $3+\frac{2}{3}i$ $4-i$

الأعداد الحقيقية (\mathbb{R})	الأعداد التخيلية
$-\frac{1}{2}$ 1.73 0 π	i $3i$ $-5i$
-9.6 $\sqrt{2}$	$\sqrt{-7}$

العدد المركب Complex Number

عدد يمكنك كتابته على صورة $a+ib$ ، حيث a و b عددين حقيقيين و $i = \sqrt{-1}$. تُشكّل مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} جزءاً من مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} أي إن $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

لكل عدد مركب جزء حقيقي Real Part هو a و جزء تخيلي Imaginary Part هو b .

الجزء الحقيقي الجزء التخيلي

$$a + bi$$

الأعداد الحقيقية أعداد مركبة جزؤها التخيلي يساوي 0. الأعداد التخيلية أعداد مركبة جزؤها الحقيقي يساوي 0 وجزؤها التخيلي مختلف عن 0.

يتساوى عدنان مركبان إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وجزءاهما التخيلانيان.

تساوي عددين مركبين

مثال 3

جد قيمة كل من x و y بحيث تصح المساواة $3x-5i=6-(10y)i$.

$$3x-5i=6-(10y)i$$

الجزءان الحقيقيان الجزءان التخيلانيان

يتساوى الجزءان التخيلانيان $-(10y) = -5$
 $y = \frac{1}{2}$

يتساوى الجزءان الحقيقيان $3x = 6$
 $x = 2$

3. جد قيمة كل من x و y بحيث تصح المساواة.

ب $-8 + (6y)i = 5x - i\sqrt{6}$

أ $2x - 6i = -8 + (20y)i$

نقطة
مراقبة



مثال 4 إيجاد الأصفار المركبة للدوال التربيعية

جد صفري الدالة التربيعية.

ب $g(x) = x^2 + 10x + 35$

أ $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$x^2 + 10x + 35 = 0$ اكتب المعادلة.

$x^2 - 2x + 5 = 0$ اكتب المعادلة.

$x^2 + 10x + 25 = -35 + 25$ زد لتظهر.

$x^2 - 2x + 1 = -5 + 1$ زد لتظهر.

$(x+5)^2 = -10$ مربعاً كاملاً.

$(x-1)^2 = -4$ مربعاً كاملاً.

$x+5 = \pm\sqrt{-10}$ خذ الجذر.

$x-1 = \pm\sqrt{-4}$ خذ الجذر.

$x = -5 \pm i\sqrt{10}$ بسط.

$x = 1 \pm 2i$ بسط.

4. جد صفري الدالة التربيعية.

ب $g(x) = x^2 - 8x + 18$

أ $f(x) = x^2 + 4x + 13$

نقطة
مراقبة



هناك علاقة تربط بين صفري الدالة $-5 + i\sqrt{10}$ و $-5 - i\sqrt{10}$ في المثال 4 - ب يُشكل هذان العددان المركبان عددَيْن مترافقَيْن. جزءاهما الحقيقيان متساويان في حين أن جزءيهما التخيلِيَّين متعاكسان. **العدد المترافق Conjugate Number** للعدد المركب $a + bi$ هو العدد المركب $a - bi$.

إذا كان جذرا معادلة تربيعية، معاملاتها أعداد حقيقية، غير حقيقيين، فإنهما عددان مركبان مترافقان.

إضاءة

إذا كانت معاملات المعادلة التربيعية أعداداً حقيقية، وإذا عرفت أحد جذريها وكان غير حقيقي، فالجذر الثاني يكون مرافق هذا الجذر.

مثال 5 إيجاد العدد المترافق لعدد مركب

جد العدد المترافق للعدد المركب.

ب $-4i$

أ $2i - 15$

اكتب على صورة $a + bi$ $0 + (-4)i$
جد $a - bi$ $0 - (-4)i$
بسّط $4i$

اكتب على صورة $a + bi$ $-15 + 2i$
جد $a - bi$ $-15 - 2i$

5. جد العدد المترافق للعدد المركب.

ج $-8i$

ب $i + \sqrt{3}$

أ $9 - i$

نقطة
مراقبة



فكر وناقش

الأعداد المركبة

الأعداد الحقيقية الأعداد التخيلية

1. إذا عرفت أن $3 + i$ جذر لمعادلة تربيعية عوamlها أعداد حقيقية، فكيف تجد الجذر الآخر؟
2. اكتب عدداً مركباً $a + bi$ حيث $a \neq 0$ و $b = 0$. ثم اكتب عدداً مركباً $a + bi$ حيث $a = 0$ و $b \neq 0$. أوضح إجابتك.
3. كن منظماً انسخ المخطط وأكمّله. اكتب في كل إطار تعريفاً ومثالاً مناسباً.

اعلم

احفظ

6-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات العدد 7 هو _____ للعدد $\sqrt{5}+7i$. (الجزء الحقيقي أو الجزء التخيلي).

اكتب العدد بدلالة i .

5 $\sqrt{-144}$

4 $-\sqrt{-32}$

3 $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$

2 $5\sqrt{-100}$

حلّ المعادلة.

9 $x^2+121=0$

8 $4x^2=-16$

7 $2x^2+72=0$

6 $x^2=-9$

جد قيمتي x و y اللتين تحقّقان المساواة.

11 $-4+yi=-12x-i+8$

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$

جد أصفار الدالة.

13 $g(x)=x^2+6x+34$

12 $f(x)=x^2-12x+45$

جد العدد المرافق.

17 $6+i\sqrt{2}$

16 $8i-3$

15 $\sqrt{5}+5i$

14 $-9i$

تمارين وحلّ مسائل

اكتب العدد بدلالة i .

21 $\sqrt{-50}$

20 $6\sqrt{-12}$

19 $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$

18 $8\sqrt{-4}$

حلّ المعادلة.

25 $\frac{1}{2}x^2=-32$

24 $3x^2+27=0$

23 $5x^2=-80$

22 $x^2+49=0$

جد قيمتي x و y اللتين تحقّقان المساواة.

27 $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

26 $9x+yi-5=-12i+4$

جد أصفار الدالة.

29 $g(x)=4x^2-3x+1$

28 $f(x)=x^2+2x+3$

31 $g(x)=3x^2-6x+10$

30 $f(x)=x^2+4x+8$

جد العدد المرافق.

35 $\frac{i}{10}-1$

34 $-2.5i+1$

33 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$

32 i

تمارين حرة

انظر المثال	حل التمارين
1	21-18
2	25-22
3	27-26
4	31-27
5	35-32



36 ماذا لو...؟ في إحدى ألعاب مدينة الألعاب يضرب اللاعب على نابض بمطرقة ليدفع كرة معدنية باتجاه جرس. يربح اللاعب إذا وصلت الكرة إلى الجرس. تُشكّل الدالة $d(t) = 16t^2 - 32t + 18$ نموذجًا لحساب المسافة d ، بالقدم، بين الكرة والجرس بدلالة عدد الثواني t التي مرت على ضرب اللاعب للنابض. هل يُمكن للاعب أن يربح.

جد الجذر الثاني لمعادلة معاملاتها حقيقية، علمًا بأن العدد المُعطى جذر لها.

$$4i - 2\sqrt{5} \quad \text{39}$$

$$\frac{5}{7}i \quad \text{38}$$

$$1 + 14i \quad \text{37}$$

$$-\frac{17}{3}i \quad \text{42}$$

$$9 - i\sqrt{2} \quad \text{41}$$

$$-12 - i \quad \text{40}$$

جد قيمتي c و d اللتين تحققان المساواة.

$$c^2 + 4i = d + di \quad \text{45}$$

$$c + 3ci = 4 + di \quad \text{44}$$

$$2ci + 1 = -d + 6 - ci \quad \text{43}$$

حلّ المعادلة.

$$2x^2 + 12.5 = 0 \quad \text{48}$$

$$\frac{1}{3}x^2 = -27 \quad \text{47}$$

$$8x^2 = -8 \quad \text{46}$$

$$2x^2 + 16 = 0 \quad \text{51}$$

$$x^2 = -30 \quad \text{50}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 72 = 0 \quad \text{49}$$

$$x^2 - 12x + 44 = 0 \quad \text{54}$$

$$x^2 + 10x + 29 = 0 \quad \text{53}$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \text{52}$$

$$-149 = x^2 - 24x \quad \text{57}$$

$$x^2 + 18 = -6x \quad \text{56}$$

$$x^2 + 2x = -5 \quad \text{55}$$

اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا. إذا كانت صحيحة أحيانًا، أعط أمثلة تدعم ما ذكرت.

$$\text{العدد التخيلي عدد مركّب.} \quad \text{59}$$

$$\text{العدد الحقيقي عدد تخيلي.} \quad \text{58}$$

$$\text{العدد المركّب عدد تخيلي.} \quad \text{61}$$

$$\text{العدد النسبي عدد مركّب.} \quad \text{60}$$

$$\text{لا جذور حقيقية للمعادلة التربيعية.} \quad \text{63}$$

$$\text{العدد الصحيح عدد مركّب.} \quad \text{62}$$

$$\text{للمعادلة التربيعية جذر حقيقي وجذر مركّب.} \quad \text{64}$$

$$\text{جذرا المعادلة التربيعية عدنان مترافقان.} \quad \text{65}$$

جد أصفار الدالة.

$$h(x) = x^2 - 10x + 50 \quad \text{68}$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 17 \quad \text{67}$$

$$f(x) = x^2 - 10x + 26 \quad \text{66}$$

$$h(x) = x^2 - 16x + 68 \quad \text{71}$$

$$g(x) = x^2 - 10x + 37 \quad \text{70}$$

$$f(x) = x^2 + 16x + 73 \quad \text{69}$$

$$\text{تفكير ناقد} \quad \text{هل يُمكنك إيجاد صفري الدالة } f(x) = x^2 + 64 \text{ بيانيًا؟ أوضح جوابك.} \quad \text{72}$$

$$\text{تفكير ناقد} \quad \text{ما العدد المركّب المرافق لعدد حقيقي؟} \quad \text{73}$$

$$\text{اكتب} \quad \text{ما الطريقة التي تستعملها لحل معادلة تربيعية لا جذور حقيقية لها؟} \quad \text{74}$$

$$\text{75} \quad \text{ركل لاعب الكرة إلى الأعلى. تُشكّل الدالة } h(t) = -4.9t^2 + 36t \text{ نموذجًا لحساب ارتفاع الكرة، بالأمتار، بعد } t \text{ ثانية من ركلها.}$$

$$\text{أ} \quad \text{رفع فوق الملعب سقف مشبك على ارتفاع 85 مترًا. حلّ المعادلة } -4.9t^2 + 36t = 72 \text{ .}$$

$$\text{ب} \quad \text{بالاستناد إلى ما وجدته في السؤال (أ)، هل يُمكن للكرة أن تصل إلى الشبكة؟ أوضح ذلك.}$$

$$\text{ج} \quad \text{ما أعلى ارتفاع تستطيع الكرة بلوغه، بالاستناد إلى النموذج؟}$$

نافذة

تاريخ الرياضيات



كان عالم الرياضيات السويسري ليونارد أولر Euler (1783-1707) أول من استعمل الرمز i للدلالة على $\sqrt{-1}$. كما أدخل الكتابة $f(x)$ للدلالة على قيمة الدالة f عندما يتخذ المتغير الحر القيمة x .



- 76 أي مما يلي هو العدد المرافق للعدد المركب $-2+i$ ؟
 (أ) $2+i$ (ب) $2-i$ (ج) $i-2$ (د) $-2-i$
- 77 أي مما يلي هو $\sqrt{-225}$ مكتوبًا بدلالة i ؟
 (أ) $15i$ (ب) $-15i$ (ج) $i\sqrt{15}$ (د) $-i\sqrt{15}$
- 78 أي مما يلي صفرا الدالة $f(x)=x^2-2x+17$ ؟
 (أ) $1\pm 4i$ (ب) $4\pm i$ (ج) $-1\pm 4i$ (د) $-4\pm i$
- 79 أي قيمة للمجهول c تجعل المساواة $3-4i-5=(9+ci)-11$ صحيحة ؟
 (أ) -2 (ب) -4 (ج) 2 (د) 4
- 80 أي من المعادلات التالية لها الجذران $-6i$ و $6i$ ؟
 (أ) $-\frac{1}{6}x^2=6$ (ب) $\frac{1}{4}x^2=9$ (ج) $x^2-30=6$ (د) $20-x^2=-16$
- 81 **جواب مختصر** أوضح نوع حلول المعادلات التي تُكتب على الصورة $x^2=a$ ، عندما يكون $a>0$ ثم عندما يكون $a<0$.

تحدّ وتوسّع

- 82 جد العدد المركب $a+bi$ حيث $5a+3b=1$ و $-5b=7+4a$.
- 83 هل يُمكن أن يكون لمعادلة تربيعية جذر حقيقي واحد؟ جذر تخيُّلي واحد؟ جذر مركب واحد؟ أوضح ذلك.
- 84 حدّد نتيجة كل شرط على حل المعادلة $x^2+bx+c=0$.
 (أ) $b=0$ (ب) $c\leq 0$ (ج) $c>0$ (د) أي شرط يجعل الجزء التخيُّلي للحل مختلفًا عن 0 ؟

مراجعة لولبية

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 85 إلى 88. احسب إن كان ذلك ممكنًا. (الدرس 3 - 2)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$S^2 \quad 88$$

$$ST \quad 87$$

$$TV \quad 86$$

$$T^2 \quad 85$$

لكل دالة: (أ) حدّد إن كان بيانها ينفّث إلى أعلى أو إلى أسفل، (ب) جد محور تناظر بيانها، (ج) جد رأس بيانها، (د) جد تقاطعها مع المحور الثاني وارسم بيانها. (الصفوف السابقة)

$$f(x)=-x^2+3 \quad 90$$

$$f(x)=\frac{1}{5}x^2+x-10 \quad 89$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1 \quad 92$$

$$f(x)=2x^2+4x-3 \quad 91$$

حلّ المعادلة بالتحليل. (الصفوف السابقة)

$$4x^2+9=15x \quad 95$$

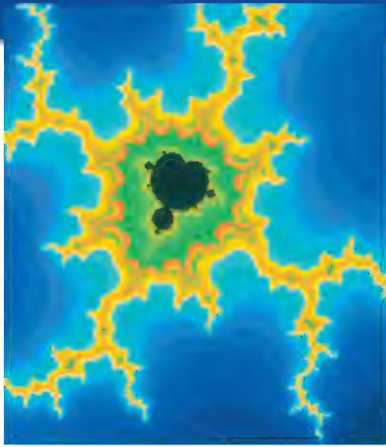
$$6x^2=-x+2 \quad 94$$

$$x^2+5x=14 \quad 93$$

$$x^2=-7x \quad 98$$

$$x^2+11x=-24 \quad 97$$

$$4x^2=1 \quad 96$$



العمليات على الأعداد المركبة

Operations With Complex Numbers

7-3

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

تُستعمل الأعداد المركبة في القواعد التي تنشئ أشكالاً توالدية. (التمرين 84)

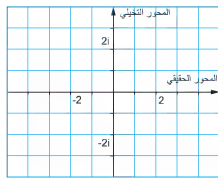
الأهداف

يجري العمليات الأربع على الأعداد المركبة.

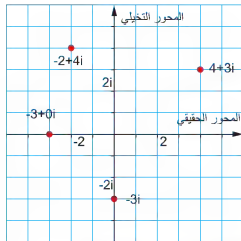
المفردات

Vocabulary

المستوي المركب
Complex plane
مُطلق العدد المركب
Absolute value of a complex number



سبق أن ممّلت الأعداد الحقيقية بنقاط على محور الأعداد. سوف تتعلم في هذا الدرس كيف تمّثل الأعداد المركبة بنقاط على المستوي الإحداثي. **Complex plane** المستوي المركب مستوي إحداثي يمثل محوره الأول مجموعة الأعداد الحقيقية ومحوره الثاني مجموعة الأعداد التخيلية.



تمثيل الأعداد المركبة:

مثّل بيانياً كلاً من الأعداد المركبة التالية:

ج $4+3i$

أ $-3+0i$

د $-2+4i$

ب $-3i$

مساعدة

المحور الحقيقي هو المحور الأول، والمحور التخيلي هو المحور الثاني. فكّر في $a+bi$ على أنه $x+yi$

1. مثّل بيانياً كلاً من الأعداد المركبة التالية:

د $3+2i$

ج $-2-i$

ب $2i$

أ $3+0i$



تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي أو مُطلّقه، هي طول المسافة بين النقطة التي تمّثل العدد على محور الأعداد ونقطة الأصل على هذا المحور. بالطريقة نفسها تُعرّف **القيمة المطلقة Absolute value** لعدد مركب أو مُطلّقه على أنها طول المسافة بين النقطة التي تمّثل العدد في المستوي المركب ونقطة الأصل في هذا المستوي.

القيمة المطلقة أو مُطلق العدد المركب

مثال	في الجبر	بالكلمات
$ 3+4i = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$ a+bi = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p>القيمة المطلقة أو مُطلق العدد المركب $a+bi$ هي طول المسافة بين النقطة (a, b) ونقطة الأصل في المستوي الإحداثي. يُكتب مُطلق العدد المركب $a+bi$ على صورة $a+bi$.</p>



مثال 2 حساب مُطلق عدد مركَّب

احسب مُطلق العدد المركَّب.

أ $ -9+i $	ب $ 6 $	ج $ -4i $
$ -9+i $	$ 6+0i $	$ 0-4i $
$\sqrt{(-9)^2+1^2}$	$\sqrt{6^2+0^2}$	$\sqrt{0^2+4^2}$
$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{16}=4$

2. احسب مُطلق العدد المركَّب.

أ $1-2i$	ب $-\frac{1}{2}$	ج $23i$
----------	------------------	---------



جمع الأعداد المركَّبة وطرحها مشابهان لجمع وطرح المقادير الجبرية التي تتضمن حدودًا متشابهة. لكي تجمع أعدادًا مركَّبة، اجمع الأجزاء الحقيقية من جهة والأجزاء التخيلية من جهة.

تتمتع عمليات الجمع والطرح والضرب في مجموعة الأعداد المركَّبة بالخصائص نفسها التي تتمتع بها هذه العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية. لذا يُمكنك أن تستعمل خصائص التبديل والتجميع والتوزيع لكتابة المقادير المركَّبة على أبسط صورة.

مثال 3 جمع الأعداد المركَّبة وطرحها

اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$	ب $(4-i)-(5+8i)$	ج $(6-2i)+(-6+2i)$	د $(10+3i)-(10-4i)$
$(3-2)+(-11i+4i)$	$(4-i)-5-8i$	$(6-6)+(-2i+2i)$	$(10+3i)-10-(-4i)$
$1-7i$	$(4-5)+(-i-8i)$	$0+0i$	$(10-10)+(3i+4i)$
$1-7i$	$-1-9i$	0	$0+7i=7i$

اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

وزع.

اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

وزع.

اجمع الجزءين الحقيقيين والجزءين التخيليين.

مُساعدة

لكل عدد مركَّب معكوس.
معكوس العدد المركَّب $a+bi$
هو $-a-bi$

3. اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

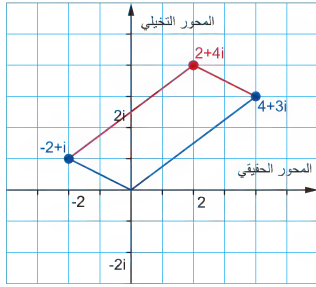
أ $(-3+5i)+(-6i)$	ب $2i-(3+5i)$	ج $(4+3i)+(4-3i)$
-------------------	---------------	-------------------



يُمكنك أيضًا جمع الأعداد المركَّبة باستعمال المستوي الإحداثي.

جمع الأعداد المركبة على المستوي المركب

مثال 4



جد بيانياً المجموع $(4+3i)+(-2+i)$.

الخطوة 1 مثل بيانياً كلا من العددين المركبين $4+3i$ و $-2+i$ في المستوي المركب. أنشئ القطعة المستقيمة التي تصل كلا من النقطتين بنقطة الأصل.

الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع. تمثل النقطة التي تُشكّل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع مجموع العددين المركبين والذي يساوي $2+4i$.

$$\text{إذن } (4+3i)+(-2+i)=2+4i$$

تحقق اجمع العددين المركبين بجمع جزءيهما الحقيقيين وجزءيهما التخيليين.

$$(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$$

4. احسب بيانياً.

نقطة مراقبة

ب $(-4-i)+(2-2i)$

أ $(3+4i)+(1-3i)$

تستطيع ضرب الأعداد المركبة باستعمال التوزيع، متعاملاً مع الأجزاء التخيلية على أنها حدود متشابهة، ومستبدلاً بـ i^2 العدد -1 حيث يوجد.

ضرب الأعداد المركبة

مثال 5

اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

ج $(5-6i)(4-3i)$

أ $2i(3-5i)$

$$20-15i-24i+18i^2$$

$$6i-10i^2$$

$$20-39i+18(-1)$$

$$6i-10(-1)$$

$$2-39i$$

$$10+6i$$

د $(6i)(6i)$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$$36i^2$$

$$49-14i+14i-4i^2$$

$$36(-1)$$

$$49-4(-1)$$

$$-36$$

$$53$$

5. اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

نقطة مراقبة

ج $(3+2i)(3-2i)$

ب $(4-4i)(6-i)$

أ $2i(3-5i)$

يُمكنك إيجاد قوى الوحدة التخيلية i ، كما هو مُبيّن في الجدول أدناه.

قوى العدد i		
$i^9 = i$	$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$	$i^1 = i$
$i^{10} = -1$	$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$	$i^2 = -1$
$i^{11} = -i$	$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$	$i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$
$i^{12} = 1$	$i^8 = i^4 \times i^4 = 1 \times 1 = 1$	$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$

مُساعدة

لاحظ أن النمط المتكرر في كل صف يسمح لك بحساب أي قوة من قوى العدد i ، على أنها أحد الأعداد $1, -i, -1, i$.

مثال 6

حساب قوى العدد i اكتب $3i^{12}$ على أبسط صورة.

$$\begin{aligned} -3i^{12} &= -3(i^2)^6 \\ &= -3(-1)^6 = -3 \times 1 = -3 \end{aligned}$$

اكتب i^{25} على أبسط صورة.

$$\begin{aligned} i^{25} &= i \times i^{24} \\ &= i(i^2)^{12} \\ &= i(-1)^{12} = i \times 1 = i \end{aligned}$$

6. اكتب على أبسط صورة.

$$i^{42} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\frac{1}{2}i^7 \quad \boxed{\text{أ}}$$

نقطة
مراقبة

تذكر أن المقدار المكتوب على أبسط صورة لا يمكن أن يتضمن جذراً في المقام. بما أن i جذر تربيعي، فإن كتابة مقدار مركب على أبسط صورة يتطلب التخلص من i في المقام بطريقة تنسب المقام للوصول إلى ذلك، اضرب البسط والمقام بالعدد المرافق للعدد الموجود في المقام.

قسمة الأعداد المركبة

مثال 7

اكتب $\frac{3+7i}{8i}$ على أبسط صورة.

$$\begin{aligned} \frac{3+7i}{8i} &= \frac{3+7i}{8i} \times \left(\frac{-8i}{-8i} \right) \\ &= \frac{-24i-56i^2}{-64i^2} \\ &= \frac{-24i+56}{64} \\ &= \frac{-3i+7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i \end{aligned}$$

اكتب $\frac{5+i}{2-4i}$ على أبسط صورة.

$$\begin{aligned} \frac{5+i}{2-4i} &= \frac{5+i}{2-4i} \times \left(\frac{2+4i}{2+4i} \right) \\ &= \frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2} \\ &= \frac{10+22i-4}{4+16} \\ &= \frac{6+22i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i \end{aligned}$$

7. اكتب على أبسط صورة.

$$\frac{3-i}{2-i} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\frac{3+8i}{-i} \quad \boxed{\text{أ}}$$

نقطة
مراقبة

فكر وناقش

- أوضح متى يتساوى عدد مركب $a+bi$ ومرافقه.
- جد ناتج الضرب $(a+bi)(c+di)$ وحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لهذا الناتج.
- كن منظماً انسخ المخطط ثم أكمله، وضع في كل إطار مثلاً مناسباً.

المطلق	الجمع
الضرب	العدد المرافق
الأعداد المركبة	

اعلم
احفظ

7-3 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات في المستوى المركّب، يُمثّل المحور الأول الأعداد _____ بينما يُمثّل المحور الثاني الأعداد _____. (الحقيقية، النسبية، التخيلية).

1 انظر المثال مثل بيانياً العدد المركّب.

$-2-3i$ 5 $3+2i$ 4 $-i$ 3 4 2

2 انظر المثال جد القيمة المطلقة.

$|15i|$ 11 $|-1+i|$ 10 $|5+12i|$ 9 $|-9i|$ 8 $|-33.3|$ 7 $|4-5i|$ 6

3 انظر المثال اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

$(-1-8i)+(4+3i)$ 13 $(2+5i)+(-2+5i)$ 12
 $(4-8i)+(-13+23i)$ 15 $(1-3i)-(7+i)$ 14
 $(-30+i)-(-2+20i)$ 17 $(6+17i)-(18-9i)$ 16

4 انظر المثال جد المجموع بيانياً.

$(-4-4i)+(4+2i)$ 20 $(-2-5i)+(-1+4i)$ 19 $(3+4i)+(-2-4i)$ 18

5 انظر المثال اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

$(9+i)(4-i)$ 23 $3i(5+2i)$ 22 $(1-2i)(1+2i)$ 21
 $(-4-5i)(2+10i)$ 26 $(3+i)^2$ 25 $(6+8i)(5-4i)$ 24

6 انظر المثال اكتب على أبسط صورة.

i^{30} 29 $2i^{15}$ 28 $-i^9$ 27

7 انظر المثال اقسم. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

$\frac{8+2i}{5+i}$ 32 $\frac{11-5i}{2-4i}$ 31 $\frac{5-4i}{i}$ 30
 $\frac{-3-12i}{6i}$ 35 $\frac{45-3i}{7-8i}$ 34 $\frac{17}{4+i}$ 33

تمارين وحلّ مسائل

مثل بيانياً العدد المركّب.

$4-3i$ 39 $i+1$ 38 $-2.5i$ 37 -3 36

جد القيمة المطلقة.

$|10-4i|$ 45 $|-0.5i|$ 44 $|6-8i|$ 43 $|\frac{4}{5}i|$ 42 $|-18|$ 41 $|2+3i|$ 40

تمارين حرة

حل	أنظر
التمارين	المثال
1	39-36
2	45-40
3	51-46
4	54-52
5	60-55
6	63-61
7	69-64

اجمع أو اطرح. اكتب الناتج على صورة $a+bi$.

$$(4-2i)+(-9-5i) \quad \boxed{48}$$

$$4i-(11-3i) \quad \boxed{47}$$

$$(8-9i)-(-2-i) \quad \boxed{46}$$

$$-16+(12+9i) \quad \boxed{51}$$

$$(3-i)-(-3+i) \quad \boxed{50}$$

$$(13+6i)+(15+35i) \quad \boxed{49}$$

جد المجموع بيانياً.

$$(-3-3i)+(4-3i) \quad \boxed{54}$$

$$(5+4i)+(-1+2i) \quad \boxed{53}$$

$$(4+i)+(-3i) \quad \boxed{52}$$

اضرب. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

$$(7+2i)(7-2i) \quad \boxed{57}$$

$$(3-5i)(2+9i) \quad \boxed{56}$$

$$-12i(-1+4i) \quad \boxed{55}$$

$$-4(8+12i) \quad \boxed{60}$$

$$(7-5i)(-3+9i) \quad \boxed{59}$$

$$(5+6i)^2 \quad \boxed{58}$$

اكتب على أبسط صورة.

$$5i^{10} \quad \boxed{63}$$

$$-i^{11} \quad \boxed{62}$$

$$i^{27} \quad \boxed{61}$$

اقسم. اكتب الناتج على صورة $a+ib$.

$$\frac{3}{-1-5i} \quad \boxed{66}$$

$$\frac{5-2i}{3+i} \quad \boxed{65}$$

$$\frac{2-3i}{i} \quad \boxed{64}$$

$$\frac{6+3i}{2-2i} \quad \boxed{69}$$

$$\frac{8+4i}{7+i} \quad \boxed{68}$$

$$\frac{19+9i}{5+i} \quad \boxed{67}$$

اكتب العدد المركب الذي تمثله النقطة.

$$E \quad \boxed{74}$$

$$D \quad \boxed{73}$$

$$C \quad \boxed{72}$$

$$B \quad \boxed{71}$$

$$A \quad \boxed{70}$$

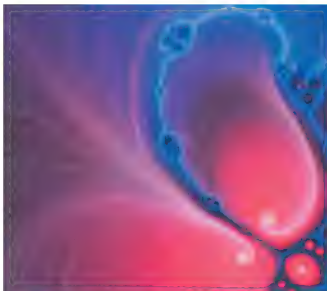
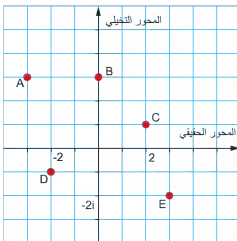
جد مطلق العدد المركب.

$$-1-8i \quad \boxed{78}$$

$$2\sqrt{2}-i\sqrt{3} \quad \boxed{77}$$

$$7i \quad \boxed{76}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \quad \boxed{75}$$



أشكال توالدية Fractals الأشكال التوالدية أنماط تنتج

من استعمال الأعداد المركبة وتكرار قوانين رياضية. عوّض بالعدد الأول في القانون ثم خذ الناتج وعوّض به في القانون مجدداً وهكذا ... يُمكن استعمال كل عدد مركب ينتج من هذه العملية التكرارية لتحديد لون بيكسل (أو نقطة) على شاشة الحاسوب. تُبين الصورة المقابلة مثلاً على ما يُمكن أن ينتج. يعتمد الكثير من أنماط الأشكال التوالدية على قانون مجموعة جوليا Julia وهو: $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + c$ حيث c عدد ثابت. استعمل قانون مجموعة جوليا حيث $c = 0.25$.

أ احسب Z_2 علماً بأن $Z_1 = 0.5 + 0.6i$.

ب احسب Z_3 مستعملاً العدد Z_2 الذي وجدته في السؤال (أ).

ج احسب Z_4 مستعملاً العدد Z_3 الذي وجدته في السؤال (ب).

اكتب المقدار المركب على صورة $a+ib$ بعد تبسيطه.

$$(6-5i)^2 \quad \boxed{82}$$

$$(-2.3+i)-(7.5-0.3i) \quad \boxed{81}$$

$$6i-(4+5i) \quad \boxed{80}$$

$$(2-i)(2+i)(2-i) \quad \boxed{85}$$

$$(5+7i)(5-7i) \quad \boxed{84}$$

$$(-2-3i)^2 \quad \boxed{83}$$

نافذة

الأشكال التوالدية



الشكل التوالدي Fractal شكل يتوالد بعضه من بعض على النسق نفسه. وهذا يعني أن أجزاء الشكل تشبه الشكل كله. توجد في الطبيعة أشكال توالدية كثيرة مثل عروق أوراق الشجر وحبات الثلج الذي يتساقط من السماء. نتيجة لذلك، يستعمل العلماء الأشكال التوالدية لإنشاء نماذج لمثل تلك الأشياء.

$$i^{35} - i^{24} + i^{18} \quad \boxed{88}$$

$$\frac{4+2i}{6+i} \quad \boxed{91}$$

$$\frac{6}{\sqrt{2}-i} \quad \boxed{94}$$

$$i^{52} - i^{48} \quad \boxed{87}$$

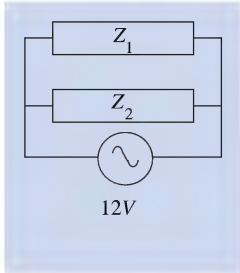
$$\frac{18-3i}{i} \quad \boxed{90}$$

$$\frac{4}{2-3i} \quad \boxed{93}$$

$$3-i^{11} \quad \boxed{86}$$

$$\frac{12+i}{i} \quad \boxed{89}$$

$$\frac{1+i}{-2+4i} \quad \boxed{92}$$



خطوات متعددة يواجه التيار الكهربائي عند مروره في جسم معين مقاومة تُقاس بالأوم. وجد المهندسون الكهربائيون أن من المناسب التعبير عن هذه المقاومة Z باستعمال الأعداد المركبة. يعتبر علماء الفيزياء أن المقاومة الكلية لشبكة كهربائية مكونة من مسارين متوازيين مقاومتها Z_1 و Z_2 تعادل مقاومة مسار كهربائي واحد مقاومتها $Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

95 جد المقاومة الكلية لشبكة كهربائية من مسارين متوازيين مقاومة أولهما $Z_1 = 3+2i$ ومقاومة الثاني $Z_2 = 1-2i$.

96 جد المقاومة الكلية لشبكة كهربائية من مسارين متوازيين مقاومة أولهما $Z_1 = 2+2i$ ومقاومة الثاني $Z_2 = 4-i$.

اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائماً أو خطأ دائماً. إذا كانت المقولة صحيحة أحياناً، أعط مثلاً على حالة تكون فيها صحيحة، وأخر على حالة تكون فيها خطأ. إن كانت المقولة خطأ دائماً، أعط مثلاً يدعم جوابك.

97 مجموع أي عدد مركب $a+bi$ ومرافقه، هو عدد حقيقي.

98 الفرق بين عدد مركب $a+bi$ ($b \neq 0$) ومرافقه، هو عدد حقيقي.

99 ناتج ضرب عدد مركب $a+bi$ ($b \neq 0$) في مرافقه، هو عدد حقيقي موجب.

100 ناتج ضرب عدد تخيلي bi ($b \neq 0$) في آخر di ($d \neq 0$)، هو عدد حقيقي موجب.

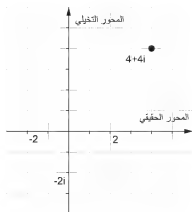
101 **خطأ في التحليل** في ما يلي محاولتان لكتابة العدد المركب $\frac{3}{2+i}$ على أبسط صورة. أي المحاولتين خطأ؟ بيّن الخطأ.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+i} &= \frac{3}{2+i} \times \frac{(2-i)}{(2-i)} \\ &= \frac{6-3i}{4-i^2} \\ &= \frac{6-3i}{5} \end{aligned} \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+i} &= \frac{3}{2+i} \times \frac{(2+i)}{(2+i)} \\ &= \frac{6+3i}{4+i^2} \\ &= \frac{6+3i}{3} = 2+i \end{aligned} \quad \text{أ}$$

102 **تفكير ناقذ** لماذا يتساوى مُطلق عدد مركب مع مُطلق مرافقه؟ استعمل التمثيل البياني لتعليل الجواب.

103 **اكتب** ناقش العلاقة بين فرق المربعين $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ وناتج ضرب عدد مركب في مرافقه.

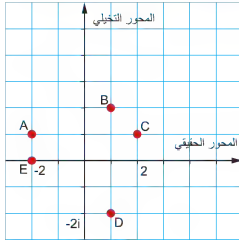


104 تعلّم كيف تجمع بيانياً عددين مركبين.

أ جد ثلاثة أزواج من عددين مركبين مجموع كل منها $4+4i$.

ب بيّن عملية الجمع لكل منها في المستوي المركب نفسه.

ج صِف ما حصلت عليه.



استعمل الرسم البياني المقابل لحل التمرينين 105 و 106 .

105 أي نقطة في الشكل تُمثِّل العدد المركَّب $1-2i$ ؟

أ) النقطة A (ب) النقطة B (ج) النقطة C (د) النقطة D

106 ما العدد المركَّب الذي تُمثِّله النقطة E ؟

أ) -2 (ب) 2 (ج) $-2i$ (د) $2i$

107 أي من الأعداد المركَّبة التالية هو الصورة الأبسط للمقدار $(2-5i)-(2+5i)$ ؟

أ) $10i$ (ب) $4+10i$ (ج) $-10i$ (د) $4-10i$

108 أي من الأعداد المركَّبة التالية هو الصورة الأبسط للمقدار $(-5+3i)^2$ ؟

أ) $16-15i$ (ب) $16-30i$ (ج) $34-15i$ (د) $34-30i$

تحدّ وتوسّع

109 استعمل ما تعرفه عن قوى الوحدة التخيلية i لكي تحل هذا التمرين.

أ) أكمل الجدول أدناه واستخلص نمطاً.

$i^{-5} =$	$i^{-4} =$	$i^{-3} =$	$i^{-2} =$	$i^{-1} =$	$i^0 =$	$i^1 =$
------------	------------	------------	------------	------------	---------	---------

ب) أوضح النمط الذي توصلت إليه والذي يتعلق بالقوى ذات الأسّ السالب للوحدة

التخيلية i . ما القيم التي يُمكن لهذه القوى أن تتَّخذها ؟

ج) اكتب i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} على أبسط صورة.

جد الصورة العامة لنتيجة كل من العمليتين التاليتين على الأعداد المركَّبة:

$$\frac{a+bi}{c+di} \quad 111$$

$$(a+bi)(c+di) \quad 110$$

مراجعة لولبية

112 **نقود** يُبيِّن الجدول أدناه ما يُتفق دلسوز على فطوره أسبوعياً على مدى 8 أسابيع. مثِّل بيانياً

هذه المعطيات. ارسم المستقيم الأقرب إلى هذه النقاط واكتب معادلته. (الدرس)

عدد الوجبات	5	7	3	5	6	2	4	5
الكلفة (بالآلاف الدنانير)	10	13	8	9	8	5	10	11

حلّ المتباينة جبرياً. (الصفوف السابقة)

$$10 < x^2 - 4x - 11 \quad 114$$

$$3x^2 - 6x \leq 0 \quad 113$$

$$3 - x^2 < 7 - 5x \quad 116$$

$$-6 \geq 2x^2 + 7x - 21 \quad 115$$

حدد إن كان بالإمكان أن يمثِّل الجدول دائرة تربيعية. أوضح ذلك.

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

118

x	-2	-1	0	1
y	5	-1	-3	-1

117

الفصل

3

دليل الدراسة: مراجعة

- أ نظم معطيات كل جدول في مصفوفة.
 ب استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد مدخول كل يوم.
 ج جد مدخول كل يوم من بيع بطاقات الكبار وبيع بطاقات الصغار.

استعمل المصفوفات لكي تجد صورة الرباعي $A(-2, -1)$ $B(-1, 3)$ $C(2, 4)$ $D(0, 0)$ بكل من التحويلات التالية.

- 16 سحب وحدتين إلى اليمين، ووحدة واحدة إلى أعلى.
 17 تكبير الرباعي بعامل 1.5.
 18 باستعمال المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ما نوع التحويل؟
 19 باستعمال المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ما نوع التحويل؟
 20 استعمل المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لتحويل المثلث ABC حيث $A(-1, -2)$ و $B(0, 1)$ و $C(3, -2)$. ارسـم المثلث وصـورته بالتحويل. صـف التحويل.

جد محدّد المصفوفة.

- 21 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 22 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$
 23 $\begin{bmatrix} -0.5 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ 24 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
 25 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ 26 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & -13 & 8 \end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام خطي.

- 27 $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$ 28 $\begin{cases} 2x+5y+21=0 \\ 7y+47=6x \end{cases}$
 29 $\begin{cases} 4.5x+3y=10.5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ 30 $\begin{cases} 5x-6y=7+7z \\ 6x-4y+10z=-34 \\ 2x+4y=29+3z \end{cases}$
 31 $\begin{cases} x-y+z=5 \\ y-x-z=2 \\ x-y+z=7 \end{cases}$ 32 $\begin{cases} y-2.4x=0.8 \\ 3x+0.5z=2.25 \\ 3.5y+z=8.5 \end{cases}$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

جد المقدار إن كان ذلك ممكناً.

1 $P-2Q$ 2 $0.2Q$ 3 $\frac{1}{2}R - \frac{1}{3}P$ 4 $\frac{1}{2}(2P+R)$

استعمل المعطيات التالية لحل التمارين من 5 إلى 7.

في حملة لتنظيف الشاطئ، جمع فريق الصف الحادي عشر 125 علبة مرطبات و 45 عبوة. وجمع فريق الصف العاشر 95 علبة مرطبات و 65 عبوة.

- 5 استعمل مصفوفة A لعرض المعطيات أعلاه.
 6 اكتب مصفوفة D تُبيّن الفرق بين ما جمعه الفريقان.
 7 جمع كل فريق في اليوم التالي ضعف ما جمعه من كل نوع في اليوم الأول. اكتب مصفوفة تُبيّن ذلك.

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين 8-14

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

جد المقدار إن كان مُعرّفاً.

8 AB 9 CA 10 AC 11 BC 12 A^2 13 C^2 14 $(BA)^2$

15 يُبيّن الجدولان أسعار البطاقات بالدينار، وما بيع منها في 3 أيام.

أسعار البطاقات

أولاد	كبار	
2 500	5 000	الثلاثاء
4 250	7 500	الأربعاء
5 750	9 000	الخميس

البطاقات المباعة

الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	
245	196	67	كبار
154	75	104	أولاد

حلّ المعادلة.

45 $x^2 = -81$

46 $6x^2 + 150 = 0$

47 $x^2 + 6x + 10 = 0$

48 $x^2 + 12x + 45 = 0$

49 $x^2 - 14x + 75 = 0$

50 $x^2 - 22x + 133 = 0$

جد مرافق العدد المركّب.

51 $5i - 4$

52 $3 + i\sqrt{5}$

احسب المُطلق.

53 $|-3i|$

54 $|4 - 2i|$

55 $|12 - 16i|$

56 $|7i|$

اكتب المقدار على صورة $a + bi$.

57 $(1 + 5i) + (6 - i)$

58 $(9 + 4i) - (3 + 2i)$

59 $(5 - i) - (11 - i)$

60 $-5i(3 - 4i)$

61 $(5 - 2i)(6 + 8i)$

62 $(3 + 2i)(3 - 2i)$

63 $(4 + i)(1 - 5i)$

64 $(-7 + 4i)(3 + 9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

33 $y = x + 1$ و $2x + 3y = 8$ المستقيمين

اكتب مصفوفة المعاملات واحسب محدّدها.

ب حلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر.

جد مقلوب المصفوفة.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

اكتب النظام الخطّي باستعمال المصفوفات، ثم حلّه.

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x = 20 + y \\ x + 6y = 80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x = 1 + y \\ x + y = 9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 3x + 3y - z = 19 \\ 5x + 4y - 3z = 28 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases}$

44 يقدم أحد محالّ بيع التذكارات هدايا لزيائنه. يقدم

هدية صغيرة قيمتها 5000 دينار للزبون إذا تراوحت

قيمة مشترياته بين 25 000 دينار و 74 999 ديناراً،

وهدية متوسطة قيمتها 8 000 دينار إذا تراوحت

قيمة مشترياته بين 75 000 دينار و 149 999

ديناراً، وهدية كبيرة قيمتها 12 500 دينار إذا لم

تقل قيمة مشترياته عن 150 000 دينار. قدّم المحل

102 من الهدايا، بلغت قيمتها 654 000 دينار، وكان

عدد الهدايا الصغيرة 6 أضعاف عدد الهدايا

الكبيرة.

أ اكتب نظام معادلات يُعبّر عن المسألة.

ب استعمل قاعدة كرامر لحل النظام وتحديد عدد

الهدايا من كل نوع.

الفصل 3

اختبار الفصل

حلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر.

$$\begin{cases} x+3z=3+2y & 19 \\ 3x+22=y+3z & \\ 2x+y+5z=8 & \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=1 & 18 \\ 3x-y=10 & \end{cases}$$

جد مقلوب المصفوفة إن كان ذلك ممكناً.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad 21 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0.7 \\ 4 & 1.4 \end{bmatrix} \quad 20$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad 23 \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad 22$$

24 ثمن 2.5 kg من التين، و 1.5 kg من التمر 14 420 ديناراً. و ثمن 3.5 kg من التين و 1 kg من التمر 16 910 دنائير. استعمل المصفوفات لإيجاد ثمن 1 kg من كل نوع.

اكتب النظام الخطّي على الصورة المصفوفية، ثم حُلّه إن كان ذلك ممكناً.

$$\begin{cases} 5x-2y=3 & 26 \\ 2.5x-y=1.5 & \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+y=2 & 25 \\ 3x-2y+1=0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-z=3+y & 28 \\ x+2=y+5 & \\ 4z+x+y=1 & \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=3.5 & 27 \\ 3x=2.7+y & \end{cases}$$

اكتب المقدار على صورة $a+bi$.

$$(6-2i)(2-2i) \quad 30 \quad (1-2i)-(5+2i) \quad 29$$

$$\frac{1-8i}{4i} \quad 32 \quad -2i^{18} \quad 31$$

حلّ المعادلة.

$$x^2+12x=-40 \quad 34 \quad x^2+25=0 \quad 33$$

$$2x^2-x+5=0 \quad 36 \quad (x-1)^2+7=0 \quad 35$$

جد مرافق العدد المركّب.

$$-2+i\sqrt{2} \quad 39 \quad 6-7i \quad 38 \quad 5+3i \quad 37$$

استعمل معطيات الجدول لحل التمارين من 1 إلى 4.

الجوائز				
مجموع النقاط	المركز الثالث	المركز الثاني	المركز الأول	
41	2	1	5	ميان
42	1	5	3	شاهناز
29	4	1	3	شيرين

1 استعمل مصفوفة A تعرض معطيات الجدول.

2 ما رتبة هذه المصفوفة.

3 ما قيمة العنصر a_{31} ؟

4 ما عنوان العنصر الذي قيمته 52 ؟

استعمل المصفوفات في التمارين من 5 إلى 10. احسب الناتج إن كان ذلك ممكناً.

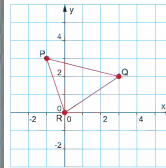
$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, J = [1 \ -5 \ 6], H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$FE \quad 7 \quad EF \quad 6 \quad E+F \quad 5$$

$$FK \quad 10 \quad G^3 \quad 9 \quad H^2 \quad 8$$

استعمل مصفوفة لتحويل المثلث PQR بالتحويل المحدّد.



11 سحب وحدتين إلى أعلى ووحدة واحدة إلى اليمين.

12 تكبير بنسبة $\frac{3}{2}$.

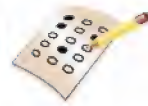
13 تحويل بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. صِف الصورة.

جد محدّد المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad 15 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad 14$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad 17 \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad 16$$

اختبار تراكمي



الفصل

3

4 في 27 آذار 2004، بلغت الطائرة الخارقة السرعة $X-43A$ ، التي طورتها وكالة الفضاء الأمريكية نازا، سرعة ماك 7 أي سبعة أضعاف سرعة الصوت، مما يعني أن هذه الطائرة تقطع 16 ميلاً كل 12 ثانية. أي من الدوال أدناه تمثل ما تقطعه هذه الطائرة بدلالة الزمن عندما تطير بسرعة ماك 7؟

(أ) $f(s) = 16x + 12s$ (ب) $f(s) = \frac{3}{4}s$
(ج) $f(s) = 16s$ (د) $f(s) = 1\frac{1}{3}s$

5 اشترك دلشاد في مؤتمر، وشارك في عدة ورش عمل خلال المؤتمر. قام دلشاد بتقويم ورش العمل التي شارك فيها بإعطاء كل منها تقويماً من 1 إلى 10. يُبين الجدول أدناه، مدة كل ورشة عمل وتقويم دلشاد لها.

32	120	48	93	53	عدد الدقائق
8	9	5	4	7	التقويم

ما معامل ارتباط العلاقة بين مدة ورشة العمل وتقويم دلشاد لها، مقرباً إلى أقرب جزء من مئة؟

(أ) 0.01 (ب) 0.12
(ج) 0.88 (د) 0.13

6 $M = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. أي مما يلي المصفوفة $2MN$ ؟

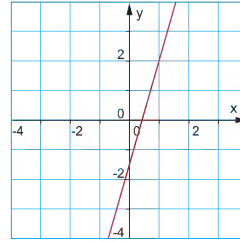
(أ) $\begin{bmatrix} -24 & 184 & 0 \\ -12 & 124 & 192 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -12 & 92 & 0 \\ -6 & 62 & 96 \end{bmatrix}$
(ج) $\begin{bmatrix} -24 & -12 \\ 184 & 124 \\ 0 & 192 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ 92 & 62 \\ 0 & 96 \end{bmatrix}$

7 إلى أي مستوي تعود التقاطعات التالية مع محاور الإحداثيات $(0, 0, 5)$ ، $(0, 40, 0)$ ، $(20, 0, 0)$ ؟
(أ) $20x + 40y + 5z = 0$ (ب) $20x + 40y + 5z = 1$
(ج) $4x + 8y + z = 5$ (د) $2x + y + 8z = 40$

1 عمر هلز يقل سنتين عن 4 أضعاف عمر هيرش وعمر سردار يزيد 6 سنوات على نصف عمر هلز. ارمز بـ x إلى عمر هيرش وبـ y إلى عمر هلز. أي مقدار يمثل عمر سردار؟

(أ) $\frac{1}{2}x + 6$ (ب) $2x + 5$
(ج) $4x + \frac{1}{2}y + 4$ (د) $\frac{1}{2}(4x + 2) - 6$

2 يُبين الرسم البياني مستقيماً يشكل خط الحدود لمنطقة الحل العائدة إلى متباينة خطية. لا ينتمي الزوجان المرتبان $(21, 83)$ و $(16, 62)$ إلى مجموعة الحل، أي مما يلي صحيح؟



(أ) يجب أن يكون خط الحدود منقطعاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة فوق الخط.
(ب) يجب أن يكون خط الحدود متصلاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة فوق الخط.
(ج) يجب أن يكون خط الحدود منقطعاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة تحت الخط.
(د) يجب أن يكون خط الحدود متصلاً، ويجب تظليل المنطقة الواقعة تحت الخط.

3 أي مقدار مصفوفي يساوي $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$ (ب) $2 \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$
(ج) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -6 & 17 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

14 يُبيّن الجدول أدناه أجور رُكّن السيارات في موقف المطار، وفقاً لمدة الرُكّن. ما ميل الدالة الخطية التي تمثّل أجرة الرُكّن بالدنانير، بدلالة مدة الركن بالساعات؟

المدة	1	3	5	7
الأجرة	3350	5050	6750	8450

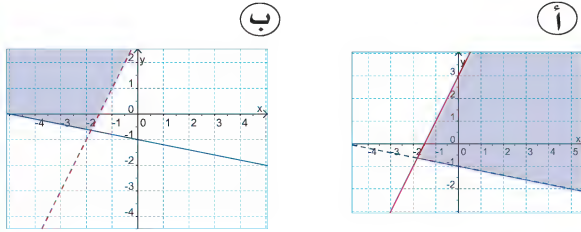
15 أي قيمة للمتغير c تجعل النظام الخطي

$$\begin{cases} 2y - x + 10 = 0 \\ 3x - 6y - c = 16 \end{cases}$$

غير محدّد؟

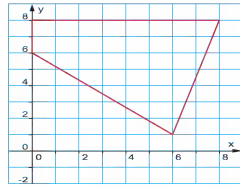
جواب مباشر

16 اكتب نظام متباينات يُمثّل الشكل حلّه البياني.



17 أوضّح التباين بين النظامين في التمرين السابق.

18 يُبيّن الرسم البياني أدناه منطقة الجدوى لمسألة برمجة خطية.



أ اكتب شروط هذه المسألة.

ب جد القيمة الكبرى لدالة

المنفعة $P = 3x - 4y$ في هذه المسألة.

جواب مفصّل

19 استعمل المعادلة الخطية $2x - 3y = -15$.

أ وضح كيف تكتب هذه المعادلة على صورة

الميل - التقاطع.

ب ما السبب الذي يجعل صورة الميل - التقاطع

أفضل صورة لكتابة مثل هذه المعادلة، قبل رسم

المستقيم الذي تمثّله؟

ج اكتب خطوات رسم المستقيم الذي

تمثّله هذه المعادلة خطوة خطوة.

8 أي مما يلي يساوي المقدار $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

أ $-20 + 10i$ ب $15 - 8i$

ج $15 - 40i$ د $20 - 10i$

9 أي مما يلي مقلوب المصفوفة $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

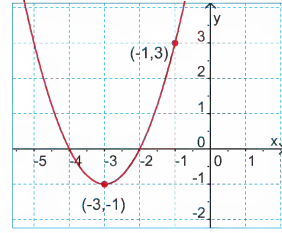
أ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

10 أي مما يلي معادلة الدالة صاحبة البيان؟

أ $y = (x-3)^2 - 1$ ب $y = (x+3)^2 - 1$

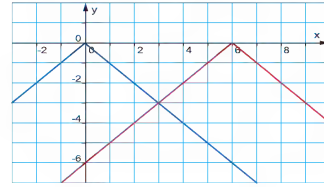
ج $y = (x-1)^2 - 3$ د $y = (x+1)^2 - 3$



جواب مختصر

11 تفحص بيان الدالتين $f(x) = -|x|$ و $g(x) = f(x-h)$

ما قيمة h ؟



12 استعمل مصفوفة لتحويل المثلث ABC حيث $A(-1, 0)$

و $B(4, 3)$ و $C(2, -1)$.

أ صورة $A'B'C'$ سحب المثلث ABC وحدة واحدة

إلى اليمين، و4 وحدات إلى أعلى. أعط

إحداثيات رؤوس $A'B'C'$.

ب صورة $A''B''C''$ صورة $A'B'C'$ بانعكاس حول المحور

الثاني. أعط إحداثيات رؤوس $A''B''C''$.

13 جد محدّد المصفوفة $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ 0.4 & 10 \end{bmatrix}$.

الفصل

4

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

الفصل الرابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية

1-4 الدوال الأسية والنمو والتراجع

تكنولوجيا استكشاف الدالة العكسية

2-4 الدالة العكسية

3-4 الدوال اللوغاريتمية

اختبار جزئي

4-4 خصائص اللوغاريتم

5-4 اللوغاريتم الطبيعي

6-4 المعادلات والمتباينات الأسية

واللوغاريتمية

7-4 النماذج الأسية واللوغاريتمية

جد "e" في القوس

يُعتبر قوس البوابة في مدينة سانت لويس الأمريكية أعلى المعالم الأمريكية. لهذا القوس شكل منحن شبيه بالقطع المكافئ. سوف تدرس هذه المنحنيات في مشروع الفصل.

هل أنت مستعد؟

المُفردات

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | | | |
|---|---------|----|--|
| 1 | الثابت | أ | رمز يُستعمل لتمثيل عدد قد يتخذ قيماً مختلفة. |
| 2 | الدالة | ب | مجموعة الأعداد المستعملة في العد ومعكوساتها. |
| 3 | العلاقة | ج | علاقة تربط كل قيمة للمتغير الحر بقيمة وحيدة من قيم المتغير التابع. |
| 4 | المتغير | د | حد لا يتضمن متغيرات. |
| | | هـ | مجموعة أزواج مرتبة. |

خصائص القوى

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | | | | | |
|---|-----------------------|----|---------------------------------|----|-------------------|----|-------------------------------|
| 5 | $x^2(x^3)(x)$ | 6 | $3y^{-1}(5x^2y^2)$ | 7 | $\frac{a^8}{a^2}$ | 8 | $y^{15} \div y^{10}$ |
| 9 | $\frac{x^2y^5}{xy^6}$ | 10 | $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$ | 11 | $(3x)^2(4x^3)$ | 12 | $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$ |

الفائدة البسيطة

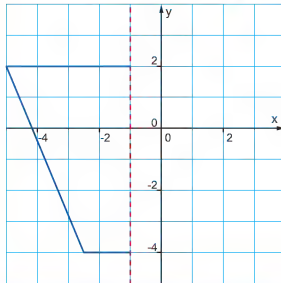
استعمل قانون الفائدة البسيطة $I = Prt$ ، حيث يرمز I إلى الفائدة، ويرمز P إلى المبلغ الأصلي، بينما يرمز r إلى نسبة الفائدة السنوية، و t إلى المدة بالسنوات.

- | | |
|----|--|
| 13 | جد فائدة مبلغ 30 مليون دينار، تم توظيفه لستين بفائدة سنوية نسبتها 3%. |
| 14 | جد نسبة الفائدة السنوية على مبلغ مليوني دينار، تم توظيفه لمدة سنتين وأثمر فائدة قدرها 90 000 دينار. |
| 15 | اقترض كاروان مبلغاً من المال لمدة 3 سنوات بفائدة بسيطة نسبتها 6%. ما قيمة هذا القرض، علماً بأن كاروان سدد الرصيد كله، 5310 ملايين دينار؟ |

حل معادلة بالنسبة إلى متغير

احسب قيمة المتغير x بدلالة المتغيرات الأخرى.

- | | | | | | | | |
|----|--------------|----|---------------|----|------------------------|----|----------------------------------|
| 16 | $3x - y = 4$ | 17 | $y = -7x + 3$ | 18 | $\frac{x}{2} = 3y - 4$ | 19 | $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ |
|----|--------------|----|---------------|----|------------------------|----|----------------------------------|



تناظر

- | | |
|----|--|
| 20 | انسخ الشكل المقابل، ثم أكمله باستعمال محور التناظر الأحمر. |
|----|--|

الصورة العلمية

اكتب على الصورة العلمية.

- | | | | | | |
|----|---------------|----|--------------|----|-------|
| 21 | 7 000 000 000 | 22 | 0.0000000093 | 23 | 16.75 |
|----|---------------|----|--------------|----|-------|

دليل الدراسة: نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Asymptote	المقارب
Base	الأساس
Common logarithm	اللوغاريتم العادي
Exponential equation	المعادلة الأسية
Inverse function	الدالة العكسية
Logarithmic equation	المعادلة اللوغاريتمية
Logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية
Natural logarithm	اللوغاريتم الطبيعي

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل،
تابع الخطوات التالية:

1. يُمكنك أن تفكر في الأساس على أنه مرافق للأس. أي عدد هو الأساس في 10^3 ؟
2. اللوغاريتم العادي هو أس في قوة للعدد 10. كيف تتصور ما ستكون عليه قيمة اللوغاريتم العادي للعدد 1000 ؟
3. أين تتوقع أن تجد المجهول x في معادلة أسية ؟
4. القسمة هي العملية العكسية للضرب. كيف تتوقع أن يكون تأثير الدالة العكسية لدالة معطاة، على تلك الدالة ؟
5. أساس اللوغاريتم الطبيعي هو العدد e . أي قيمة ثابتة أخرى ترمز إليها بحرف ؟
6. كلمة Asymptote كلمة يونانية تعني عدم الالتقاء. كيف تنظر إلى العلاقة بين منحني ومستقيم مقارب له ؟

في الماضي

درست سابقاً

- استعمال خصائص القوى لكتابة مقدار على أبسط صورة.
- إجراء العمليات المتعكسة.
- حل مسائل تتضمن دوال خطية وتربيعية وحدودية.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- الدوال الأسية.
- اللوغاريتمات والدالة العكسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- حل مسائل تتضمن دوال أسية أو لوغاريتمية.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- لحل مسائل تتضمن الفائدة المركبة.
- في الميادين العلمية، مثل الأحياء وعلم الاجتماع، حيث يتم جمع المعطيات وتنظيمها وتحليلها.
- في الصفوف الأعلى التي تتناول الإحصاء ورياضيات الأعمال.

الرياضيات

قراءة

وكتابة



استراتيجية الكتابة: استعمل أسلوبك

عندما تدرس مفهوماً صعباً من مفاهيم الرياضيات، أعد كتابة المفهوم بأسلوبك، مما يساعدك على إدراك ما تدرسه بشكل أفضل. وربما كان مفيداً أن تقدم مثالك الخاص لتوضيح المفهوم.

تتحدّد **درجة الحدودية** باستعمال الحد ذي الدرجة العليا. تكون حدودية بمتغيّر واحد مكتوبة على الصورة العامة عندما تكون حدودها مكتوبة بالترتيب التنازلي لدرجاتها. وهكذا، عندما تكون الحدودية مكتوبة على الصورة العامة، فإنّ درجة الحد الأول هي درجة الحدودية، ومعامل الحد الأول هو المعامل الرئيس للحدودية.

الحدوديات

1. درجة الحدودية درجة حدّها ذي الدرجة الأعلى.
 2. الصورة العامة: الحدود مكتوبة بالترتيب التنازلي لدرجاتها.
 3. في الصورة العامة، درجة الحد الأول هي درجة الحدودية.
 4. معامل الحد الأول هو المعامل الرئيس.
- مثال:
الصورة العامة $2x^4 - 5x^3 + 3x - 9x + 10$
درجة الحدودية: 4
المعامل الرئيس: 2

اكتب الفقرة السابقة باستعمال جمل قصيرة لتوضيح المفاهيم المهمة التي تتناول الحدوديات

ضمّن اشرح مثلاً يربط بين النص والرياضيات.

حاول

اقرأ الفقرة التالية وأعد كتابتها بأسلوبك.

تنص مبرهنة الجذر غير النسبي على أن الجذور غير النسبية لمعادلة معاملاتها أعداد نسبية، تكون مترافقة. فإذا عرفت، مثلاً، أن $1 + \sqrt{2}$ جذر من جذور المعادلة $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ تقول إن $1 - \sqrt{2}$ هو أيضاً جذر من جذورها.

تذكّر أن الأعداد الحقيقية نوعان: الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية. تستطيع استعمال مبرهنة الجذر النسبي ومبرهنة الجذر غير النسبي معاً، لإيجاد جميع جذور المعادلة $P(x) = 0$.



الدوال الأسية والنمو والتراجع

Exponential Functions, Growth and Decay

1-4

من يستعمل هذا الأمر؟

يستطيع الذين يقتنون الأشياء النادرة أن يستعملوا الدوال الأسية لإنشاء نموذج يمثل قيمة الأشياء التي يقتنونها، كالألات الموسيقية النادرة. (مثال 2)

الأهداف

يكتب مقادير أسية لتمثيل حالات النمو والتراجع، ويحسب قيم هذه المقادير.

المفردات

Vocabulary

الدالة الأسية

Exponential function

الأساس

Base

المقارب

Asymptote

النمو الأسّي

Exponential growth

التراجع الأسّي

Exponential decay

ينص قانون مور Moore، المستعمل في صناعة الحواسيب، على أن عدد الترانزستورات التي تتضمنها مكُونات الحاسوب، يتضاعف كل سنة. يُبين الجدول أدناه أعدادًا تقريبية حول تزايد عدد الترانزستورات التي يتضمنها مكُون منذ بدايات هذه الصناعة.

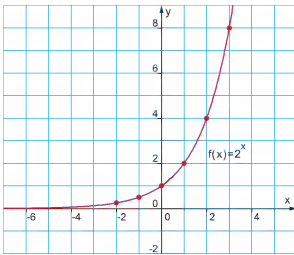
عدد الترانزستورات في مكُون						
السنة	1965	1966	1967	1968	1969	1970
العدد	60	120	240	480	960	1920

$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

يُمكن تمثيل النمو الذي يتضاعف كل سنة باستعمال دالة تتضمن المتغير في الأس. تُعرف مثل هذه الدوال بالدوال الأسية **Exponential functions**. الدالة الأم للدوال الأسية هي الدالة $f(x)=b^x$ حيث الأساس **Base** b عدد ثابت، والأس x المتغير الحر.

الأساس الأس

$$f(x)=b^x \text{ و } b>0, b\neq 1$$



يُبين الرسم المقابل بيان الدالة الأسية الأم $f(x)=2^x$. مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة، في حين أن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{y/y>0\}$.

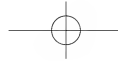
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

تذكّر

في العلاقة $y=b^x$ ، y متغير تابع للمتغير x ، لأن قيمة y تتحدّد بقيمة x .

لاحظ أن بيان الدالة يقترب أكثر فأكثر من المحور الأول كلما تناقصت قيم x . لاحظ أيضاً أن البيان لا يلمس المحور الأول ويبقى فوقه، لأن قيمة المقدار 2^x تبقى موجبة أيّاً تكن قيمة x . المحور الأول هو مقارب أفقي لبيان الدالة $f(x)=2^x$. **المقارب Asymptote** مستقيم يقترب منه بيان الدالة أكثر فأكثر كلما أصبحت قيم x كبيرة جداً أو صغيرة جداً.

كل دالة $f(x)=ab^x$ ، حيث $a>0$ و $b>1$ هي دالة نمو أسّي **Exponential growth** تتزايد قيمتها بتزايد قيمة x . أما إذا كان $0<b<1$ فالدالة $f(x)=ab^x$ هي دالة تراجع أسّي **Exponential decay** تتناقص قيمتها بتزايد قيمة x .



مثال 1

رسم بيانات الدوال الأسية

اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أسّي أو دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

$$f(x)=1.5^x$$

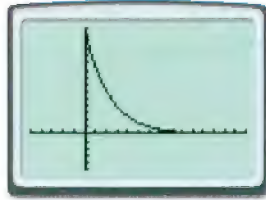
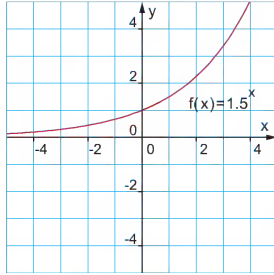
الخطوة 1 جد قيمة الأساس.

$f(x)=1.5^x$ الأساس، 1.5 أكبر من 1، الدالة هي دالة

نمو أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالة باستعمال جدول قيم.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1



$$f(x)=30(0.8)^x$$

الخطوة 1 جد قيمة الأساس.

$f(x)=30(0.8)^x$ الأساس، 0.8 أصغر من 1، الدالة

هي دالة تراجع أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالة باستعمال حاسبة بيانية.

1. اذكر إن كانت الدالة $f(x)=5(1.2)^x$ دالة نمو أسّي أم دالة تراجع أسّي.

ارسم بيانها.



يمكنك تمثيل النمو أو التراجع باستعمال النسبة المئوية الثابتة للنمو أو التراجع، وذلك باستعمال القاعدة التالية.

$$A(t) = a(1 \pm r)^t$$

عدد الفترات الزمنية t (بالأعلى)
المبلغ الأصلي a (باليسار)
المعدل التغيّر r (باليمين)
المبلغ النهائي $A(t)$ (باليسار)

أساس الدالة أعلاه، $1+r$ ، يُسمّى عامل النمو، كما يُسمّى الأساس $1-r$ عامل التراجع.

من طالب إلى طالب

النمو والتراجع

عندما تتناقص قيمة دالة بمعدل ثابت،
مثل 12%، يعني أن أضربها في 100% - 12%،
أي في 88%.
في الصورة العشرية، أضرب في 1 - 0.12،
أي 0.88.

عندما تتزايد قيمة دالة بمعدل ثابت،
مثل 7%، يعني أن أضربها في 100% + 7%،
أي في 107%.
في الصورة العشرية، أترجم ذلك إلى
الضرب في 1 + 0.07، أي 1.07.



تطبيق على الاقتصاد

مثال 2

في العام 2000، اشترى كوفند غيتاراً نادراً يعود إلى العام 1959، دفع ثمنه 12 مليون دينار. قدر الخبراء أن قيمته تزداد بمعدل 14% سنوياً. جد بياناً السنة التي يصبح فيها ثمن الغيتار 60 مليون دينار.

الخطوة 1 اكتب دالة تشكّل نموذجاً لتغير قيمة الغيتار.

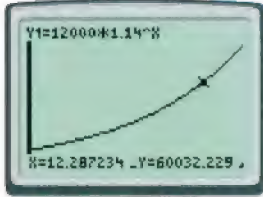
$$f(t) = a(1+r)^t \quad \text{دالة نمو أسّي}$$

$$\text{عوّض عن } a \text{ بقيمته } 12, \text{ وعن } r \text{ بقيمته } 0.14 \quad = 12(1+0.14)^t$$

$$= 12(1.14)^t$$

الخطوة 2 ارسم بيان الدالة.

عندما ترسم بيان دالة أسية باستعمال الحاسبة البيانية، عليك تعديل مواصفات النافذة لكي تظهر النقطة التي ستستعملها.



الخطوة 3 استعمل البيان لتقدير قيمة السنة التي سيصبح فيها ثمن الغيتار 60 مليون دينار.

استعمل وظيفة TRACE لإيجاد قيمة t عندما $f(t) = 60$.

تبلغ قيمة الدالة حوالي 60، عندما $t = 12.29$. ستصل قيمة الغيتار إلى 60 مليون دينار بعد 12.29 سنة من شرائه، أي في العام 2012.

مساعدة

في الحاسبة البيانية، استعمل

x بدل t :

$$y_1 = 12\,000 * 1.14^x$$

2. كان عدد الحيتان المحدبة الأسترالية 350 حوتاً سنة 1981. وتزايد عددها بمعدل 14% سنوياً. اكتب دالة أسية تشكّل نموذجاً لهذا التزايد، ثم ارسم بيان الدالة واستعمله لتحديد السنة التي سيبلغ فيها عدد هذه الحيتان 20 000 حوت.



تطبيق على تراجع الثمن

مثال 3

تتناقص قيمة شاحنة، جديدة ثمنها 28 مليون دينار، بمعدل 9.5% سنوياً. اكتب دالة أسية تشكّل نموذجاً لهذا التناقص. ثم ارسم بيان الدالة واستعمله لتحديد السنة التي سيبلغ فيها ثمن الشاحنة 5 ملايين دينار.

الخطوة 1 اكتب دالة تشكّل نموذجاً لتغير قيمة الشاحنة.

$$f(t) = a(1-r)^t \quad \text{دالة تراجع أسّي}$$

$$\text{عوّض عن } a \text{ بقيمته } 28, \text{ وعن } r \text{ بقيمته } 0.095 \quad = 28(1-0.095)^t$$

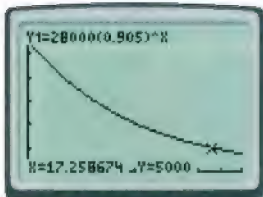
$$= 28(0.905)^t$$

الخطوة 2 ارسم بيان الدالة.

عندما ترسم بيان دالة أسية باستعمال الحاسبة البيانية، عليك تعديل مواصفات النافذة لكي تظهر النقطة التي ستستعملها.

استعمل وظيفة TRACE لإيجاد قيمة t

عندما $f(t) = 5$.



الخطوة 3 استعمل البيان لتجد السنة التي سيصبح ثمن الشاشة 5 ملايين دينار. تبلغ قيمة الدالة حوالي 5 عندما $t=17.3$. سيصبح ثمن الشاشة 5 ملايين دينار بعد 17.3 سنة من شرائها.

3. يتناقص ثمن دراجة نارية ثمنها مليون دينار بمعدل 15% سنوياً. اكتب دالة أسية تشكّل نموذجاً لهذا التناقص، ثم ارسم بيان الدالة واستعمله لتحديد متى يصبح ثمنها 100 ألف دينار.



فكر وناقش

1. استعمل حاسبة لتقارن بين القيمتين 1.01^{500} و 0.99^{500} . فسّر ما توصّلت إليه.
2. ناقش الفروق بين بياني الدالتين $f(x)=1.1^x$ و $g(x)=0.9^x$. ما الذي يحدث لكل منهما عندما $x=0$ ؟
3. صِف الدالة $f(t)=a(1-r)^t$ عندما $0 < r < 1$ و $t > 0$. صِف الدالة عندما $r < 0$ و $t > 0$.
4. كن منظّماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. قارن بين النمو الأسّي والتراجع الأسّي.

تراجع	نمو	$f(x)=ab^x$ حيث $a > 0$
		قيمة b
		الهيئة العامة للبيان
		ما يحدث للدالة عندما يتزايد x
		ما يحدث للدالة عندما يتناقص x



1-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات إذا كان الأساس في دالة أسية عدداً بين 0 و 1، تكون الدالة دالة (نمو أسّي أو تراجع أسّي).

1 انظر المثال اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أسّي أو دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

4 $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

3 $f(x)=0.5(1.2^x)$

2 $f(x)=32(0.5^x)$



5 أحياء يحتوي وعاء لزراعة البكتيريا على 150 بكتيريا من أحد الأنواع التي تتضاعف كل ساعة. قدّر عدد البكتيريا في الوعاء بعد 12 ساعة.

أ اكتب دالة تمثّل تطوّر عدد البكتيريا بدلالة الزمن.

ب ارسم بيان هذه الدالة.

ج استعمل البيان لتقدير عدد البكتيريا بعد 12 ساعة.

انظر المثال 3

6 فيزياء رميت كرة جديدة ناعمة الملمس على أرض صلبة من ارتفاع 120cm، فارتدت نحو الأعلى عدة مرات إلى ارتفاع بلغ في كل مرة $\frac{2}{3}$ الارتفاع الذي سبقه.

أ اكتب دالة تمثل الارتفاع الذي بلغته الكرة في كل مرة.

ب ارسم بيان هذه الدالة.

ج بعد كم مرة يقل ارتفاع الكرة عن 91 cm

تمارين وحل مسائل

اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أسّي أو دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

9 $f(x) = 10(2.7)^x$

8 $f(x) = \frac{1}{3}(1.3)^x$

7 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

10 قطارات بلغت كمية البضائع المنقولة بواسطة القطارات في الولايات المتحدة 580 مليار طن/ميل سنة 1960. وتزايدت هذه الكمية بمعدل 2.32% سنوياً منذ تلك السنة.

أ اكتب دالة تمثل تطوّر كمية البضائع المنقولة بالقطارات سنوياً (1960 = السنة 0).

ب ارسم بيان هذه الدالة.

ج في أي سنة ستزيد كمية البضائع المنقولة بالقطارات في الولايات المتحدة عن ألف مليار طن/ميل؟

11 طب تتناقص كمية الأنسولين المستعمل لتنظيم نسبة السكر في الدم بمعدل 5% تقريباً كل دقيقة.

بلغت الكمية التي يحتاج إليها الجسم حوالي 10 وحدات.

أ اكتب دالة تمثل كمية الأنسولين المتبقية في الدم بدلالة الزمن، بعد حقن الجسم بعشر وحدات.

ب ارسم بيان هذه الدالة.

ج قدر كمية الأنسولين المتبقية في الدم بعد 10 دقائق.

د بعد كم دقيقة تهبط كمية الأنسولين إلى النصف؟

اذكر إن كانت الدالة دالة أسية أم لا.

14 $f(x) = 1(0.5)^x$

13 $f(x) = 0^x$

12 $f(x) = 2(x)^{10}$

في العام 1626، اشترت مجموعة من المهاجرين الألمان جزيرة منهاتن، التي تشكل اليوم جزءاً من مدينة نيويورك، مقابل بضائع قيمتها 24 دولاراً من دولارات ذلك العصر. افترض أن هذا المبلغ قد تم إيداعه حينها بفائدة مركبة نسبتها السنوية 3.5%. كم سيكون هذا المبلغ سنة 2008؟

16 تكنولوجيا بلغت كمية المعلومات المخزونة إلكترونياً سنة 2002 ما يقارب 5×10^{18} بايت.

بايت. قدر الباحثون أن هذه الكمية توازي ضعف ما كان مخزوناً سنة 1999. افترض أن نمو كمية

المعلومات استمر على هذا المنوال. اكتب دالة تمثل نمط كمية المعلومات المخزونة إلكترونياً بدءاً بالعام 1999 ثم ارسم بيان هذه الدالة.

17 حاسوب تتناقص قيمة الحواسيب بمعدل 30% سنوياً. اشترى كاوه حاسوباً متطوراً

ب 2 765 000 دينار. قدر عدد السنوات اللازمة لكي تقل قيمة هذا الحاسوب عن 350 000 دينار.

تمارين حرة

أنظر المثال	حل التمارين
1	9-7
2	10
3	11

نافذة

على تاريخ الرياضيات



ربما يعود اسم Manhattan إلى تركيب كلمتين من كلمات السكان الأصليين في أمريكا: كلمة Manah وتعني جزيرة وكلمة hatin وتعني غابة.

أكمل الجدول أدناه. قَرِّب القيم إلى أقرب جزء من مئة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = 2.2^x$									
$g(x) = 0.4^x$									

18

19

20 تسمح بعض بطاقات الاعتماد لحاملها بأن يصبح المبلغ A الذي يدين به حامل البطاقة بعد n شهراً $A = P(1.015)^n$ ، حيث يرمز P إلى المبلغ المدفوع.

أ ارسم بيان هذه الدالة إذا كان المبلغ الأصلي مليون دينار.

ب كم يصبح المبلغ بعد سنة؟

ج متى يصل المبلغ إلى 1 300 000 دينار؟

21 مبيعات بلغت المبيعات الشهرية لأحد مربّي الدجاج حدّها الأقصى 12 000 دجاجة في كانون الثاني. بينما تراجعت مبيعاته في الشهور التالية بمعدل 20% شهرياً.

أ كم دجاجة باع المربّي في الشهر السادس الذي تلى كانون الثاني؟

ب بعد كم شهر قلّت مبيعات هذا المربّي عن 1000 دجاجة.

22 مصارف تستعمل المصارف قانوناً لحساب القيمة الآنية لمبلغ مودع. هذا القانون هو $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ ، حيث A المبلغ الآني، و P المبلغ الأصلي المودع، و r معدل الفائدة السنوي، و t المدة بالسنوات، و n عدد الفترات في السنة التي يتم فيها تذخير الحساب، أي حساب الفائدة وإضافتها إلى المبلغ المودع. أودع خسرو 5 ملايين دينار بفائدة معدّلها السنوي 5%، بتذخير فصلي (4 مرات في السنة).

أ كم ستكون قيمة المبلغ بعد 5 سنوات؟

ب متى يتجاوز المبلغ المودع العشرة ملايين دينار؟

ج ماذا لو...؟ كم سيربح خسرو بعد 5 سنوات، لو أن تذخير الحساب تم شهرياً وليس فصلياً؟

23 تفكير ناقد ما إحداثيات النقطة المشتركة لبياني الدالتين $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ و $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ ؟

جد المدى الذي يقابل المجال $[0, 10]$ لكل من الدوال التالية:

24 $f(x) = 3^x - 2^x$

25 $f(x) = 100(0.9)^x$

26 $f(x) = \frac{3}{4}(2)^x$

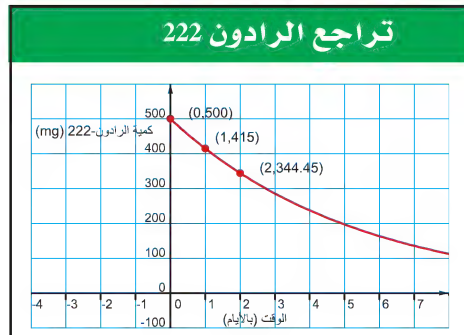
27 علم الأرض الرادون-222 (Radon-222)

غاز يتسرّب من الصخور والتربة. يُمكن لهذا الغاز أن يتراكم في العمارات، وأن يشكل خطراً على من يتنشقّه. يتراجع الرادون - 222 ليصبح بولونيوم (Polonium) أو رصاصاً.

أ جد النسبة المئوية لتراجع الرادون-222 يومياً.

ب اكتب دالة أسية تمثل كمية الرادون-222 المتبقية بعد t يوماً من كمية أصلية قدرها 500mg.

ج كم يبقى من هذه الكمية بعد 14 يوماً؟



28 تقدير قُدِّر عدد سكان الأرض سنة 2000 بـ 6.1 مليار نسمة. كما قُدِّر معدل تزايدهم بـ 1.4% سنوياً. قُدِّر عدد سكان الأرض سنة 2020. اكتب دالة تمثل نمو عدد سكان الأرض بدلالة السنوات بعد العام 2000 (السنة 0)، واستعملها لتقارن تقديرك السابق مع ما تحسبه باستعمال الدالة.

29 تفكير ناقد أي المقدارين x^3 أو 3^x يتزايد أسرع بتزايد قيم x ؟ أوضح ذلك.

30 اكتب صِف حالة يُمكن تمثيلها باستعمال دالة أسية. اكتب الدالة موضعاً ما تمثل كل قيمة فيها.



تحضير للاختبار



31 أي من الدوال التالية دالة تراجع أسية؟

ج $f(x) = 0.5(2)^x$

أ $f(x) = 0.9(1.001)^x$

د $f(x) = \left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

ب $f(x) = 1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$

32 أي مما يلي يمثل قيم b عندما تكون الدالة $f(x) = ab^x$ دالة تراجع أسية؟



33 جواب مختصر ما قيم a و b في الدالة $f(x) = ab^x$ ذات البيان المقابل؟

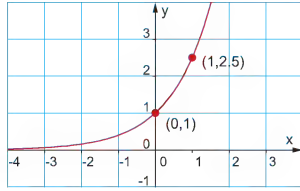
34 كان عدد سكان إحدى المدن 89 443 سنة 1990، وكان المعدل السنوي للزيادة 0.6% منذ تلك السنة. أي من الدوال التالية يمثل عدد سكان هذه المدينة بعد x سنة من 1990؟

ج $f(x) = 89\,443(1.06)^x$

أ $f(x) = 89\,443(1.6)^x$

د $f(x) = 89\,443(1.0006)^x$

ب $f(x) = 89\,443(1.006)^x$



تحدّ وتوسّع

35 تفكير ناقد تذكر أنك صنّفت الدوال الحدودية وفق درجاتها. لماذا لا تتحدث عن درجة دالة أسية؟

حلّ المتباينة بيانياً، مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

38 $5 < 1.5^x < 6$

37 $0.97^x < 0.5$

36 $1.15^x \geq 3$

39 قارن بين بياني الدالتين $y = x^2$ و $y = 2^x$ عندما $-10 < x < 10$. ما عدد نقاط التقاطع؟ جِد إحداثيات هذه النقاط.

40 أحياء وجد الباحثون أن عدد حشرات البعوض في الأكر الواحد من منطقة باردة يبلغ، بعد انصهار الجليد، $10^{\frac{1}{2}d+2}$ ، حيث يمثل d عدد الأيام بعد انصهار الجليد. كم كان عدد حشرات البعوض في الأكر الواحد عند بدء انصهار الجليد؟ كم سيمضي من الوقت بعد انصهار الجليد، حتى يتضاعف عدد البعوض في الأكر الواحد؟ (الأكر وحدة مساحة تساوي $4\,047\text{m}^2$).

41 لماذا يقتصر مجال القيم الممكنة للأساس في الدالة $f(x) = b^x$ على $\{b/b > 0; b \neq 1\}$ ؟



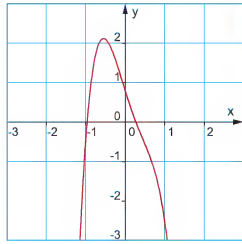
مراجعة لولبية

ارسم بيان الدالة باستعمال الحاسبة البيانية. حدّد مجال الدالة ومداها والتحويل الذي يسمح برسم بيانها، انطلاقاً من بيان الدالة الأم. (الصفوف السابقة)

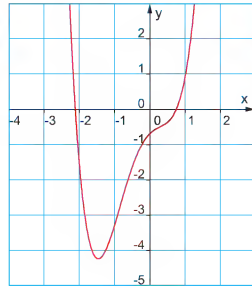
$$f(x)=x-4 \quad 45 \quad f(x)=2x^3 \quad 44 \quad f(x)=-x^2+1 \quad 43 \quad f(x)=\sqrt{x-3} \quad 42$$

46 تسليّة اشترى هفال وأخته شيرين ألعاب فيديو. اشترى هفال 3 ألعاب جديدة ولعبتين قديمتين ودفع 235 000 دينار، بينما اشترت شيرين لعبة جديدة واحدة و 4 ألعاب قديمة ودفعت 195 000 دينار. جدّ ثمن كل لعبة جديدة وكل لعبة قديمة. (الصفوف السابقة)

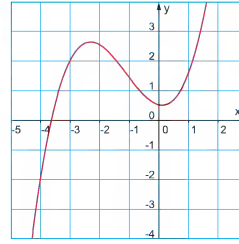
في التمارين 47 – 49، يمثّل كل بيان دالة حدودية. حدّد إن كانت درجة هذه الدالة فردية أو زوجية، وإن كان معاملها الرئيس موجباً أو سالباً. (الصفوف السابقة)



49



48



47

استكشاف الدوال العكسية

Explore Inverses of Functions



يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالة العكسية وعلاقتها بالدالة الخطية $f(x)=x$.

نشاط

سوف ترسم بيان الدالة $f(x)=2^x$ وبيان دالتها العكسية.

1 ارسم بيان الدالة $f(x)=2^x$ والمستقيم $y=x$ باستعمال

الحاسبة البيانية واختيار النافذة العشرية. لكي تُجز

ذلك، أدخل الدالتين ثم اضغط المفتاح **ZOOM**

واختر 4: ZDecimal.

2 استعمل وظيفة **DrawInv** للحصول على بيان العلاقة

العكسية. تُجز ذلك بالضغط على المفتاحين **2nd**

و **PRGM**. ثم اختر 8:DrawInv.

لكي تختار **Y1**، اضغط المفتاح **VARS** وتحرك أفقياً

حتى **Y-VARS** اختر **Function 1:** ثم **1:Y1** واضغط،

في النهاية، المفتاح **ENTER**.

تُبين الشاشة بيان الدالة الأصلية $f(x)=2^x$ وبيان

العلاقة العكسية والمستقيم $y=x$. لاحظ أن العلاقة

العكسية تبدو دالة مجالها $\{x/x>0\}$ ومداها \mathbb{R} .

حاول

ارسم بيان الدالة $f(x)=x^2$ وبيان الدالة $f(x)=x$.

1 قارن بين مجال الدالة $f(x)=x^2$ ومداها من ناحية، ومجال العلاقة العكسية ومداها من ناحية ثانية.

هل العلاقة العكسية للدالة $f(x)=x^2$ دالة؟ برر جوابك.

ارسم بيان الدالة $f(x)=x^3$ وبيان الدالة $f(x)=x$.

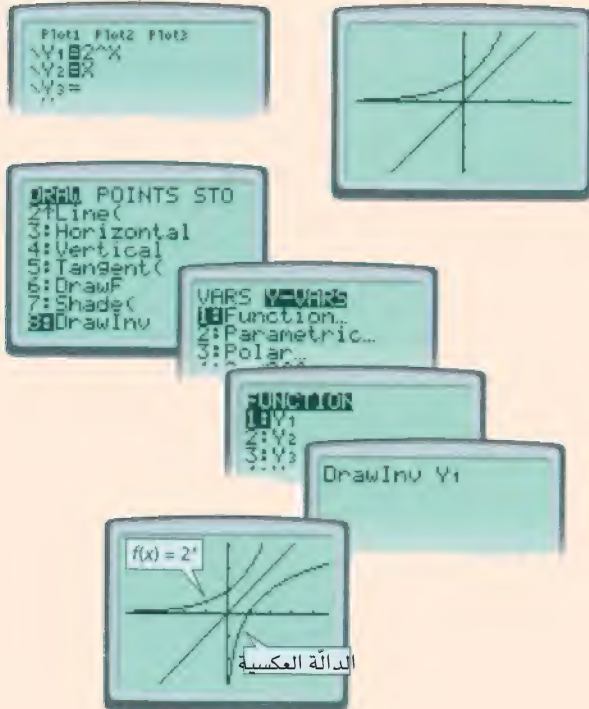
2 قارن بين مجال الدالة $f(x)=x^3$ ومداها من ناحية، ومجال العلاقة العكسية ومداها من ناحية ثانية.

هل العلاقة العكسية للدالة $f(x)=x^3$ دالة؟ برر جوابك.

3 اكتب مقولة اكتب مقولة حول العلاقة بين مجال الدالة ومداها من ناحية، ومجال العلاقة

العكسية ومداها من ناحية ثانية.

4 اكتب مقولة اكتب مقولة حول العلاقة بين بيان الدالة وبيان الدالة العكسية.





الدالة العكسية Inverse function

2-4

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكن استعمال الدالة العكسية لإيجاد ثمن سلعة قبل الحسم. (مثال 5).

الأهداف

يُمثّل بياناً العلاقة العكسية
لعلاقة ويميّزها.
يجد الدالة العكسية لدالة.

المفردات

Vocabulary

العلاقة العكسية
Inverse relation

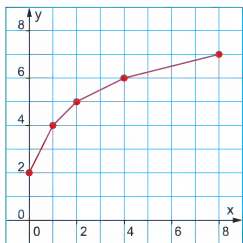
الدالة العكسية
Inverse function

تعلّمت في الصفوف الابتدائية أن الطرح عملية عكسية للجمع، أي إن تطبيق الطرح يُلغي نتائج تطبيق الجمع. مثال على ذلك: إذا جمعت 3 مع عدد a فإنك تُلغي نتيجة هذا الجمع بطرح 3 من ناتج الجمع. والقسمة أيضاً عملية عكسية للضرب. فإذا ضربت عدداً a في 4 ثم قسمت ناتج الضرب على 4، تحصل على العدد a من جديد. يُمكنك تطبيق عملية العكس على العلاقات والدوال. للحصول على التمثيل البياني للعلاقة العكسية **Inverse relation** لعلاقة ما، ارسم صورة بيان العلاقة بانعكاس حول المستقيم $y=x$ ، ذلك يعادل تبادل الأدوار بين الإحداثيين x و y في الزوج المرتب لكل نقطة من بيان العلاقة.

رسم بيان العلاقة العكسية.

مثّل الدالة وصل بين النقاط. ثم مثّل العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7



مثّل الجدول بنقاط، واربط بينها بخط مناسب. بادل بين الإحداثيين x و y في الزوج المرتب لكل نقطة من بيان العلاقة.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

ارسم صورة كل نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y=x$. واربط بين

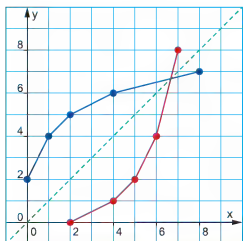
النقاط التي حصلت عليها بخط مناسب.

مجال الدالة: $\{x/0 \leq x \leq 8\}$

مدى الدالة: $\{y/2 \leq y \leq 7\}$

مجال الدالة العكسية: $\{x/2 \leq x \leq 7\}$

مدى الدالة العكسية: $\{y/0 \leq y \leq 8\}$



x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

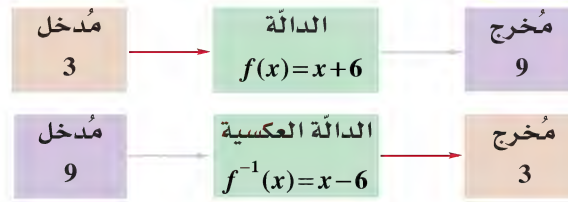
1. مثّل الدالة وصل بين النقاط، ثم مثّل العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.



تذكّر

العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. الدالة هي علاقة ترتبط فيها كل قيمة لـ x بقيمة وحدة لـ y .

عندما تكون العلاقة دالة، ارمز إلى علاقتها العكسية بـ $f^{-1}(x)$. لا تدل هذه الكتابة على مقلوب العدد $f(x)$. تُسمى الدالتان اللتان تُلغِي كل منهما أثر الأخرى **دالتين متعاكستين** **Inverse functions**، وكل منهما دالة عكسية للأخرى.



لإيجاد الدالة العكسية، استعمل العمليات المتعاكسة. بما أن الدالة $f(x)$ تُضيف 6 إلى x فإن الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تطرح 6 من x .

مثال 2 كتابة الدالة العكسية باستعمال العمليات المتعاكسة.

استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x)=2x$.

$$f(x)=2x \quad \text{تضرب الدالة } f(x) \text{ العدد } x \text{ في } 2.$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2} \quad \text{تقسم الدالة العكسية } f^{-1}(x) \text{ العدد } x \text{ على } 2.$$

تحقق استعمل 7 كعدد مُدخل.

$$f(x)=2x$$

$$f(7)=2(7) \\ =14$$

استعمل العدد الناتج كمدخل للدالة العكسية.

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$

$$f^{-1}(14)=\frac{14}{2} \\ =7$$

ألغت الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ أثر الدالة $f(x)$.

2. استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالة العكسية لكل دالة.



$$f(x)=\frac{x}{3} \quad \text{أ}$$

$$f(x)=x+\frac{2}{3} \quad \text{ب}$$

مثال 3 كتابة الدالة العكسية لدالة متعددة الخطوات

استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x)=\frac{x}{4}-5$.

$$f(x)=\frac{x}{4}-5 \quad \text{تقسم الدالة } f(x) \text{ العدد } x \text{ على } 4 \text{ ثم تطرح من الناتج العدد } 5.$$

$$f^{-1}(x)=4(x+5) \quad \text{عليك أن تلغي أثر طرح العدد } 5. \text{ عليك إذن أن تبدأ بإضافة } 5 \text{ إلى } x.$$

قم بعد ذلك بإلغاء أثر القسمة على 4 بضرب الناتج في 4.

تحقق استعمل مُدخلًا.

$$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5 \quad f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40 \checkmark$$

3. استعمل العمليات المتعاكسة لإيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x)=5x-7$.

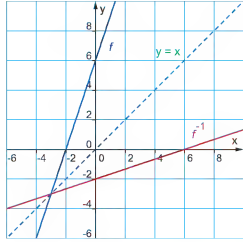


يُمكنك إيجاد الدالة العكسية عن طريق المبادلة بين x و y ، في قاعدة الدالة، ثم حساب y بدلالة x .

كتابة الدالة العكسية ورسم بيانها

مثال 4

ارسم بيان الدالة $f(x)=3x+6$ ، ثم اكتب الدالة العكسية وارسم بيانها.



اكتب $y=f(x)$ وارسم بيان الدالة $f(x)$.
بادل بين x و y .
احسب y بدلالة x .

$$y=3x+6$$

$$x=3y+6$$

$$x-6=3y$$

$$\frac{x-6}{3}=y$$

$$y=\frac{x-6}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$$

$$=\frac{1}{3}x-2$$

اكتب الدالة العكسية على الصورة $y=...$.

اكتب $y=f^{-1}(x)$.

بسّط ثم ارسم بيان الدالة العكسية.

4. ارسم بيان الدالة $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ ، ثم اكتب الدالة العكسية وارسم بيانها.



في كل مرة تريد فيها أن تُلغي عملية، تحرّك عائداً أدراجك انطلاقاً من النتيجة وصولاً إلى المدخل الأصلي. يُمكنك في هذا المجال استعمال الدوال العكسية.

تطبيق تجاري

مثال 5

باع تاجر آلة تصوير بكلفة كلية مقدارها 103 140 ديناراً. يشمل هذا المبلغ ثمن الآلة مضافاً إليه 3000 دينار ثمن ورقة هدية للتغليف قدّمها التاجر، و 8% قيمة الضريبة. لم تعجب الآلة الشاري، فعاد ليردّها. كيف يحسب البائع ما سيرد للشاري.

الخطوة 1 اكتب دالة تمثّل الكلفة بدلالة ثمن الآلة p .

الكلفة كدالة بدلالة ثمن الآلة.

$$c(p)=1.08(p+3000)$$

الخطوة 2 اكتب الدالة العكسية التي تمثّل ثمن الآلة بدلالة الكلفة.

$$c(p)=1.08(p+3000)$$

$$c(p)=1.08p+3240$$

$$c(p)-3240=1.08p$$

$$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$$

الخطوة 3 احسب قيمة الدالة العكسية عندما $c=103\,140$

$$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$$

على التاجر أن يرد للشاري 92 500 دينار.

عوّض

$$c(p)=1.08(92\,500+3000)$$

$$=1.08(95\,500)$$

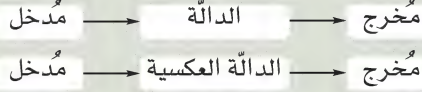
$$=103\,140$$



5. لتحضير الشاي، يُستعمل $\frac{1}{6}$ ملعقة من الشاي لكل كوب من الماء يُضاف إليها ملعقة واحدة للإبريق. استعمال الدالة العكسية لتحديد عدد الأكواب في حال استعمال 7 ملاعق من الشاي.

فكر وناقش

- فسّر نتيجة المبادلة بين x و y لإيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x) = x$. كيف كنت لتتوقع هذه النتيجة باستعمال بيان الدالة $f(x)$ ؟
- أعط مثلاً على دالة علاقتها العكسية دالة ومثلاً على دالة علاقتها العكسية ليست دالة.
- علامة تحصل عندما تجد الدالة العكسية للدالة العكسية لدالة $f(x)$ ؟
- انسخ المخطّط أدناه، ثم أكمله. أعط مثلاً على دالة $f(x)$ ، ومدخل ومخرج والدالة العكسية لـ $f(x)$



التمارين

2-4

تمارين موجّهة

1 مفردات عند المبادلة بين x و y ، تكون النتيجة دوماً ؟ عكسية (علاقة أو دالة).

انظر المثال 1 ارسم بيان الدالة الممثلة بالجدول، ثم ارسم بيان العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

x	3	4	1	-1
y	-1	-2	-4	-4

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

2 استعمل العمليات المتعاكسة لكتابة الدالة العكسية.

$$f(x) = x - 2\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$f(x) = 4x$$

$$f(x) = x + 3$$

$$f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$f(x) = 5x - 1$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{2}$$

$$f(x) = 4(x+1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(3-3x)$$

4 ارسم بيان الدالة، ثم جد دالتها العكسية، وارسم بيانها.

$$f(x) = 10 + 0.6x$$

$$f(x) = \frac{x}{4} + 2$$

$$f(x) = 5 - 2x$$

5 أنظر المثال 5 أحوال جوية تُستعمل الدالة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ لتحويل درجات الحرارة من مقياس فهرنهايت إلى المقياس المئوي. جد الدالة العكسية التي تحوّل درجات الحرارة من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت. حوّل 16° مئوية إلى درجات فهرنهايت.

تمارين وحلّ مسائل

ارسم بيان الدالة الممثلة بالجدول، ثم بيان العلاقة العكسية. حدّد مجال كل من العلاقتين ومداها.

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2

x	-1	2	3	5
y	1	3	5	5

استعمل العمليات المتعكسة لكتابة الدالة العكسية.

$$f(x) = \frac{x}{0.25} \quad 22$$

$$f(x) = x - 1\frac{3}{4} \quad 21$$

$$f(x) = 0.825x \quad 20$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 12 \quad 25$$

$$f(x) = 145 + 12.5x \quad 24$$

$$f(x) = 21 - 32x \quad 23$$

ارسم بيان كل دالة، ثم جد دالتها العكسية وارسم بيانها.

$$f(x) = 1.21x \quad 28$$

$$f(x) = 2 - \frac{x}{3} \quad 27$$

$$f(x) = \frac{4}{5}(x - 15) \quad 26$$

29 تعليم يقدّر نموذج خطّي أن عدد حملة البكالوريوس في إحدى الدول الكبرى يزداد 19 500 شخص سنوياً. كان عدد حملة البكالوريوس 1.28 مليوناً سنة 2001. استعمل الدالة العكسية لتقدّر كم سنة ستمرّ بعد عام 2001 ليصبح عددهم 1.7 مليوناً.

30 تفكير ناقد ارسم المستقيم المار في النقطتين (2,9) و (3,4).

أ ما ميل هذا المستقيم؟

ب ما ميل المستقيم الذي يشكل بيان الدالة العكسية؟

31 فيزياء تبلغ درجة غليان الماء على مستوى سطح البحر 100 درجة مئوية.

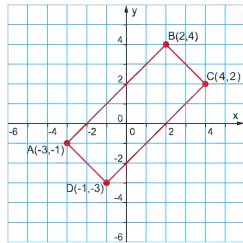
تمثّل الدالة $f(x) = 100 - 3.37x$ درجة غليان الماء على ارتفاع x km عن سطح البحر.

أ اكتب الدالة العكسية.

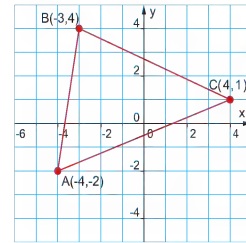
ب على أي ارتفاع تصبح درجة غليان الماء أقل من 90 درجة مئوية؟ قرب الجواب إلى أقرب 10 m.

ج تبلغ درجة غليان الماء على قمة جبل لوتس في النيبال 71.3 درجة مئوية. ما ارتفاع هذه القمة بالأمتار عن سطح البحر؟

هندسة جد إحداثيات رؤوس الشكل الهندسي الذي يمثّل العلاقة العكسية.



33



32

34 تفكير ناقد ما العلاقة العكسية للدالة $f(x) = 3$ ؟ هل هذه العلاقة العكسية دالة؟ أوضح ذلك.

35 اكتب في سباق اجتياز الأنابيب، قطع هلو 10 m خلال 12.59 ثانية. افترض أن هلو قطع المسافة بسرعة ثابتة. اكتب دالة تمثّل المسافة المقطوعة بدلالة الزمن. اكتب الدالة العكسية واستعملها لحساب الزمن الذي يستغرقه قطع مسافة 25 m بالسرعة نفسها.

36 ثمن بطاقة الدخول إلى السيرك العالمي 22 000 دينار. إذا دفعت بواسطة بطاقة اعتماد يتقاضى السيرك مبلغاً إضافياً قدره 3500 دينار، أيّاً يكن عدد البطاقات التي تشتريها.

أ اكتب دالة تمثّل ما تدفعه بواسطة بطاقة الاعتماد بدلالة عدد البطاقات المشتراة n .

ب اكتب الدالة العكسية، واستعملها لكي تجد عدد البطاقات المشتراة بواسطة بطاقة الاعتماد علماً بأن الكلفة كانت 157 500 دينار.

ج هل يمكن أن تكون كلفة شراء عدد من البطاقات بواسطة بطاقة الاعتماد 332 500 دينار؟

تمارين حرة

انظر
المثال

التمارين	الحل
1	19-18
2	22-20
3	25-23
4	28-26
5	29

نافذة

فيزياء



بمقدور متسلقي الجبال، عندما يكونون على ارتفاع شاهق عن سطح البحر، أن يشربوا الشاي وهو يغلي، لأن درجة حرارته ستكون منخفضة بما يسمح بذلك.

37 **خطأ في التحليل** وجد اثنان من الطلاب الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ أيهما خطأ؟ بين الخطأ.

ب	أ
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
$f(x) = 2x - 1$	$f^{-1}(x) = 2(x - 1)$

38 **اكتب** أوضح ما يحدث لدالة وبيانها، عندما تتم المبادلة بين إحداثي كل نقطة.

39 **تفكير ناقد** هل يمكن للعلاقة العكسية لعلاقة ليست بدالة أن تكون دالة؟ أوضح جوابك بمثال.

40 **قبعات** قياس القبعة دالة خطية بدلالة محيط الرأس. فقياس قبعة لرأس محيطه 55 cm هو 17.5 وقياس قبعة لرأس محيطه 57 cm هو 18 .
 أ اكتب قياس القبعة s كدالة خطية بدلالة محيط الرأس c .
 ب جد العلاقة العكسية . هل هي دالة؟ ما تمثل؟
 ج وجدت قبعة قياسها 18.5 . ما محيط رأس صاحبها؟



اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً أو خطأ دائماً.

41 **عكس زوج مرتب** يمثل نقطة على بيان هو الزوج المرتب الذي يمثل صورة النقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

42 الدالة العكسية لدالة خطية هي دالة خطية.

43 الدالة العكسية لدالة خطية ميلها موجب، هي دالة خطية ميلها سالب.

44 الدالة العكسية لدالة خطية ميلها أكبر من 1 هي دالة خطية ميلها أصغر من 1.

45 عكس عكس نقطة هو النقطة نفسها.

46 العلاقة العكسية للدالة $y = k$ ، حيث k عدد ثابت، ليست دالة.

47 **غوص** من يمارس رياضة الغوص يعلم أن ضغط الماء (مقيساً بالكيلو باسكال kPa) يزداد بازدياد العمق (مقيساً بالأمتار) الذي يصل إليه الغواص. المعطيات في الشكل المقابل خاصة بالماء العذب.



أ اكتب الضغط كدالة بدلالة العمق .

ب حدّد مجال هذه الدالة ومداهما بشكل معقول.

ج جد الدالة العكسية للدالة التي وجدتتها في السؤال (أ).

د هل يوجد عمق يتم التعبير عنده عن العمق والضغط بالعدد نفسه؟ أوضح جوابك.

تحضير للاختبار

48 أي مما يلي هو الدالة العكسية للدالة $f(x) = 4x - \frac{3}{4}$ ؟

أ $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}$

ب $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 3$

ج $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 3$

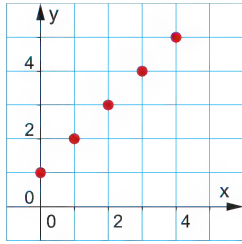
د $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}$

49 سيدفع هيمن لتصليح سيارته 175 000 دينار ثمنًا لقطع غيار، و 35 000 دينار عن كل ساعة استغرقها تصليح السيارة. تشكّل الدالة $f(x) = 175\,000 + 35\,000x$ نموذجًا لحساب كلفة تصليح سيارة هيمن بدلالة عدد الساعات الذي يستغرقه إصلاحها. أي مما يلي يُعبر عما تعنيه الدالة العكسية للدالة السابقة؟

- (أ) عدد الساعات بدلالة الكلفة.
(ب) الكلفة بدلالة عدد الساعات.
(ج) أجر ساعة التصليح بدلالة الكلفة.
(د) الكلفة بدلالة أجر ساعة التصليح.

50 أي نقطة عكسها النقطة $(5, -2)$ ؟

- (أ) $(-5, 2)$ (ب) $(5, 2)$ (ج) $(-2, 5)$ (د) $(2, -5)$



51 **جواب مختصر** أنشئ جدولًا يبيّن العلاقة العكسية للعلاقة التي يُمثلها الرسم البياني المقابل.

تحدّ وتوسّع

جد الدالة العكسية لكل دالة، حيث $y = f(x)$.

54 $y - y_1 = m(x - x_1)$

53 $ax + by = c$

52 $y = mx + b$

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

55 مثّل بيانيًا العلاقة المعرّفة بالجدول المقابل. ثم ارسم صورة كل نقطة بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ لتحصل على التمثيل البياني للعلاقة العكسية. إذا كانت معادلة الدالة الأصلية هي $y = x^2$ ، تحقّق جبريًا من أن معادلة العلاقة العكسية هي $x = y^2$.

56 **تفكير ناقّد** ماذا تقول عن دالة خطية تساوى ميلها وميل دالتها العكسية؟

ارسم بيان كل دالة وبيان العلاقة العكسية.

59 $y = 2^x$

58 $y = x^3$

57 $y = 3$

مراجعة لولبية

60 **تجارة** تم شراء أسهم بمبلغ 45 180 دينارًا للسهم الواحد. يبيّن الجدول المقابل التغيّرات في قيمة هذا السهم بعد الشراء.

(الصفوف السابقة)

أ) رتّب قيم هذا السهم من الأصغر إلى الأكبر، بما فيها قيمته في اليوم 0، وهو يوم شرائه.

ب) اكتب مدى القيم مستعملًا لغة المجموعات.

قيمة السهم	اليوم
-230	1
+2580	2
-640	3
+1270	4
-2120	5

اكتب الدالة الحدودية من أدنى درجة ممكنة، والتي معاملها الرئيس 2

وأصغارها الأعداد المعطاة. (الصفوف السابقة)

64 $9, 8, -3$

63 $2, 1, -1$

62 $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$

61 $1, 2, -3$

اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أو دالة تراجع، ثم ارسم بيانها. (الدرس 1-4)

66 $f(x) = \frac{1}{25}(0.5)^x$

65 $f(x) = 15\left(\frac{89}{100}\right)^x$

68 $f(x) = 0.01(1.9)^x$

67 $f(x) = 2(1.1)^x$

3-4

الدوال اللوغاريتمية

Logarithmic functions



لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

تُستعمل اللوغاريتمات لقياس حموضة الماء (PH).
(المثال 5).

الأهداف

يكتب الصور المتكافئة للدوال
الأسية واللوغاريتمية.
يكتب الدوال اللوغاريتمية
ويرسم بياناتها ويحسب قيمها.

المفردات

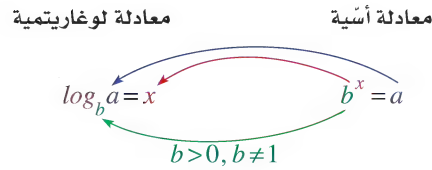
Vocabulary

اللوغاريتم
Logarithm

اللوغاريتم العادي
Common Logarithm

الدالة اللوغاريتمية
Logarithmic Function

كم مرة تضاعف ديناراً واحداً ليصبح 8 دنانير؟ يُمكنك استعمال معادلة لتمثيل هذا الأمر. $1(2^x) = 8$. قد تستطيع حل هذه المعادلة ذهنياً إذا تذكرت أن $2^3 = 8$. إذن، عليك مضاعفة الدينار الواحد 3 مرات للحصول على 8 دنانير. كم مرة تضاعف ديناراً واحداً ليصبح 512 ديناراً؟ يُمكنك حل هذه المسألة إذا كنت قادراً على حل المعادلة $2^x = 512$ ، باستعمال العملية العكسية لعملية رفع عدد معين إلى قوة بأس معين. هذه العملية العكسية هي حساب اللوغاريتم. اللوغاريتم هو أس القوة التي ترفع إليها عدداً (أساساً) معيناً لتحصل على قيمة مُعطاة. يُمكنك كتابة معادلة أسية على صورة معادلة لوغاريتمية وبالعكس.



قراءة

اقرأ $\log_b a = x$ كما يلي: x يساوي لوغاريتم a بأس b .
لا حظ أن اللوغاريتم هو الأس.

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسية على الصورة اللوغاريتمية.

- أساس القوة يُصبح أساس اللوغاريتم.
أس القوة هو اللوغاريتم.
قوة أي عدد مختلف عن الصفر بأس صفر هي 1.
قد يكون الأس (أو اللوغاريتم) سالباً.
قد يكون اللوغاريتم (أو الأس) متغيراً.

الصورة اللوغاريتمية	المعادلة الأسية
$\log_2 64 = 6$	$2^6 = 64$
$\log_4 4 = 1$	$4^1 = 4$
$\log_5 1 = 0$	$5^0 = 1$
$\log_5 0.04 = -2$	$5^{-2} = 0.04$
$\log_3 81 = x$	$3^x = 81$

أ
ب
ج
د
هـ

1. اكتب المعادلة الأسية على الصورة اللوغاريتمية.



$x^0 = 1 (x \neq 0)$ ج

$3^3 = 27$ ب

$9^2 = 81$ أ

مثال 2 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسية.

أساس اللوغاريتم يُصبح أساس القوة.
اللوغاريتم هو أس القوة.
قد يكون اللوغاريتم سالِباً.

الصورة الأسية	المعادلة اللوغاريتمية	
$10^2=100$	$\log_{10} 100=2$	أ
$7^2=49$	$\log_7 49=2$	ب
$8^{-1}=0.125$	$\log_8 0.125=-1$	ج
$5^1=5$	$\log_5 5=1$	د
$12^0=1$	$\log_{12} 1=0$	هـ

2. اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسية.

نقطة
مراقبة

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ ج

$\log_{12} 144 = 2$ ب

$\log_{10} 10 = 1$ أ

اللوغاريتم أس. يسمح هذا الأمر بتطبيق قوانين القوى على اللوغاريتمات. ربما لاحظت الخصائص التالية في المثال الأخير.

بعض خصائص اللوغاريتمات

أيما يكن الأساس b حيث $b > 0$ و $b \neq 1$.

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية	مثال
لوغاريتم b بأساس b . $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$
لوغاريتم 1 $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

اللوغاريتم العادي لوغاريتم بأساس 10. إذا لم يُذكر أساس اللوغاريتم فهو 10. مثال: $\log 5 = \log_{10} 5$

مثال 3 حساب قيمة لوغاريتم ذهنياً

احسب القيمة ذهنياً.

$\log_4 \frac{1}{4}$ ب

$4^? = \frac{1}{4}$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

$\log_4 \frac{1}{4} = -1$

$\log 1000$ أ

$10^? = 1000$

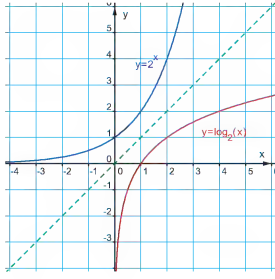
$10^3 = 1000$

$\log 1000 = 3$

3. احسب ذهنياً قيمة المقدار.

$\log_{25} 0.04$ ب

$\log 0.00001$ أ



بما أن اللوغاريتم هو عكس الأس، فإن الدالة العكسية لدالة أسية مثل $y=2^x$ ، هي دالة لوغاريتمية مثل $y=\log_2 x$. عليك أن تتذكر أن مجال كل من الدالتين هو مدى الدالة الأخرى، وأن مدى كل منهما هو مجال الأخرى. مجال الدالة $y=2^x$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة \mathbb{R} ، ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{y|y>0\}$. ينتج من ذلك أن مجال الدالة اللوغاريتمية $y=\log_2 x$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{x|x>0\}$ وأن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة \mathbb{R} .

مثال 4 رسم بيانات الدوال اللوغاريتمية

استعمل القيم المُعطاة للمتغير x لرسم بيان الدالة، ثم ارسم بيان الدالة العكسية. حدّد مجال الدالة العكسية ومداها.

أ $x=-2,-1,0,1,2$ ؛ $f(x)=3^x$

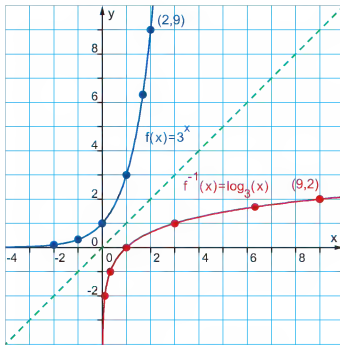
ارسم بيان الدالة $f(x)=3^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

لكي ترسم بيان الدالة العكسية $f^{-1}(x)=\log_3 x$ ، بادل بين x و $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2

مجال الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ هو $\{x|x>0\}$ ومداها \mathbb{R} .



ب $x=-3,0,1,4,7$ ؛ $f(x)=0.8^x$

ارسم بيان الدالة $f(x)=0.8^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

لكي ترسم بيان الدالة العكسية $f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$ ، بادل بين x و $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	-3	0	1	4	7

مجال الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ هو $\{x|x>0\}$ ومداها \mathbb{R} .

4. استعمل القيم $x=-2,-1,1,2,3$ لرسم بيان الدالة $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ ، ثم ارسم بيان الدالة العكسية. حدّد مجال الدالة العكسية ومداها.





تطبيق على البيئة

مثال 5

يختبر الكيميائيون بشكل دوري عينات من المطر لتحديد حموضته، أي تركيز أيونات الهيدروجين (H^+) فيه. تُقاس حموضة مياه الأمطار باستعمال الـ pH وفق الدالة التالية:
 $pH = -\log[H^+]$ حيث يمثل $[H^+]$ تركيز أيونات الهيدروجين مقيسًا بالمول في اللتر الواحد من ماء المطر. جد pH ماء المطر في كل موقع.

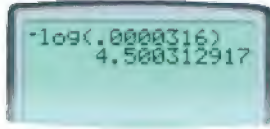
أ الموقع A حيث يبلغ تركيز أيونات الهيدروجين 0.0000316 مول في اللتر.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$

عوض.

استعمل حاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم بأساس 10. استعمل المفتاح \log . pH مياه الأمطار في الموقع A هو حوالي 4.5.

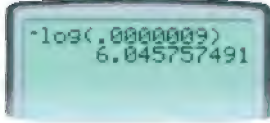


ب الموقع B حيث يبلغ تركيز أيونات الهيدروجين 0.0000009 مول في اللتر.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$

استعمل حاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم بأساس 10. استعمل المفتاح \log . pH مياه الأمطار في الموقع B هو حوالي 6.



5. كم يبلغ pH شاي مثلج تركيز أيونات الهيدروجين فيه 0.000158 مول في اللتر؟



فكر وناقش

1. ما السبب الذي يجعل $\log_b b$ يساوي 1 أيًا يكن العدد الموجب b المختلف عن 1؟
2. أوضح إن كان $\log_a b$ و $\log_b a$ متساويين. ادعم جوابك.
3. كن منظمًا انسخ المخطط المقابل ثم أكمله. اشرح الدوال اللوغاريتمية بأسلوبك.

تعريف	خصائص
أمثلة	أمثلة مضادة
الدالة اللوغاريتمية	



3-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات اللوغاريتم في المعادلة الأسية $a^x = b$ هو ؟ . (a أو b أو x)

انظر المثال 1

اكتب المعادلة الأسية على الصورة اللوغاريتمية.

$$2.4^0 = 1 \quad 4^{1.5} = 8 \quad 10^{-2} = 0.01 \quad 3^x = 243$$

انظر المثال 2

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسية.

$$\log_4 0.0625 = -2 \quad \log_x (-16) = 3 \quad \log_{0.9} 0.81 = 2 \quad \log_6 x = 3$$

انظر المثال 3

احسب كل قيمة ذهنياً.

$$\log_7 343 \quad \log_3 \frac{1}{9} \quad \log_{0.5} 0.25 \quad \log_{1.2} 1.44$$

انظر المثال 4

ارسم بيان الدالة باستعمال القيم المُعطاة، ثم ارسم بيان الدالة العكسية. حدّد مجال الدالة

العكسية ومداها.

$$x = -2, -1, 0, 1, 2; f(x) = 0.5^x \quad x = -2, -1, 0, 1, 1.5; f(x) = 5^x$$

انظر المثال 5

16 كيمياء لدراسة قوة الحمض في محلول، يستعمل الكيميائيون الدالة $pOH = -\log[OH^-]$ ،

حيث يرمز $[OH^-]$ إلى تركيز أيونات الهيدروكسيد مقيسة بالمول في اللتر. ما قيمة pOH لماء

بلغ تركيز أيونات الهيدروكسيد فيه 0.000000004 ؟

تمارين وحل مسائل

اكتب المعادلة الأسية على الصورة اللوغاريتمية.

$$x^{2.5} = 32 \quad 6^x = 216 \quad 1.2^0 = 1 \quad 4^{-1} = 0.25$$

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسية.

$$\log_5 625 = 4 \quad \log_2 x = 6 \quad \log_{4.5} 1 = 0 \quad \log_\pi \pi = 1$$

احسب كل قيمة ذهنياً.

$$\log_2 1 \quad \log 0.001 \quad \log_4 64 \quad \log_{0.1} 100$$

استعمل القيم المُعطاة للمتغير x ، لرسم بيان الدالة، ثم ارسم بيان الدالة العكسية.

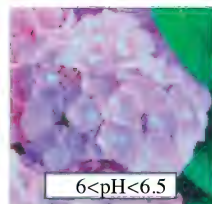
حدّد مجال الدالة العكسية ومداها.

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3; f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \quad x = -2, -1, 0, 1, 2, 3; f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

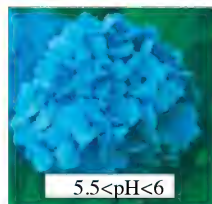
31 حقائق يتحدّد لون أزهار الأورتانسيا وفقاً لقيمة pH التربة.



5 < pH < 5.5



6 < pH < 6.5



5.5 < pH < 6

230 الفصل 4 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تمارين حرة

أنظر	حل
المثال	التمارين
1	20-17
2	24-21
3	28-25
4	30-29
5	31

قاس منسّق الحديقة تركيز أيونات الهيدروجين في تربة الحديقة، ووجد أنه يساوي 0.0000006 مول في اللتر. هل تصلح هذه التربة للحصول على أزهار أورتناسيا زرقاء اللون؟

32 بطاقات اعتماد تستعمل في بعض بطاقات الاعتماد الدالة $n = \frac{\log A - \log P}{\log(1.0175)}$ لحساب عدد الأشهر n التي مضت منذ إيداع المبلغ الأصلي P ، حتى بلوغ الحساب قيمته الحالية A ، بفرضية أنه لم يدخل الحساب أي مبلغ إضافي، ولم تستعمل البطاقة خلال هذه الفترة.

أ أودع آوات مبلغ 1 000 000 دينار، وأصبحت قيمة حساب البطاقة

الآن 1 210 260 ديناراً. كم شهراً مضى على إيداع المبلغ الأصلي؟

ب كم شهراً إضافياً يلزم هذا الحساب لتتجاوز قيمته 1 420 000 دينار؟

ج ماذا تلاحظ على جوابي السؤالين السابقين؟

33 تفكير ناقد ما قيمة b علماً بأن $\log_a b = 0$ ؟ أوضح ذلك.

الصوت	الشدة
إقلاع طائرة	$10^{15} I_0$
ثاقب آلي	$10^{12} I_0$
مجفف شعر	$10^7 I_0$
همس	$10^3 I_0$
خفيف أوراق الشجر	$10^2 I_0$
عتبة السمع	I_0

34 أصوات يُقاس مستوى شدة الصوت L على مقياس لوغاريتمي باستعمال الدالة $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ ، حيث يرمز L إلى مستوى شدة الصوت مقيساً بالديسيبل Decibel، ويرمز I إلى شدة الصوت، كما يرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع.

أ حدّد مستوى شدة كل صوت في الجدول المقابل.

ب يبلغ مستوى شدة الصوت في أحد أنواع الموسيقى الصاخبة 110

ديسيبل. أين تضع هذا الصوت في الجدول ليبقى مرتباً؟

ج ماذا لو...؟ الديسيبل عُشر وحدة قياس أخرى هي البل Bel.

هل مستوى شدة صوت الطائرة أعلى من مستوى مستوى شدته 20 بل؟ أوضح ذلك.

35 تفكير ناقد إذا كان n عدداً صحيحاً وإذا كان 10^n مكتوباً على الصورة الرقمية، فهل $\log 10^n$ يساوي عدد الأصفار في 10^n . أكّد جوابك بمثال.

36 تقدير استند إلى أن $\log 100 = 2$ و $\log 1000 = 3$ لتقدير $\log 200$ و $\log 500$.

37 غذاء استعمل الجدول المقابل لتحديد نوع كل عصير بمعرفة تركيز أيونات الهيدروجين

العصير	مدى الـ pH
الليمون	2.0 – 2.6
العنب	2.9 – 3.2
البرتقال	3.3 – 4.1
الرمّان	4.1 – 4.6

في لتر من هذا العصير.

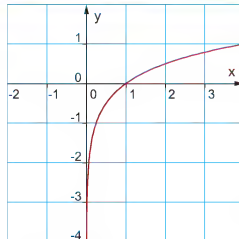
أ 0.00014 مول في اللتر.

ب 0.0081 مول في اللتر.

ج 0.00074 مول في اللتر.

38 اكتب ما السبب الذي يجعل $\log_3 3$ و $\log_3 3$ غير معرفين؟

تحضير للاختبار



39 إلى أي دالة يعود البيان المقابل؟

أ $f(x) = \log x$

ب $f(x) = \log_4 x$

ج $f(x) = \log_2 x$

د $f(x) = 2^x$

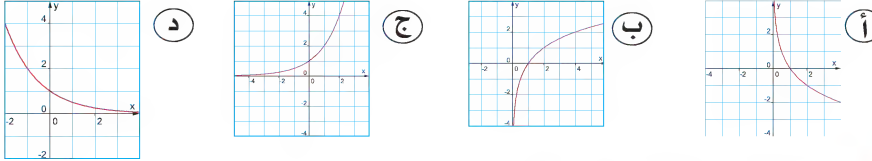
40 أي من المعادلات اللوغاريتمية تكافئ $2^7 = 128$ ؟

- (أ) $\log_7 2 = 128$ (ب) $\log_2 128 = 7$
(ج) $\log_2 7 = 128$ (د) $\log_7 128 = 2$

41 أي مما يلي أفضل تقدير لقيمة $\log 50$ ؟

- (أ) 1.7 (ب) 2.5 (ج) 5 (د) 10

42 أي من البيانات التالية أفضل تمثيل بياني للدالة $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟



43 **جواب مختصر** ما قيمة $\log_2 64$ ؟

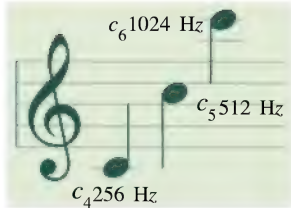
تحدّ وتوسّع

44 ارسم بياني الدالتين $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$. صف الفروق بين الدالتين، بالاستناد إلى بيانيتهما.

45 احسب قيم $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$. اكتب مقولة عن العلاقة بين هذه المقادير اللوغاريتمية الثلاثة. عمّم باستعمال متغيرات.

46 أثبت أن $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ مبرراً كل خطوة.

47 **موسيقى** مقياس الموسيقى مقياس لوغاريتمي. يُمكن التعبير في هذا المقياس عن تردد كل نوتة بعدد الترددات في الثانية، أو عدد الهيرتزات، بقوة من قوى العدد 2.



(أ) احسب تردد النوتة C_7 على الصورة الأسية وعلى الصورة اللوغاريتمية.

(ب) ما النوتة التي يبلغ ترددها 32 هيرتزاً ؟

مراجعة لولبية

اكتب المقدار على أبسط صورة مفترضاً أن قيم جميع المتغيرات مختلفة عن الصفر.

(الصفوف السابقة)

49 $\frac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $[(2a^4)(5b^2)]^2$

51 $7a^{-2}b^3(3ab+4a^{-1}b^2)$

52 $-2t^2(5st^{-1})$

52 **إنشاءات** وقع حجر عن ارتفاع 7 m نحو الأرض. استعمل الدالة $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ حيث يرمز

h إلى ارتفاع الحجر بالأمتار، بعد t ثانية من سقوطه، ويرمز h_0 إلى ارتفاعه الأصلي بالأمتار قبل

السقوط، لتحسب الزمن الذي استغرقه وصول الحجر إلى الأرض. (الصفوف السابقة)

أكمل جدول القيم لكل دالة، مُقرباً القيم إلى أقرب جزء من مئة.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 1.7^x$					
$f(x) = 0.6^x$					
$f(x) = 0.3^x$					

53

54

55

الفصل

4

اختبار جزئي

1-4 الدوال الأسية والنمو والتراجع

اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أو دالة تراجع. ارسم بيانها.

$$f(x) = 6.4 \left(1\frac{3}{8}\right)^x \quad 4 \quad f(x) = 14(1.4)^x \quad 3 \quad f(x) = \frac{1}{5}(0.2)^x \quad 2 \quad f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad 1$$

5 افترض أن عدد البكتيريا في زرع بيولوجي بلغ 1000 يوم الإثنين، وأن عددها يتكاثر بنسبة 50% يومياً منذ ذلك الوقت.

أ اكتب دالة تمثل نمو عدد هذه البكتيريا بدلالة الزمن محسوباً بالأيام.

ب ارسم بيان الدالة التي كتبتها، واستعمله لتقدير عدد البكتيريا يوم الإثنين التالي.

2-4 العلاقة العكسية والدالة العكسية

مثل بياناً العلاقة الممثلة بالجدول، ثم مثل بياناً العلاقة العكسية.

x	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

7

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

6

ارسم بيان كل دالة. اكتب الدالة العكسية، وارسم بيانها.

$$f(x) = 0.4 \left(\frac{x}{2} + 1.5\right) \quad 11 \quad f(x) = 5x + 4 \quad 10 \quad f(x) = \frac{3}{4} - x \quad 9 \quad f(x) = x + 2.1 \quad 8$$

12 تتضمن كلفة إصلاح حاسوب ميران 210 000 دينار ثمن قطع غيار، و 55 000 دينار، أجراً لكل ساعة عمل. تُشكّل الدالة $f(x) = 55\,000x + 210\,000$ نموذجاً لحساب كلفة إصلاح الحاسوب بدلالة عدد الساعات التي استغرقها إصلاحه. جد الدالة العكسية، واستعملها لكي تجد عدد الساعات التي استغرقها إصلاح حاسوب ميران، علماً بأن الكلفة بلغت 402 500 دينار.

3-4 الدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسية على الصورة اللوغاريتمية.

$$0.5^x = 0.0625 \quad 16 \quad 2^{-2} = 0.25 \quad 15 \quad 17.6^0 = 1 \quad 14 \quad 3^2 = 9 \quad 13$$

اكتب كل معادلة لوغاريتمية على الصورة الأسية.

$$\log_a x = 5 \quad 20 \quad \log_{0.99} 1 = 0 \quad 19 \quad \log_{\frac{1}{5}} 25 = -2 \quad 18 \quad \log_4 64 = 3 \quad 17$$

21 ارسم بيان الدالة $f(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ باستعمال القيم التالية لـ $x = -1, 0, 2, 3$. ارسم بيان الدالة العكسية.



خصائص اللوغاريتم

Properties of Logarithm

4-4

الأهداف

يستعمل خصائص اللوغاريتم
لكتابة المقادير اللوغاريتمية
على أبسط صورة.
يُحوّل من لوغاريتم بأساس
معين إلى لوغاريتم بأساس
آخر.

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل علماء الزلازل اللوغاريتم لحساب الطاقة
التي تُطلقها الزلازل. (المثال 6).

يُمكن التعبير عن الدالة اللوغاريتمية $pH = -\log[H^+]$ لحساب الـ pH التي تعرفت
عليها في الدرس السابق، على الصورة الأسية التالية: $10^{-pH} = [H^+]$. بما أن
اللوغاريتم هو الأس، فإن خصائص القوى تولّد خصائص اللوغاريتم.
تذكّر: لكي تضرب قوتين لهما الأساس نفسه، تجمع الأسين:
 $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

خاصية لوغاريتم ناتج الضرب

أيًا يكن العددين الموجبان m و n ، وأيًا يكن العدد الحقيقي b ($b > 0$ و $b \neq 1$).

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم ناتج الضرب يساوي مجموع لوغاريتمات العوامل.	$\log_3 1000 = \log_3 (10 \times 100)$ $= \log_3 10 + \log_3 100$	$\log_b (mn) = \log_b (m) + \log_b (n)$

يُمكن استعمال الخاصية أعلاه في الاتجاه المعاكس لكتابة مجموع لوغاريتمات لها الأساس نفسه
كلوغاريتم واحد على أبسط صورة.

مثال 1 جمع اللوغاريتمات

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

$$\log_4 2 + \log_4 32$$

$$\log_4 (2 \times 32)$$

$$\log_4 64$$

$$3$$

لجمع اللوغاريتمين، اضرب العددين.

بسّط

$$4^3 = 64 \text{ فكر}$$

1. اكتب المقدار كلوغاريتم واحد. بسّط إن كان ذلك ممكنًا.

$$\log_1 27 + \log_1 \frac{1}{9} \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log_5 625 + \log_5 25 \quad \boxed{\text{أ}}$$



تذكّر: لكي تقسم قوتين لهما الأساس نفسه، تطرح الأسين $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.
بما أن اللوغاريتم أس، فإن طرح لوغاريتمين لهما الأساس نفسه ما هو
إلا إيجاد لوغاريتم ناتج قسمة قوتين لهما الأساس نفسه.

خاصية لوغاريتم ناتج القسمة

أيًا يكن العددين الموجبان m و n وأيًا يكن b ($b > 0$ و $b \neq 1$).

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم ناتج القسمة هو ناتج طرح لوغاريتم المقسوم عليه من لوغاريتم المقسوم.	$\log_5 \left(\frac{16}{2} \right) = \log_5 (16) - \log_5 (2)$	$\log_b \left(\frac{m}{n} \right) = \log_b (m) - \log_b (n)$

اعلم

احفظ

انتبه!

كما أنك لا تستطيع تبسيط $a^5 b^3$ كذلك لا تستطيع تبسيط مقدار لوغاريتمي إذا كانت الأسس مختلفة.

مثال 2 طرح اللوغاريتمات

اكتب $\log_2 32 - \log_2 4$ كلوغاريتم وحيد، وبسط إن أمكن.

أ $\log_2 32 - \log_2 4$

$\log_2 \left(\frac{32}{4} \right)$

$\log_2 (8)$

3

ل طرح اللوغاريتمين، اقسم العددين.

بسط.

فكر $2^? = 8$

2. اكتب $\log_7 49 - \log_7 7$ كلوغاريتم وحيد إن أمكن. وبسط إن كان ذلك ممكنًا.

نقطة مراقبة

بما أن من الممكن حساب لوغاريتمات ناتج الضرب، فيمكن حساب لوغاريتمات القوى.

خاصية لوغاريتم القوة

أيًا يكن العددين الموجبان a و b حيث $b \neq 1$ وأيًا يكن العدد الحقيقي p .

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
لوغاريتم قوة هو ناتج ضرب أس القوة في لوغاريتم أساسها.	$\log 10^3$ $\log(10 \times 10 \times 10)$ $\log 10 + \log 10 + \log 10$ $3 \log 10$	$\log_b a^p = p \log_b a$

اعلم

احفظ

مثال 3 تبسيط لوغاريتمات القوى

اكتب المقدار على صورة ناتج ضرب. بسط إن كان ذلك ممكنًا.

ب $\log_5 \left(\frac{1}{5} \right)^3$

$3 \log_5 \frac{1}{5}$

$3(-1)$ لأن $5^{-1} = \frac{1}{5}$

-3

أ $\log_3 81^2$

$2 \log_3 81$

$2(4)$ لأن $\log_3 81 = 4$

$3^4 = 81$

8

3. اكتب كل مقدار على صورة ناتج ضرب. بسط إن كان ذلك ممكنًا.

ج $\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^5$

ب $\log_5 25^2$

أ $\log 10^4$

نقطة مراقبة

بما أن عمليتي القوة واللوغاريتم عمليتان متعاكستان، فإن كلا منهما تلغي نتيجة الأخرى.

الخصائص المتعاكسة للقوة واللوغاريتم

أيًا يكن الأساس b حيث $b > 0$ و $b \neq 1$.

مثال	في الجبر
$\log_{10} 10^7 = 7$	$\log_b b^x = x$
$10^{\log_{10} 2} = 2$	$b^{\log_b x} = x$



مثال 4 تعرّف المتعاكسات

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$2^{\log_2 27}$ ج	$\log_5 125$ ب	$\log_8 8^{3x+1}$ أ
$2^{\log_2 27}$	$\log_5 5^3$	$\log_8 8^{3x+1}$
27	3	$3x+1$

4. **أ** اكتب $\log 10^{0.9}$ على أبسط صورة. **ب** اكتب $2^{\log_2(8x)}$ على أبسط صورة.



تُحسب أكثرية الحاسبات اللوغاريتم العادي (أساس 10) أو اللوغاريتم الطبيعي (أساس e). انظر الدرس 4-5). يُمكنك تحويل اللوغاريتم من أساس إلى آخر باستعمال القانون التالي:

قانون تغيير أساس اللوغاريتم

أيًا يكن الأساس الموجب a حيث $a \neq 1$ ، وأيًا يكن الأساس الموجب b حيث $b \neq 1$.

مثال	في الجبر
$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$



مثال 5 تغيير أساس اللوغاريتم

احسب قيمة $\log_4 8$.

طريقة أولى تغيير الأساس إلى 10.

$$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$$

$$\approx \frac{0.0903}{0.602} = 1.5$$

استعمل الحاسبة

طريقة ثانية تحويل الأساس إلى 2

لأن 4 و 8 هما من قوى العدد 2.

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

إضاءة

$$\log j + \log a + \log m \text{ تذكر} \\ = \log jam$$

ب احسب قيمة $\log_8 16$

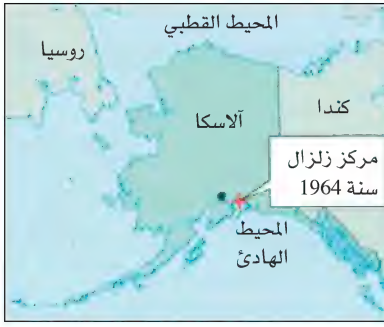
5. **أ** احسب قيمة $\log_9 27$



يُستعمل السلم اللوغاريتمي لقياس كميات تنتمي قيمها إلى مجال واسع جدًا، مثل شدة الصوت ومستوى شدته، أو الطاقة التي تطلقها الزلازل.

تطبيق في الجيولوجيا

مثال 6



يستعمل المختصون بدراسة الزلازل مقياس ريختر للتعبير عن الطاقة التي يطلقها زلزال، أو عن قوته. تربط بين قوة زلزال M والطاقة E التي يُطلقها، علاقة هي $M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$. سنة 1964 ضرب زلزال بقوة 9.2 درجات على مقياس ريختر، آلاسكا بأميركا الشمالية. جد كمية الطاقة التي أطلقها هذا الزلزال.

إضاءة

مقياس ريختر مقياس لوغاريتمي. لذا فإن كل زيادة 1 على هذا المقياس تعادل إطلاق طاقة مضاعفة 10 مرات.

عوض.

$$9.2 = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$$

اضرب كل طرف في $\frac{3}{2}$

$$\left(\frac{3}{2} \right) 9.2 = \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$$

بسط.

$$13.8 = \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$$

استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.

$$13.8 = \log E - \log 10^{11.8}$$

استعمل تعاكسية القوة واللوغاريتم.

$$13.8 = \log E - 11.8$$

$$25.6 = \log E$$

استعمل تعريف اللوغاريتم.

$$10^{25.6} = E$$

استعمل حاسبة.

$$3.98 \times 10^{25} = E$$

بلغت الطاقة التي أطلقها هذا الزلزال 3.98×10^{25} إرغز (ergs).

6. زلزالان بلغت قوتهما 9.2 درجات و 8 درجات على مقياس ريختر. كم ضعفًا من طاقة الزلزال الثاني أطلق الزلزال الأول؟

نقطة مراقبة



فكر وناقش

1. كيف ترسم بيان الدالة $y = \log_5 x$ باستعمال الحاسبة البيانية؟

2. كيف وجدت $10^{25.6}$ في المثال 6 باستعمال خصائص القوى؟

3. ما الذي يحدث عندما تطبق قانون تغيير الأساس

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \text{ عندما } x = a$$

4. كن منظمًا انسخ الجدول المقابل ثم أكمله.

بين بأسلوبك الخصائص المترابطة للقوى واللوغاريتم.

خاصية القوى	خاصية اللوغاريتم

اعلم

احفظ

التمارين

4-4

تمارين موجّهة

انظر المثال 1

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكناً.

$\log_3 3 + \log_3 27$ 3

$\log 100 + \log 1000$ 2

$\log_5 50 + \log_5 62.5$ 1

انظر المثال 2

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكناً.

$\log_6 496.8 - \log_6 2.3$ 6

$\log 5.4 - \log 0.054$ 5

$\log_4 320 - \log_4 5$ 4

انظر المثال 3

بسّط إن كان ذلك ممكناً.

$\log_{\frac{1}{2}} (0.25)^4$ 10

$\log_7 49^3$ 9

$\log_3 3^5$ 8

$\log_8 8^2$ 7

انظر المثال 4

$\log_2 (0.5)^4$ 14

$\log_4 1024$ 13

$2.5^{\log_{2.5} 19}$ 12

$\log_2 2^{\frac{x+5}{2}}$ 11

انظر المثال 5

احسب قيمة المقدار.

$\log_2 27$ 18

$\log_5 10$ 17

$\log_8 32$ 16

$\log_9 \left(\frac{1}{27}\right)$ 15

انظر المثال 6

جيولوجيا تربط بين قوة زلزال M والطاقة E التي يُطلقها علاقة هي $M = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{10^{11.8}} \right)$. كم ضعفًا من طاقة زلزال تيجون أطلق زلزال نيو مدريد 1811؟

أهم الزلازل في أمريكا الشمالية		
M	السنة	الموقع
8.1	1811	نيو مدريد
8.0	1812	نيو مدريد
7.9	1957	فورت تيجون
7.8	1906	سان فرانسيسكو
7.8	1892	وادي الأباطرة

تمارين وحل مسائل

اكتب المقدار كلوغاريتم وحيد. بسّط إن كان ذلك ممكناً.

$\log_{2.5} 3.125 + \log_{2.5} 5$ 22

$\log 2 + \log 5$ 21

$\log_8 4 + \log_8 16$ 20

$\log_{1.5} 6.75 - \log_{1.5} 2$ 25

$\log_2 16 - \log_2 2$ 24

$\log 1000 - \log 100$ 23

بسّط إن كان ذلك ممكناً.

$\log_5 125^{\frac{1}{3}}$ 28

$\log(100)^{0.1}$ 27

$\log_2 16^3$ 26

$\log_9 6561$ 31

$3^{\log_3 4.52}$ 30

$\log_3 3^{7+x}$ 29

احسب قيمة المقدار.

$\log_4 9$ 34

$\log_{25} 125$ 33

$\log_{\frac{1}{2}} 16$ 32

صوت بعد عدة شكاوى، تبين أن صوت الموسيقى في المهرجانات التي تُقام في العراء يرتفع مستوى شدتها 5 ديسيبل عن الحد المسموح به وهو 100 ديسيبل. يُحسب مستوى شدة الصوت باستعمال العلاقة $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ ، حيث يرمز I إلى شدة الصوت ويرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع. كم ضعفًا من شدة الحد المسموح به تساوي شدة صوت الموسيقى في المهرجانات التي تُقام في العراء؟

تمارين حرة

أنظر	حل
المثال	التمارين
1	22-20
2	25-23
3	28-26
4	31-29
5	34-32
6	35



- 36 فلك** يُقاس الفرق بين السطوع الظاهر m لنجم و سطوعه الحقيقي M باستعمال العلاقة $m - M = 5 \log \frac{d}{10}$ حيث يرمز d إلى المسافة بين النجم والأرض مقيسة بالفرسخ النجمي Parsec
- أ** جد بعد النجم أنتاريس Antares عن الأرض.
- ب** يبعد النجم سيغماسكو Sigma Sco عن الأرض 225 فرسخاً نجمياً. ما السطوع الحقيقي لهذا النجم؟
- ج** كم ضعفاً يبلغ بعد النجم أنتاريس عن الأرض قياساً على بُعد النجم رو أوف Rho Oph عنها؟

إضاءة

الفرسخ النجمي هو وحدة قياس تعادل 3.3 سنوات ضوئية.

اكتب المساواة الأسية على الصورة اللوغاريتمية.

$$(b^m)^n = b^{mn} \quad \text{39}$$

$$b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n} \quad \text{38}$$

$$b^{m+n} = b^m b^n \quad \text{37}$$

بسط إن كان ذلك ممكناً.

$$2 - \log_{11} 121 \quad \text{42}$$

$$\log 0.1 + \log 1 + \log 10 \quad \text{41}$$

$$\log_2 32 - \log_2 128 \quad \text{40}$$

$$\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}} \quad \text{45}$$

$$7^{\log_7 7} - \log_7 7^7 \quad \text{44}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{43}$$

46 تفكير ناقد استعمل خصائص اللوغاريتم، والقيمة $\log 2 \approx 0.301$ ، لتحسب:

$$\log 2000 \quad \text{ج}$$

$$\log 200 \quad \text{ب}$$

$$\log 20 \quad \text{أ}$$

47 كيمياء يوصي الخبراء بأن يكون pH الماء في أحواض السباحة بين 7.0 و 7.6. استعمل العلاقة $pH = -\log [H^+]$ لتكتب مقداراً يُعبّر عن الفرق في تركيز أيونات الهيدروجين العائد إلى قيمتي pH المذكورتين.

48 خطوات متعددة في موقع معين، يعيش 143 حيواناً من نوع معرض للانقراض، ويتناقص عددها بنسبة 4% سنوياً.

أ اكتب دالة أسية تمثل عدد الحيوانات في الموقع، بدلالة عدد السنوات.

ب اكتب دالة لوغاريتمية تمثل عدد السنوات بدلالة عدد الحيوانات.

ج اكتب سلسلة المفاتيح التي تستعملها لإدخال الدالة اللوغاريتمية في الحاسبة البيانية.

د بعد كم سنة يقل عدد الحيوانات في هذا الموقع عن 30؟ قرب إلى أقرب سنة.

49 تمويل يرتفع سعر مُنتج ثمنه 40 000 دينار بمعدل 8% سنوياً. اكتب مقداراً لوغاريتمياً، واستعمله لتحديد عدد السنوات الضرورية لكي يصل سعر المنتج إلى 50 000 دينار. (مساعدة: ابدأ بكتابة المقدار على الصورة الأسية).

50 يدفع أحد المصارف لمودعيه فائدة نسبتها السنوية 19.2% تُحسب شهرياً. تمثل الدالة $A = P(1.016)^n$ نموذجاً لحساب القيمة الآنية A لمبلغ أصلي P بعد n شهراً من إيداعه.

أ أودعت هذا المصرف 500 000 دينار. اكتب مقداراً لوغاريتمياً، واستعمله لتجد عدد الشهور الضرورية لكي يتضاعف المبلغ.

ب كم شهراً سينقضي حتى يتضاعف المبلغ الجديد؟

ج هل تتأثر المدة التي يتطلبها مبلغ لكي تتضاعف قيمته؟

الحاسبة البيانية استعمل قانون تغيير الأساس وحاسبة بيانية لرسم بيان الدالة.

$$y = \frac{\log_{12} x}{3} \quad \boxed{53}$$

$$y = 2 \log_5 x \quad \boxed{52}$$

$$y = \log_3 x \quad \boxed{51}$$

اكتب كيف ترسم بيان الدالة $y = \log_{16} x$ باستعمال حاسبة بيانية؟ **54**

تفكير ناقد جد قيمة تقريبية لكل مقدار علمياً بأن $\log_{12} 20 \approx 1.2$ و $\log_{12} 33 \approx 1.4$. **55**

$$\log_{12} 400 \quad \boxed{\text{ج}}$$

$$\log_{12} 660 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log_{12} 1.65 \quad \boxed{\text{أ}}$$

تفكير ناقد هناك علاقة مهمة بين اللوغاريتم والصورة العلمية لكتابة الأعداد. **56**

أ جد لوغاريتم 2.5.

ب جد لوغاريتم كتلة باخرة التايتانيك. قارن الجواب مع جواب السؤال (أ).



ج **اكتب مقولة** كتلة أسد $2.5 \times 10^2 \text{ kg}$. جد لوغاريتم هذا

العدد. استعمل الجواب وجوابي السؤالين (أ) و (ب) لتوضّح كيف تجد لوغاريتم عدد مكتوب على الصورة العلمية.

د استعمل مقولتك لإيجاد لوغاريتم كتلة قطعة نقود تبلغ

$2.5 \times 10^{-3} \text{ kg}$. هل تصح مقولتك بخصوص الأعداد المكتوبة على الصورة العلمية بأس سالب؟

افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. اذكر إن كانت كل مقولة صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو خطأ دائماً.

57 يُمكن تحويل لوغاريتم أساسه b إلى لوغاريتم أساسه عدد نسبي معيّن.

58 اللوغاريتم بأساس 6 لقوة من قوى العدد 6 يساوي أس هذه القوة.

59 طرح لوغاريتم العدد 1 بأساس b من عدد، لا يُغيّر في هذا العدد.

60 يُمكن لأساس لوغاريتم أن يكون عدداً سالباً.

61 لوغاريتم تربيع عدد يساوي ضعف لوغاريتم هذا العدد.

62 يُمكن جمع لوغاريتمات مختلفة الأساسات من دون الحاجة إلى تغييرات في الأساسات.

63 يُمكن تبسيط $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$.

64 لوغاريتم لوغاريتم عدد هو العدد نفسه.

65 **خطأ في التحليل** فيما يلي طريقتان لتبسيط $\log 80 + \log 20$. أيهما خطأ؟ بيّنه.

$$\log 80 + \log 20 = \log(80 + 20) \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$= \log 100$$

$$= \log(10^2)$$

$$= 2 \log 10$$

$$= 2$$

$$\log 80 + \log 20 = \log(80 \times 20) \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$= \log 1600$$

$$= \log(16 \times 10^2)$$

$$= \log 16 + \log 10^2$$

$$= \log 16 + 2$$

تحضير للاختبار

66 أي مساواة خطأ؟

$$\frac{\log 140}{\log 35} = \log 4 \quad \boxed{\text{ب}}$$

$$\log 140 - \log 35 = \log 4 \quad \boxed{\text{أ}}$$

$$\log \frac{140}{35} = \log 4 \quad \boxed{\text{د}}$$

$$\log 35 + \log 4 = \log 140 \quad \boxed{\text{ج}}$$

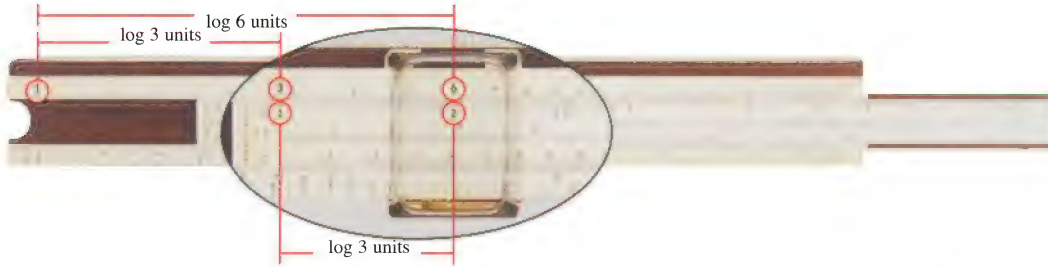
67 اكتب $\log_9 x^2 + \log_9 x$ على أبسط صورة.

أ $\log_9 (x^2 + x)$ ب $\log_9 (3x)$ ج $3\log_9 x$ د $3(x^2 + x)$

68 أي مقدار لوغاريتمي يساوي $\log 6$ ؟

أ $\log 3 + \log 2$ ب $\log 3 + \log 3$ ج $\log 3 \times \log 2$ د $\log 3 \times \log 3$

تحدّ وتوسّع



69 **تاريخ الرياضيات** قبل ظهور الحاسبات استعمل المهندسون والطلاب نوعاً من المساطر يسمح بإجراء حسابات معقّدة في هذه المسطرة. خطاً أعداد ينزلق كل منهما على الآخر، وسلّم كل منهما سلّم لوغاريتمي، مما يسمح باستعمال خصائص اللوغاريتم في الضرب والقسمة.

أ كيف تُبيّن الصورة ناتج ضرب 2 في 3 ؟

ب كيف يُمثّل ذلك خاصيّة لوغاريتم ناتج الضرب ؟

جد مجال الدالة.

70 $f(x) = \log(x^2 - 4)$ 71 $f(x) = \log x - \log(x - 1)$ 72 $f(x) = \log\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

73 $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 74 $f(x) = -\sqrt{\log(x + 1)}$ 75 $f(x) = \sqrt{-2\log(-x)}$

76 أثبت أن $\log_b a^p = p \log_b a$ 77 بسّط $\log_9 3^{2x}$

حلّ كل معادلة.

78 $\log_x 25 = 2$ 79 $\log_x (-8) = 3$ 80 $0 = \log_x 1$

مراجعة لولبية

حلّ كل معادلة . (الصفوف السابقة)

81 $4(x + 1) = 3(2x - 6)$ 82 $-20 + 8n = n + 29$ 83 $8\left(n + \frac{3}{4}\right) = 10n - 4$

اكتب العدد بدلالة i . (الدرس 2-6)

84 $3\sqrt{-16}$ 85 $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ 86 $4\sqrt{-8}$ 87 $\sqrt{-125}$

اكتب المساواة الأسية على الصورة اللوغاريتمية. (الدرس 4-3)

88 $5^3 = 125$ 89 $10^{-1} = 1$ 90 $36^{0.5} = 6$ 91 $4^x = 256$

احسب قيمة المقدار. (الدرس 4-3)

92 $\log_{12} 1$ 93 $\log_5 25$ 94 $\log_{16} 4$ 95 $\log_{625} 0.04$

5-4

اللوغاريتم الطبيعي النيري

Natural Logarithm



من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل العلماء اللوغاريتم الطبيعي والتأريخ بالكربون لتحديد عمر بقايا الحيوانات القديمة. (المثال 4)

الأهداف

يستعمل العدد e لكتابة دوال أسية تمثل حالات من الواقع، ويرسم بيانات هذه الدوال. يحل معادلات ومساائل تتضمن العدد e واللوغاريتم الطبيعي.

المفردات

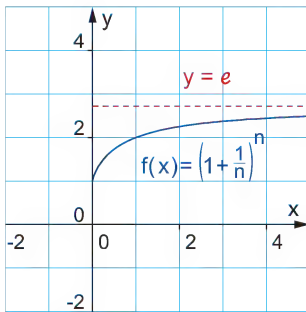
Vocabulary

اللوغاريتم الطبيعي
Natural logarithm

دالة اللوغاريتم الطبيعي
Natural logarithm function

تذكر أن قانون الفائدة النسبية هو $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ حيث يرمز P إلى المبلغ الأصلي المودع، و A إلى القيمة الحالية لهذا المبلغ، و r إلى المعدل السنوي للفائدة، و t إلى عدد السنوات، و n إلى عدد المرات التي يتم فيها تذخير هذا الحساب في السنة.

افترض أنك أودعت ديناراً في حساب يدفع فائدة معدّلها السنوي 100% ($r=1$)، وأنه يتم تذخير الحساب n مرة في السنة. ستكون قيمة هذا المبلغ بعد سنة $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.



افترض أن عدد المرات n يتزايد بحيث يصبح كبيراً. يُمكنك عندها الحديث عن تذخير متواصل للحساب. تفحص بيان الدالة $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. لهذه الدالة مقارب أفقي بحيث تقترب قيمة الدالة من عدد قيمته التقريبية $2.7182818...$ عندما يسعى n إلى $+\infty$. يرمز أهل الرياضيات بالحرف e إلى هذا العدد، وهو عدد غير نسبي مثل العدد π .

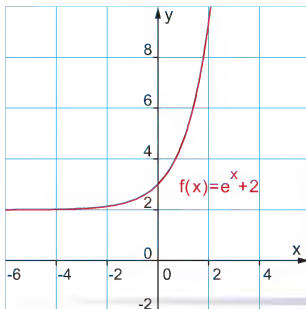
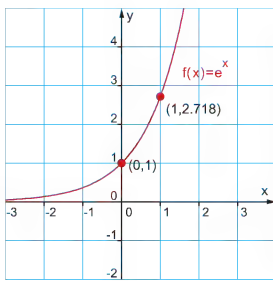
تتمتع الدوال الأسية التي أساسها e بالخصائص نفسها التي تتمتع بها سائر الدوال الأسية. وبيان الدالة $f(x) = e^x$ يُشبه بيانات الدوال الأسية الأخرى، مثل $f(x) = 3^x$.

مجال الدالة $f(x) = e^x$ هو \mathbb{R} ، ومداها هو $\{y/y > 0\}$.

تسمى الدالة $f(x) = e^x$ **الدالة الأسية الطبيعية**

Natural exponential function وهي تؤدي دوراً مهماً

في تاريخ الرياضيات.



مثال 1 رسم بيانات الدوال الأسية الطبيعية

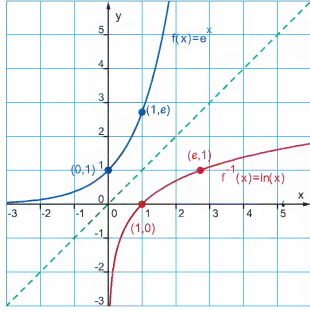
ارسم بيان الدالة $f(x) = e^x + 2$.

أنشئ جدول قيم لهذه الدالة. بما أن العدد e غير نسبي، فعليك بتقريب قيم الدالة إلى العُشر مثلاً.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = e^x + 2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

1. ارسم بيان الدالة $f(x) = e^x - 3$.





اللوغاريتم الطبيعي **Natural logarithm** هو اللوغاريتم بأساس e . سوف تستعمل الرمز \ln للدلالة على اللوغاريتم الطبيعي. لهذا اللوغاريتم الخصائص نفسها التي يتمتع بها اللوغاريتم العادي (العشري) واللوغاريتمات الأخرى.

دالة اللوغاريتم الطبيعي **Natural logarithm function**

دالة $f(x) = \ln x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية الطبيعية. إنها دالة اللوغاريتم بأساس e . مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة. أما بيانها فهو البيان المقابل.

مثال 2 تبسيط المقادير الأسية واللوغاريتمية الطبيعية

اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$e^{5\ln x}$$

ج

$$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$$

$$e^{\ln(x-1)}$$

ب

$$e^{\ln(x-1)} = x-1$$

$$\ln e^{-2t}$$

أ

$$\ln e^{-2t} = -2t$$

2. اكتب المقدار على أبسط صورة.

$$\ln e^{x+4y}$$

ج

$$e^{2\ln x}$$

ب

$$\ln e^{3.2}$$

أ



بالعودة إلى قانون الفائدة المركبة، يصبح $A = pe^{rt}$ عندما يكون التذخير متواصلًا.

مثال 3 تطبيق على الاقتصاد

تم إيداع مليون دينار لمدة 10 سنوات بفائدة معدّلها السنوي 5%، على أن يتم تذخير الحساب بشكل متواصل. كم ستكون قيمة الحساب بعد السنة العاشرة؟

القانون.

$$A = pe^{rt}$$

عوض.

$$A = 1000\,000 e^{0.05 \times 10}$$

استعمل الحاسبة.

$$A \approx 1\,648\,720$$

ستكون قيمة الحساب بعد 10 سنوات 1 648 720 دينارًا تقريبًا.

3. كم ستكون قيمة 100 000 دينار بعد 8 سنوات، علمًا بأنه قد تم إيداع هذا

المبلغ في حساب متواصل التذخير، وبفائدة معدّلها السنوي 3.5% ؟

يستعمل العلماء مفهوم عمر النصف لدراسة بعض المواد وخصوصًا المشعة منها.

عمر النصف **half-life** لمادة هو الفترة الزمنية التي يتطلبها انحلال نصف هذه

المادة أو تحويله إلى شيء آخر. تستعمل الدالة أدناه لدراسة عملية التراجع هذه.

الكمية في بداية الفترة عند $t=0$

ثابت التراجع

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

الكمية في نهاية الفترة t

الفترة الزمنية t



تطبيق على دراسة الحيوانات المنقرضة

مثال 4

اكتشف عالمٌ إحاثية في كاليفورنيا متحجرةً لِمُسَيِّفِ النَابِئِ، وهو حيوانٌ منقرضٌ من فصيلة الهرة. بعد تحليل المتحجرة وجد أنها تحتوي على 15% من كمية الكربون 14 التي كان يحتوي عليها جسمه. حدّد عمر هذه البقايا، علماً بأن عمر النصف للكربون 14 هو 5730 سنة.

الخطوة 1 جد ثابت التراجع للكربون 14.

دالة التراجع الطبيعي.

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

عوّض.

$$\frac{1}{2} = 1 \times e^{-k \times 5730}$$

بسّط وخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$$\ln 2^{-1} = -5730k$$

$$\ln 2^{-1} = (-1) \ln 2 = -\ln 2$$

$$-\ln 2 = -5730k$$

بسّط.

$$k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0.00012$$

الخطوة 2 استعمل قانون التراجع وحلّ المعادلة الناتجة.

دالة التراجع.

$$N(t) = N_0 e^{-0.00012t}$$

عوّض.

$$15 = 100 \times e^{-0.00012t}$$

اقسم كل طرف على 100.

$$0.15 = e^{-0.00012t}$$

بسّط وخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

$$\ln 0.15 = \ln e^{-0.00012t}$$

بسّط.

$$\ln 0.15 = -0.00012t$$

حلّ.

$$t = -\frac{\ln 0.15}{0.00012} \approx 1580$$

تعود هذه البقايا إلى حوالي 15 800 سنة.

انتبه!

ln يشير إلى اللوغاريتم الطبيعي، بينما يشير log إلى اللوغاريتم العادي (أي بأساس 10)

4. كم سنة يستغرق انحلال 650 mg من الكروميوم 51 لتصبح 200 mg ، علماً بأن عمر النصف للكروميوم 51 هو 28 يوماً تقريباً.

نقطة مراقبة



فكر وناقش

1. بم يتشابه العدان e و π وبم يختلفان؟
2. أوضح ما يربط بين e و \ln .
3. كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. املاً خلايا الجدول لتوضح نقاط التشابه ونقاط الاختلاف بين نوعي اللوغاريتم. أعط الصيغ العامة مدعمة بأمثلة. بسّط حيث تجد ضرورة لذلك.



اللوغاريتم الطبيعي	اللوغاريتم العادي	
		الأساس
		الصورة اللوغاريتمية
		الصورة الأسية
		$\log_b 1$
		$\log_b b$
		$\log_b b^x$
		$b^{\log_b x}$

التمارين

5-4

تمارين موجهة

1 مفردات اكتب اللوغاريتم الطبيعي لعدد x على صورة دالة بدلالة x . تسمى هذه الدالة ____ .

ارسم بيان الدالة.

2 $f(x) = e^x - 4$ 3 $f(x) = -e^x$ 4 $f(x) = 4 - e^x$ 5 $f(x) = e^{1-x}$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

6 $\ln e^1$ 7 $\ln e^{x-y}$ 8 $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ 9 $e^{\ln 2x}$ 10 $e^{3 \ln x}$

11 اقتصاد أودعت فيان 7 750 000 دينار في حساب متواصل التذخير، بفائدة معدلها السنوي 4%. ما قيمة هذا الحساب بعد 5 سنوات؟

12 فيزياء التكنيتيوم $^{99m}\text{Technetium}$ مادة مشعة تُستعمل في تصوير عضلات القلب والهيكل العظمي. عمر النصف لهذه المادة 6 ساعات تقريباً. جد ثابت التراجع لهذه المادة. استعمل دالة التراجع $N(t) = N_0 e^{-kt}$ لحساب ما يتبقى من 250 mg من هذه المادة بعد 24 ساعة.

تمارين وحل مسائل

ارسم بيان الدالة.

13 $f(x) = e^x + 1$ 14 $f(x) = e^x - 1$ 15 $f(x) = 1 - e^x$ 16 $f(x) = 10 - e^x$

اكتب المقدار على أبسط صورة.

17 $\ln e^0$ 18 $\ln e^{2x}$ 19 $e^{\ln(x+2)}$ 20 $e^{4 \ln x}$

21 اقتصاد يحتوي حساب دلشاد في المصرف على 7 565 000 دينار. وظّف دلشاد 5 000 000 دينار منها في حساب معدل فائدته السنوية 3.5% ويتم تذخيرها بشكل متواصل. كم ستكون القيمة الكلية لحساب دلشاد بعد ثلاث سنوات؟

22 بيئة سنة 1986، تعرّض مفاعل تشرنوبيل النووي في أوكرانيا لحادث أدى إلى تسرب كمية كبيرة من البلوتونيوم. يبلغ عمر النصف لهذه المادة 24 110 سنوات. جد ثابت التراجع لهذه المادة. استعمل دالة التراجع $N(t) = N_0 e^{-kt}$ لحساب ما يتبقى من 20 g من هذه المادة بعد 5000 سنة. بعد كم سنة تصبح الكمية المتبقية من هذه الجرامات العشرين جراماً واحداً؟

23 حاسبة جد القيمة التقريبية لكل من $\ln 10$ و $\log e$.

أ كيف يرتبط العددين اللذان حصلتا عليهما؟

ب استعمل قاعدة تغيير الأساس لدعم جوابك.

24 بين أن $\ln x = \ln 10 \times \log x$.

تمارين حرة

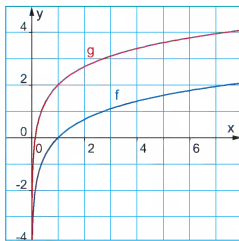
أنظر	لحل
التمارين	المثال
1	16-13
2	20-17
3	21
4	22

25 خطوات متعددة ينصّ قانون نيوتن للتبريد على أن درجة حرارة سائل تتراجع وفق الدالة الأسية التالية $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ ، حيث يرمز T_0 إلى درجة الحرارة الأصلية، ويرمز T_s إلى درجة الحرارة المحيطة بالشيء و k إلى عدد ثابت و t إلى الزمن. عندما يقاس الزمن بالدقائق يكون $k = 0.283$. مقهى تبلغ درجة حرارة الجو فيه 21 درجة مئوية، يقدم إلى زبائنه قهوة درجة حرارتها 96 درجة مئوية. ينصح الدوّافة بشرب القهوة عندما تكون درجة حرارتها 60 درجة مئوية تقريباً.

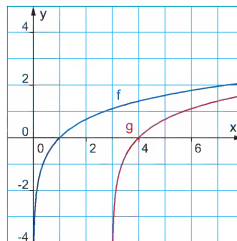
- أ كم دقيقة على الزبون أن ينتظر قبل تناول قهوته؟
 ب كم يصبح الجواب السابق إذا كانت درجة الحرارة في المقهى 30 درجة مئوية؟
 ج ارسم بيان دالة التبريد في الحالتين السابقتين، وجد بيانياً عدد الدقائق لكي تُصبح درجة حرارة القهوة مساوية لدرجة حرارة جو المقهى.

26 ارسم بيان كل من الدالتين $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$. قارن بين البيانين، وبين كل منهما وبين الدالة $y = \log_6 x$.

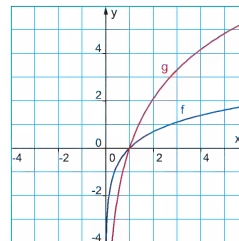
في التمارين من 27 إلى 29، اربط كل دالة ناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = \ln x$ بأحد البيانات التالية:



ج



ب



أ

29 $g(x) = \ln x + 2$

28 $g(x) = 3 \ln x$

27 $g(x) = \ln(x - 3)$

30 بيئة قدّرت إحدى جمعيات العناية بالبيئة في كندا أن عدد قطع حيوانات الرنة التي تعيش في وادي نهر جورج بلغ 4700 رأس سنة 1954، وأن هذا العدد تزايد أُسيّاً حتى وصل إلى 472 000 رأس سنة 1984.

أ استعمل الدالة الأسية $N(t) = N_0 e^{kt}$ حيث يرمز N_0 إلى العدد الأصلي للقطيع، ويرمز t إلى الزمن و $N(t)$ إلى عدد القطيع بعد t سنة و k إلى نسبة التزايد السنوية. جد قيمة k .

ب ماذا لو...؟ لو استمر هذا القطيع بالتزايد على الوتيرة نفسها، كم سيبليغ عدده سنة 2012؟

31 عدوى يستعمل العاملون في الصحة العامة الدالة $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ لقياس مدى انتشار وباء في مجتمع.

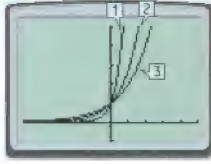
أ ارسم بيان هذه الدالة.

ب كم مقارباً لهذه الدالة؟

ج صِف ما تعنيه هذه الدالة في حالة واقعية من حالات انتشار وباء.



32 تفكير ناقد يُبيّن الشكل المقابل بيانات الدوال $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$.



- أ مَيِّز بيان كل من هذه الدوال.
 ب ما إحداثيّات النقطة المشتركة بين البيانات الثلاثة؟
 ج ما السبب الذي يجعل هذه النقطة مشتركة بين البيانات الثلاثة؟

33 اكتب قارن بين تذخير حساب مصري في شكل متواصل وتذخير يوميًا. كم يربح الحساب لو كان التذخير متواصلًا بدلاً من أن يكون يوميًا. ضمّن جوابك مثالاً.

- 34** بلغ عدد المزارع في أحد البلدان 33 500 مزرعة سنة 1990 وأصبح 30 800 سنة 2000.
 أ جد قيمة k في الدالة الأسية $N(t) = N_0 e^{kt}$ للحصول على نموذج لتناقص عدد المزارع.
 ب استعمل النموذج لتقدير عدد المزارع سنة 2010.
 ج تزايد متوسط مساحات المزارع في فترة 1990 - 2000 من 1209 فدادين إلى 1279 فدانًا. جد نموذجاً أسياً يسمح بتقدير متوسط مساحة المزارع سنة 2010.

تحضير للاختبار

35 أي مجموعة من المقادير مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر؟

- أ $\ln 1, \log 10, \ln 10, \log e$ (أ)
 ب $\ln 10, \log 10, \log e, \ln 1$ (ب)
 ج $\log 10, \ln 10, \log e, \ln 1$ (ج)
 د $\log e, \ln 10, \log 10, \ln 1$ (د)

36 أي مقدار لا يساوي x ، حيث $x \neq 0$ ؟

- أ $e^{\ln x}$ (أ)
 ب $\ln e^x$ (ب)
 ج $x \ln e$ (ج)
 د $x + \ln e$ (د)

37 أي مقدار يساوي $\log 50$ ؟

- أ $\ln 50 + \ln 10$ (أ)
 ب $\ln(50 + 10)$ (ب)
 ج $\ln 50 + \ln 10$ (ج)
 د $(\ln 50) \times (\ln 10)$ (د)

38 **جواب مختصر** اكتب مقداراً يساوي $-\ln x$ من دون استعمال إشارة السالب.

تحدّ وتوسّع

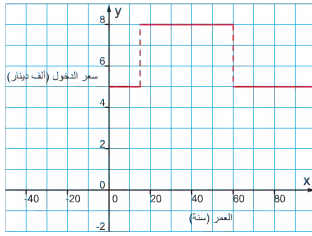
39 كم مرة في السنة يجب تذخير حساب مصري بمعدل فائدة سنوية 8% لكي تكون قيمته 99.9% من قيمته لو كان التذخير متواصلًا؟ هل تغيّر معدل الفائدة يغيّر في الجواب؟ أوضّح ذلك.

40 ارسم بيان الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. صِف هذا البيان، وحدّد مجال الدالة ومداها.

41 أجب عن الأسئلة التالية المتعلقة ببيان الدالة $f(x) = \ln x$:

- أ أي دالة تتمثّل بيانياً بانعكاس بيان الدالة $f(x)$ حول المحور الثاني؟
 ب أي دالة تتمثّل بيانياً بانعكاس بيان الدالة $f(x)$ حول المحور الأول؟
 ج أي دالة تتمثّل بيانياً بانعكاس بيان الدالة $f(x)$ حول المحورين على التوالي؟
 د ارسم بيان الدالة $f(x)$ والانعكاسات الثلاثة في المستوى الإحداثي نفسه. حدّد المقاربات التي تشارك فيها البيانات الأربعة.

مراجعة لولبية



42 تسليية يُظهر البيان المقابل أسعار الدخول إلى حديقة

الحيوانات بدلالة عمر الزائر. ارسم بيانياً يُمثل كلاً من

الحالات التالية، وحدّد التحويل الذي يسمح بالحصول

عليه انطلاقاً من البيان المقابل. (الصفوف السابقة)

أ قبل الساعة 5:00 ب.ظ. تنخفض الأسعار إلى النصف.

ب تم إنقاص الحد الأعلى لكل فئة عمرية 3 سنوات.

ج تمت مضاعفة جميع الأسعار.

اكتب الدالة الناتجة من تحويل الدالة $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ بكل من التحويلات

التالية: (الصفوف السابقة)

44 سحب إلى اليسار وحدتين

43 سحب إلى أعلى 5 وحدات

46 مط أفقي بعامل 2

45 انعكاس حول المحور الأول

اكتب المقدار باستعمال لوغاريتم واحد. قدّم الجواب على أبسط صورة. (الدرس 4-4)

49 $\log_3 243 - \log_3 2187$

48 $\log_4 64 - \log_4 1$

47 $\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{2}$

52 $\log x^2 + \log x$

51 $\log_8 8 + \log_8 \frac{1}{8}$

50 $\log_5 25 + \log_5 125$



المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

6-4

الأهداف

يحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.
يحل مسائل تتضمن معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

المفردات

Vocabulary

المعادلة الأسية
Exponential Equation
المعادلة اللوغاريتمية
Logarithmic Equation

من يستعمل هذا الأمر؟

يُستعمل السلم الأسّي لقياس الضوء في عمليات التصوير. (التمرين 40).

المعادلة الأسية Exponential Equation معادلة تتضمن مقداراً أو أكثر يكون فيه المجهول أساً.

لكي تحل معادلة أسية:

- حاول أن تكتبها بأساس واحد: إذا كان $b^x = b^y$ فإن $x = y$ ($b \neq 1, b \neq 0$)
- استعمل اللوغاريتم: إذا كان $a = b$ فإن $\log a = \log b$ ($a > 0, b > 0$)

حل المعادلات الأسية

مثال 1

حلّ وتحقق.

$$8^x = 2^{x+6}$$

$$(2^3)^x = 2^{x+6}$$

$$2^{3x} = 2^{x+6}$$

$$3x = x + 6$$

$$x = 3$$

تحقق

2^{x+6}	8^x
2^{3+6}	8^3
2^9	8^3
512	512 ✓

الحل هو $x = 3$

$$5^{x-2} = 200$$

$$\log 5^{x-2} = \log 200$$

$$(x-2)\log 5 = \log 200$$

$$x-2 = \frac{\log 200}{\log 5}$$

$$x = 2 + \frac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$$

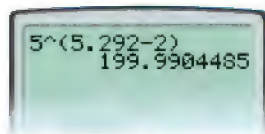
تحقق استعمل الحاسبة.

الحل هو $x \approx 5.292$

إضاءة

عندما تستعمل جواباً مقرباً في عملية التحقق، لن تجد نتيجة مضبوطة تماماً، بل نتيجة معقولة.

بما أن 200 ليس قوة من قوى 5، خذ لوغاريتم الطرفين.
استعمل خاصية لوغاريتم القوة.
اقسم كل طرف على $\log 5$.



$$2^{3x} = 15 \quad \text{ج}$$

$$7^{-x} = 21 \quad \text{ب}$$

1. حلّ وتحقق.

$$3^{2x} = 27 \quad \text{أ}$$

نقطة مراقبة



تطبيق نقدي

مثال 2

تستطيع الاختيار بين الحصول على سيارة ثمنها 20 مليون دينار أو الحصول على دينار واحد في اليوم الأول وضعف ما حصلت عليه في اليوم التالي، وهكذا... لو اخترت الحل الثاني، في أي يوم تحصل على مبلغ أكبر من ثمن السيارة؟
سوف تحصل في اليوم الأول على دينار واحد 2^0 وعلى دينارين 2^1 في اليوم التالي وهكذا. فسوف تحصل على 2^{n-1} ديناراً في اليوم n . للحصول على الجواب، حلّ المتباينة.

$$2^{n-1} > 20\,000\,000$$

اكتب 20 مليوناً على الصورة العلمية.

$$2^{n-1} > 2 \times 10^7$$

خذ لوغاريتم كل طرف.

$$\log(2^{n-1}) > \log(2 \times 10^7)$$

استعمل خاصية القوة وخاصية ناتج الضرب.

$$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$$

$$\log 10^7 = 7$$

$$(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$$

أقسم كل طرف على $\log 2$

$$n-1 > \frac{\log 2 + 7}{\log 2}$$

استعمل الحاسبة

$$n > \frac{\log 2 + 7}{\log 2} + 1$$

قرب الجواب إلى أقرب عدد صحيح من أعلى.

$$n > 25.26$$

ابتداء من اليوم السادس والعشرين، يصبح ما تتقاضاه أكبر من ثمن السيارة.
تحقق بما أن $2^{26-1} = 2^{25} = 33\,554\,432$ فإنك تتقاضى في اليوم السادس والعشرين 33 554 432 ديناراً وهو مبلغ يزيد على ثمن السيارة.

ملاحظة

من المنطقي أن يقارن التلميذ بين مجموع ما يتقاضاه حتى يتخطى ثمن السيارة، أي أن يحل: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots$
 $+ 2^{n+1} > 20 \times 10^6$
 $\Rightarrow n = 24$

2. افترض في المثال 2 أن المبلغ الذي تتقاضاه كل يوم سيكون 3 أضعاف ما تقاضيته في اليوم السابق، بدل الضعفين. في أي يوم سوف يزيد ما تتقاضاه على مليار دينار؟



المعادلة اللوغاريتمية **Logarithmic Equation** معادلة تتضمن مقداراً لوغاريتمياً أو أكثر يتضمن مجهول. يمكنك حل المعادلات اللوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتم.

حل معادلات لوغاريتمية

مثال 3

حل.

$$\log_3(x-5) = 2 \quad \text{أ}$$

$$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$$

$$x-5 = 9$$

$$x = 14$$

$$\log 45x - \log 3 = 1 \quad \text{ب}$$

$$\log\left(\frac{45x}{3}\right) = 1$$

$$\log(15x) = 1$$

$$10^{\log(15x)} = 10^1$$

$$15x = 10$$

$$x = \frac{2}{3}$$

استعمل 3 أساساً مشتركاً للطرفين.
استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم.
بسّط.

استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.
اقسم.

استعمل 10 أساساً مشتركاً للطرفين
استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم
بسّط

تذكّر

راجع خصائص اللوغاريتم في الدرس 4-4.

خاصية لوغاريتم القوة.

اقسم كل طرف على 2.

تعريف اللوغاريتم.

$$4 = 2^2$$

بسط.

استعمل خاصية لوغاريتم ناتج الضرب

استعمل 10 أساساً مشتركاً للطرفين

استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم

اضرب الحدود وجمعها

حل

استعمل خاصية الضرب الصفري

حل

$$\log_4 x^2 = 7$$

$$2 \log_4 x = 7$$

$$\log_4 x = \frac{7}{2}$$

$$x = 4^{\frac{7}{2}}$$

$$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$$

$$x = 2^7 = 128$$

$$\log x + \log(x+9) = 1$$

$$\log x(x+9) = 1$$

$$10^{\log x(x+9)} = 10^1$$

$$x(x+9) = 10$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x-1)(x+10) = 0$$

$$x+10=0 \text{ أو } x-1=0$$

$$x=-10 \text{ أو } x=1$$

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1

↑
log(-10) غير معرف

$\log x + \log(x+9)$	1	تحقق
$\log 1 + \log(1+9)$	1	
$\log 1 + \log 10$	1	
$0+1$	1	
$0+1$	1	

إذن، الحل هو $x=1$

انتبه!

تحقق دائماً من الحلول لأن طريقة الحل قد تدخل حلولاً دخيلة.

3. حل.

$$2 \log x - \log 4 = 0$$

$$3 = \log 8 + 3 \log x$$



استعمال الجداول والرسوم البيانية لحل المعادلات والمتباينات الأسية واللوغاريتمية

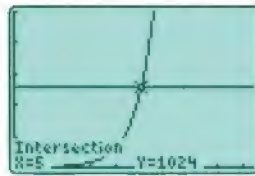
استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا لتحل.

$$2^{2x} = 1024$$

استعمل حاسبة بيانية. أدخل $2^{(2X)}$ أمام $Y1$ و 1024 أمام $Y2$.

X	Y1	Y2
1	4	1024
2	16	1024
3	64	1024
4	256	1024
5	1024	1024
6	4096	1024
7	16384	1024

ابحث في الجدول عن قيمة x التي تجعل $Y1 = Y2$



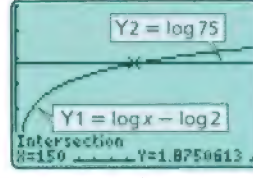
ابحث في الرسم البياني عن الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيانيين.
الحل هو $x=5$

$$\log x - \log 2 \leq \log 75 \quad \text{ب}$$

استعمل حاسبة بيانية. أدخل $\log x - \log 2$ أمام $Y1$ و $\log 75$ أمام $Y2$.

X	Y1	Y2
120	1.7782	1.8751
130	1.8149	1.8751
140	1.8464	1.8751
150	1.8751	1.8751
160	1.9034	1.8751
170	1.9294	1.8751
180	1.9542	1.8751

ابحث في الجدول عن قيم x التي تجعل $Y1 \leq Y2$



ابحث في الرسم البياني عن الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيانيين.

مجموعة الحل هي $\{x/x \leq 150\}$

تحقق استعمال الجبر.

$$\log x - \log 2 \leq \log 75$$

$$\log \frac{x}{2} \leq \log 75$$

$$10^{\log \frac{x}{2}} \leq 10^{\log 75}$$

$$\frac{x}{2} \leq 75$$

$$x \leq 150 \quad \checkmark$$

استعمل خاصية لوغاريتم ناتج القسمة.

استعمل 10 أساساً مشتركاً للطرفين.

استعمل التعاكس بين القوة واللوغاريتم.

بسط.

4. استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا للحل.



$$\log x^2 = 6 \quad \text{ج}$$

$$2^x > 4^{x-1} \quad \text{ب}$$

$$2^x = 4^{x-1} \quad \text{أ}$$

فكر وناقش

1. لماذا تستنتج أن $a = b$ إذا كان $\log a = \log b$ حيث $a > 0$ و $b > 0$ ؟

2. اذكر فقط الخطوة الأولى في حل كل مما يلي:

$$\log 2x + \log 2 = 1 \quad \text{ب}$$

$$\log x^5 = 10 \quad \text{أ}$$

$$\log(x + 1000) = 2 \quad \text{د}$$

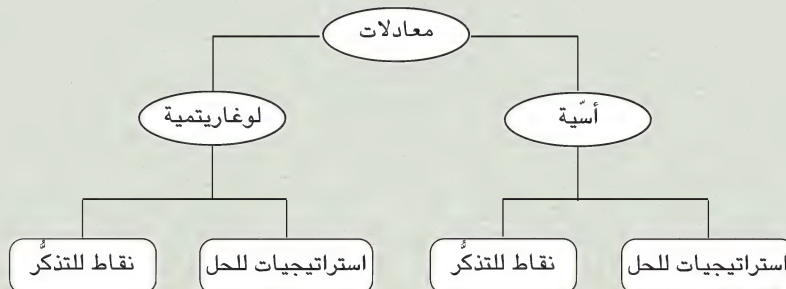
$$x^4 = 100 \quad \text{ج}$$

$$\log_6(x + 6) = 3 \quad \text{و}$$

$$\log(x + 4) + \log x = 2 \quad \text{هـ}$$

3. أوضح كيف يُمكن أن يكون لمعادلة لوغاريتمية حل سالب. برّر جوابك وأعطِ مثالاً إذا كان ذلك ممكناً.

4. كن منظمًا. انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب بأسلوبك الاستراتيجيات والنقاط الواجب عليك تذكرها بخصوص المعادلات الأسية واللوغاريتمية.



6-4 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات يُمكنك حل معادلة _____ بأخذ لوغاريتم كل طرف من طرفيها (أسية أو لوغاريتمية).

حلّ وتحقّق.

1 انظر المثال

$$2^x = 4^{x+1} \quad 4$$

$$9^x = 3^{x-2} \quad 3$$

$$4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}} \quad 2$$

$$2.4^{3x+1} = 9 \quad 7$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad 6$$

$$4^x = 10 \quad 5$$

2 انظر المثال

8 السكان عدد السكان في إحدى القرى 3400 نسمة، وهو يتزايد 3% سنوياً. يُمكن اعتماد الدالة $P = 3400(1 + 0.03)^t$ لتمثيل عدد السكان بدلالة الزمن t . حيث يرمز P إلى عدد السكان بعد t سنة. بعد كم سنة يتخطى عدد السكان 10 000 نسمة؟

حلّ.

3 انظر المثال

$$\log_6(2x+3) = 3 \quad 10$$

$$\log_2(7x+1) = \log_2(2-x) \quad 9$$

$$\log_3 x^9 = 12 \quad 12$$

$$\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0 \quad 11$$

$$\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \quad 14$$

$$\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right) \quad 13$$

$$\log\left(x + \frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0 \quad 16$$

$$\log x + \log(x+48) = 2 \quad 15$$

استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا لتحلّ.

4 انظر المثال

$$x > 10 \log x \quad 20$$

$$2 \log x^4 = 16 \quad 19$$

$$2^x 3^x \leq 7776 \quad 18$$

$$2^{2x+1} = 256 \quad 17$$

تمارين وحل مسائل

حلّ وتحقّق.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}} \quad 23$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{x-1} \quad 22$$

$$2^{x-1} = \frac{1}{64} \quad 21$$

$$3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2 \quad 26$$

$$(1.5)^{x-1} = 14.5 \quad 25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6 \quad 24$$

27 الأدوية أعطى الممرض ولداً حبة مسكّن تحتوي على 325mg من الإسبرين. تُستعمل الدالة

$A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ لتحديد كمية الإسبرين A المتبقية في دم الولد بعد t دقيقة من تناوله حبة من هذا المسكّن. اكتب متباينة لوغاريتمية وحلّها لتحديد عدد الدقائق الضرورية لتصبح كمية الأسبرين دون 50mg.

حلّ.

$$\log_2\left(1 + \frac{x}{2}\right) = 4 \quad 29$$

$$\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5) \quad 28$$

$$\log_5 x^4 = 2.5 \quad 31$$

$$\log 5x - \log(15.5) = 2 \quad 30$$

$$2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right) \quad 33$$

$$\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x \quad 32$$

استعمل جدولاً ورسمًا بيانيًا للحل.

$$\log(2x-17) + \log x \geq 2 \quad 36$$

$$4x \leq 2^{x+1} \quad 35$$

$$2 \times 3^{x-1} = 162 \quad 34$$

37 حلّ $\log x = \log(x^2 - 12)$. وضّح جوابك.

38 حلّ $5^{2x} = 100$ مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

39 حلّ $5^{x+2} = 64$ مستعملاً أكثر من طريقة.

40 **موسيقى** يرتبط تردّد كل نغمة (بالبهرتز) من نغمات البيانو بعلاقة مع موقع مفتاحها على لوحة المفاتيح، وفقاً للدالة $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ ، حيث يمثل n عدد المفاتيح التي تفصل هذا المفتاح عن مفتاح مركزي (يكون n سالباً إذا كان المفتاح إلى يسار المفتاح المركزي، وموجباً إذا كان إلى يمينه). جد موقع المفتاح لنغمة ترددها 110 هيرتز.

41 **تمويل** افترض أن مبلغاً مقداره 250 000 دينار، تم إيداعه في مصرف يدفع فائدة مركبة معدّلها 4.5% في الفصل، ويذخّر الحساب فصلياً (4 مرات في السنة). يستعمل القانون $A = P(1+r)^n$ لحساب ما صار إليه مبلغ أصلي P تم إيداعه في حساب فائدة مركبة معدّلها r في الفصل، بعد مضي n فصلاً على الإيداع. استعمل هذا القانون لإيجاد عدد الفصول الضرورية لكي يصبح المبلغ 500 000 دينار على الأقل (مساعدة: ابدأ بقسمة طريق المعادلة على P).

42 **تفكير ناقد** كم عدداً حقيقياً يشكّل حلاً للمتباعدة $\log x^2 < 2 \log x$ ؟ استعمل الحاسبة البيانية لرسم البيانيّن، والتحقّق من الجواب. أوضح ما يدل عليه البيانيان بخصوص الجواب.

43 **خطأ في التحليل** عند قيامه بحل المعادلة $\log x + 4 = 8$ ، حصل دانا على 99 999 996 كجواب. أين أخطأ دانا؟

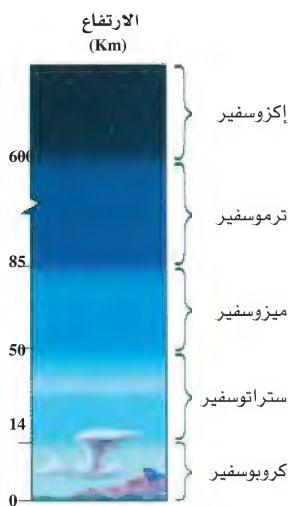
44 **اكتب** صفّ طريقتين يمكنك استعمالهما لحل معادلة أسية. أعط مثالاً يوضّح متى تستعمل كل طريقة.

45 يُمكن اعتماد الدالة $N(t) = 119(0.987)^t$ نموذجاً لتحديد عدد مزارع الدواجن بالآلاف في أحد البلدان بدلالة عدد السنوات t التي تلي سنة 1980.

أ هل تزايد عدد المزارع منذ 1980 أم تناقص؟ كيف تعرف ذلك؟

ب ما عدد المزارع في هذا البلد سنة 1980 وسنة 2000؟

ج بالاستناد إلى هذا النموذج، متى سيصبح عدد المزارع حوالي 80 000 مزرعة؟



46 **أحوال جوية** في طبقة من الغلاف الجوّي حيث درجة

الحرارة ثابتة وتساوي -57° ، يُمكن اعتماد الدالة

$$P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$$

الجوي P (بالكيلوباسكال kpa) بدلالة الارتفاع h

(بالكيلومتر) عن سطح البحر. يتراوح الضغط الجوي

في هذه الطبقة بين $2.55 kpa$ و $22.9 kpa$.

أ ما أدنى ارتفاع وأقصى ارتفاع في هذه الطبقة حيث يصح هذا النموذج؟

ب ماذا لو...؟ يبلغ الضغط الجوي عند سطح البحر

$101 kpa$ تقريباً. لو استعملت النموذج أعلاه لتحديد

الضغط الجوي عند سطح البحر، هل تحصل على قيمة

أكبر من قيمته الحقيقية أم أصغر منها؟ أوضح ذلك.

نافذة

على الموسيقى



يُعتبر البيانو آلة موسيقية وترية وطبلية في آن معاً. فهو مزوّد بمطارق صغيرة تضرب على الأوتار.

تحضير للاختبار

47 ما حل المعادلة $b^x = c$ ؟

$$x = \frac{\log c}{\log b} \quad \text{د} \quad x = \frac{\log b}{\log c} \quad \text{ج} \quad x = \frac{\log c}{\log b} \quad \text{ب} \quad x = \frac{\log b}{\log c} \quad \text{ا}$$

48 ما حل المعادلة $\log(x-21) = 2 - \log x$ ؟

$$x = 25 \quad \text{د} \quad x = \frac{21}{2} \quad \text{ج} \quad x = \frac{25}{4} \quad \text{ب} \quad x = 4 \quad \text{ا}$$

49 أي مقدار يتخذ القيمة الكبرى عندما $p = 5$ و $q = 2$ ؟

$$\log p - \log q \quad \text{د} \quad \log p^2 - \log q^3 \quad \text{ج} \quad 2\log q - 3\log p \quad \text{ب} \quad \log 2p - \log 3q \quad \text{ا}$$

تحدّ وتوسّع

50 هل يُمكن حل المعادلة $\log_x x = x$ ؟ أوضّح ذلك.51 حلّ المعادلة $x = 0.125^{\log_2 5}$ جبرياً.52 ما مجموعة الحل للمتباينة $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ ؟ استعمل الحاسبة البيانية لتجد الحل بيانياً.

مراجعة لولبية

53 تصوير كلفة تظهير صورة من قياس $24\text{cm} \times 20\text{cm}$ ، 750 ديناراً، وكلفة تظهير صورة منقياس $15\text{cm} \times 10\text{cm}$ ، 350 ديناراً، مع سيوى 5250 ديناراً. استعمل x لترمز إلى عدد الصورمن القياس الأول، و y إلى عددها من القياس الثاني. (الدرس 2-1)

اكتب متباينة لعدد الصور الذي يُمكن لسيوى أن تُظهره من كل نوع.

ب حلّ المتباينة بيانياً. كم صورة من النوع الثاني يُمكن لسيوى أن تُظهر، علماً بأنها ظُهرت

4 صور من النوع الأول؟

جد محدّد المصفوفة. (الدرس 3-4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{57} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{56} \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{55} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{54}$$

استعمل العمليات المتعكسة لإيجاد الدائّة العكسية. (الدرس 4-2)

$$f(x) = \frac{7x-1}{5} \quad \text{61} \quad f(x) = \frac{x}{3} + 9 \quad \text{60} \quad f(x) = 6(x-2) \quad \text{59} \quad f(x) = 4x+3 \quad \text{58}$$

7-4

النماذج الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Models

من يستعمل هذا الأمر؟

يعرف صافقو الأحجار الكريمة أن قيمة الجواهر من النوعية نفسها ترتبط بكتلتها عبر علاقة أسية. (المثال 2)

الأهداف

يستعمل الدوال الأسية واللوغاريتمية لإيجاد نماذج لدراسة المعطيات. يستعمل النماذج الأسية واللوغاريتمية ليحلل ويصوغ توقعات.

المفردات

Vocabulary

الانحدار الأسّي
Exponential Regression
الانحدار اللوغاريتمي
Logarithm Regression

يُمكن لتحليل المعطيات أن يُظهر نمطًا أو علاقة تتكرر بين كميتين. انظر إلى الجدول أدناه لقيم عائدة إلى الدالة $f(x) = 2(3^x)$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

$\times 3$ $\times 3$ $\times 3$ $\times 3$

لاحظ أن نسبة كل قيمة من قيم y إلى القيمة التي تسبقها، ثابتة. كل قيمة من هذه القيم، باستثناء الأولى، تساوي 3 أضعاف القيمة السابقة. وهكذا، فإن نسبة قيم الدالة المقابلة لقيم x التي تفصل بينها المسافة نفسها، نسبة ثابتة. يمكن تمثيل مثل هذه المعطيات بدالة أسية $f(x) = ab^x$.

تمييز المعطيات الأسية

مثال 1

حدّد إن كانت الدالة f دالة أسية أم لا. إذا كانت أسية، جد النسبة الثابتة.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

الفروق الأولى: +2 +2 +2 +2

الدالة دالة خطية لأن الفروق الأولى متساوية.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	4	8

الفروق الأولى: $+\frac{1}{2}$ +1 +2 +4

النسب: $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

الدالة دالة أسية والنسبة الثابتة هي 2.

تذكّر

تُستعمل الدوال الخطية كنماذج لمعطيات فروقها الأولى ثابتة. كما تُستعمل الدوال التربيعية كنماذج لمعطيات فروقها الثانية ثابتة.

1. حدّد إن كانت الدالة f دالة أسية أم لا. إذا كانت أسية، جد النسبة الثابتة.



x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\sqrt{6}$	4	6	9	13.5

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	2	7	12	17

استعملت في السابق الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج خطي يُمثّل المعطيات الخطّية، أي قمت بعملية **انحدار خطي**. سوف تستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج أُسيّ يُمثّل المعطيات الأسّية.

عندما تتأكد من أن المعطيات أُسيّة، استعمل وظيفة **ExpReg** (Exponential Regression) في الحاسبة البيانية لتجد نموذجاً أُسيّاً لهذه المعطيات. تُسمى عملية إيجاد نموذج أُسيّ لتمثيل مجموعة معطيات عملية **انحدار أُسيّ Exponential Regression**. تقتصر النماذج الأسّية التي تولّدها الحاسبة البيانية على الدوال من النوع $f(x) = ab^x$. وهكذا لا يُمكن تمثيل سحب هذه الدوال في الحاسبة.

تطبيق على صقل المجوهرات

2 مثال

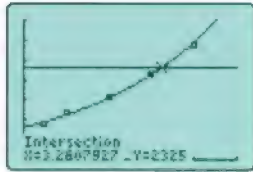
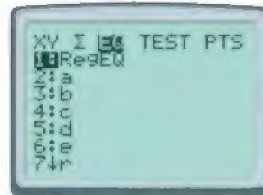
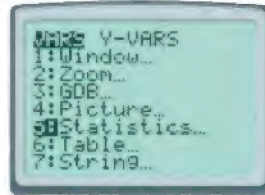
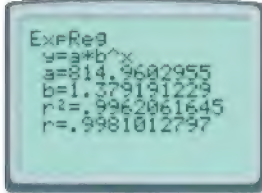
يُبين الجدول المقابل كتل عدد من قطع الماس وقيماً تقريبية لأثمانها. جد نموذجاً أُسيّاً لهذه المعطيات. استعمل النموذج الذي وجدته لتقدّر كتلة ماسة ثمنها 2 325 000 دينار.

الخطوة 1 أدخل المعطيات في لائحتين في الحاسبة. استعمل وظيفة الانحدار الأسّي ExpReg.

قيم الماس	
الكتلة (قيراط)	القيمة دينار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	15 800 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

تعطيك الحاسبة نموذجاً أُسيّاً لهذه المعطيات، هو الدالة الأسّيّة $V(w) = 805\,462.6(1.38)^w$ حيث يرمز V إلى قيمة الماسة، ويرمز w إلى كتلتها مقيسة بالقيراط.

الخطوة 2 مثّل بيانياً معطيات الجدول، وارسم بيان الدالة لتتحقق من أنها تُشكل نموذجاً لهذه المعطيات. لإدخال قاعدة الدالة أمام $Y1$ في شاشة $Y=$ ، اضغط المفتاح **VARs** واختر **Statistics: 5** ثم اضغط **ENTER**. تحرك إلى **EQ** واختر **EQ 1:Reg**.



أدخل 2 325 000 أمام $Y2$ لرسم الدالة $V = 2\,325\,000$. استعمل وظيفة التقاطع للحاسبة. قد تحتاج إلى تعديل بعدي الشاشة لكي تظهر نقطة التقاطع.

كتلة الماسة التي ثمنها 2 325 000 دينار، تقارب 3.29 قيراط تقريباً.

2. استعمل الانحدار الأسّي لإيجاد نموذج لمعطيات الجدول أدناه. متى يصل عدد البكتيريا إلى \$2000

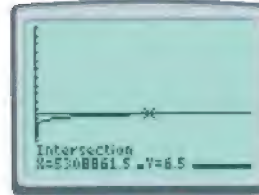


الزمن (min)	0	1	2	3	4	5
عدد البكتيريا	200	248	312	390	489	610

يُمكن تمثيل الكثير من معطيات الواقع بدوال لوغاريتمية. يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد انحدار لوغاريتمي **Logarithmic Regression**.

القوة	TNT (طن)
2.0	
3.0	
4.0	
5.0	

LnReg
y=a+b ln x
a=2.003115892
b=.2904046914
r²=.9999625511
r=.9999812754



تطبيق على الفيزياء

مثال 3

يُبين الجدول المقابل قوة التفجير على مقياس ريختر لكميات معينة من مادة TNT. جد دالة لوغاريتم طبيعي تشكّل نموذجاً لهذه المعطيات. استعمل النموذج الذي وجدته لتقدير كمية متفجرات من مادة TNT يُعادل انفجارها زلزلاً بقوة 6.5 على مقياس ريختر.

أدخل المعطيات في الحاسبة البيانية في لائحتين، ثم استعمل وظيفة الانحدار اللوغاريتمي. اضغط على المفتاح STAT واختر CALC ثم LnReg. 9: الدالة $R(x) = 2 + 0.29 \ln x$ ، حيث R قوة الزلزال على مقياس ريختر و x كمية المتفجرات من مادة TNT بالأطنان، هي نموذج لوغاريتمي لمعطيات الجدول. تُبين قيمة r^2 أن النموذج مناسب لتمثيل معطيات الجدول. استعمل وظيفة التقاطع للحاسبة البيانية لكي تجد x عندما $y = 6.5$. تبلغ كمية المتفجرات من مادة TNT التي يُعادل انفجارها زلزلاً بقوة 6.5 على مقياس ريختر 5.3 ملايين طن تقريباً.

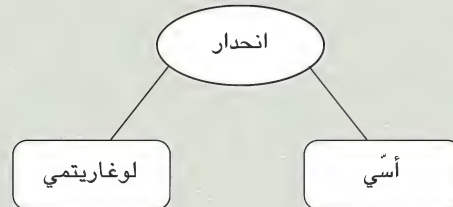
3. استعمل الانحدار اللوغاريتمي لإيجاد دالة تشكّل نموذجاً لمعطيات الجدول. متى تصل السرعة إلى 8.0 متراً في الثانية؟



الدقيقة	7	6	5	4	3	2	1
السرعة (m/s)	5.6	5.3	4.9	4.3	3.5	2.5	0.5

فكر وناقش

1. كيف تعلم إن كان ممكناً تمثيل معطيات بنموذج أسّي على صورة $f(x) = ab^x$ ؟
2. لم لا تكفي معطيات عن نقطتين لتحديد إن كان ممكناً تمثيل المعطيات بنموذج أسّي أو لوغاريتمي.
3. كن منظماً انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. بين الإجراءات والأدوات لإيجاد نموذج أسّي أو نموذج لوغاريتمي.



التمارين

7-4

تمارين موجّهة

- 1 مفردات ؟ ممكن عندما يكون ممكناً تمثيل المعطيات بدالة من النوع $f(x)=ab^x$.
(الانحدار الأسّي أو الانحدار اللوغاريتمي).

حدّد إن كانت f دالة أسّيّة من النوع $f(x) = ab^x$. إذا كانت كذلك، حدّد النسبة الثابتة.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	-1	11	95	683

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	-3	-7	-11

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

- 6 فيزياء يُبيّن الجدول أدناه كم درجة تزيّد حرارة كوب شاي على حرارة الغرفة، عندما يبرد .
جدّ نموذجاً أسياً يمثّل هذه المعطيات. استعمل النموذج لتقدّر كم من الدقائق سيمضي قبل أن
يتدنّى الفرق بين حرارة الكوب وحرارة الغرفة إلى أقل من 4 درجات.

كيف يبرد الشاي					
4	3	2	1	0	الزمن بالدقائق
33	38	43	48	55	درجات الحرارة فوق حرارة الغرفة

- 7 انتساب يُبيّن الجدول أدناه تزايد عدد المنتسبين إلى أحد الأندية الاجتماعية بالأشهر.
جدّ نموذجاً لوغاريتمياً طبيعياً يمثّل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتجد كم شهراً
يلزم لهذا النادي حتى يصل عدد أعضائه إلى 8000.

الانتساب إلى النادي					
150	90	42	18	6	الزمن بالأشهر
7000	6000	5000	4000	3000	عدد المنتسبين

تمارين وحل مسائل

حدّد إن كانت f دالة أسية من النوع $f(x) = ab^x$. إذا كانت كذلك، حدّد النسبة الثابتة.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

8

x	-5	-3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

9

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

10

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-16	-8	-4	-2	-1

11

12 علوم اجتماعية يُبيّن الجدول المقابل تزايد عدد

السائقين في إحدى الدول من سنة 1970 إلى سنة 2000. جد نموذجاً أسياً لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتحديد متى يتجاوز عدد السائقين 120 مليوناً.

تزايد عدد السائقين			
30	20	10	سنوات بعد 1970
35.3	22.5	14.6	العدد (بالملايين)

13 اتصالات يُبيّن الجدول أدناه تطوّر عدد المشتركين في الإنترنت، في إحدى الدول، من سنة 1990

إلى سنة 2000. جد نموذجاً أسياً لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتحديد متى يتجاوز عدد المشتركين في هذه الدولة 100 مليون.

أعداد المشتركين بالإنترنت										
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
23.6	19.6	15.7	11.1	8.7	8.5	9.1	7.3	6.6	5.5	4.4
سنوات بعد 1990										
الأعداد (بالملايين)										

14 بيئة تفيد المعلومات عن طائر الغرنوق المهدّد بالانقراض، أنّ أعدادها آخذة بالتزايد. يُبيّن الجدول

أدناه تزايد هذا العدد على مدى 55 سنة. جد نموذجاً لوغاريتمياً يُمثّل تزايد أعداد هذه الطيور. متى يصل عددها إلى 500؟

أعداد طائر الغرنوق					
185	120	85	40	18	العدد
57	47	40	22	5	سنوات بعد 1940

حدّد إن كانت معطيات الجدول أسية. إذا كانت كذلك، استعمل الانحدار الأسّي لإيجاد نموذج يُمثّلها.

x	-1	0	1	2	3
y	4	2	1	0.5	0.24

16

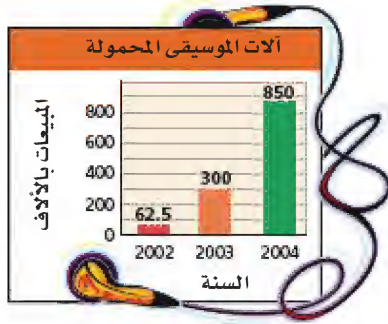
x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

15

17 تفكير ناقد تفيد المعطيات عن أحد أنواع الطيور في أفريقيا أنّ عددها تناقص من أكثر من

نصف مليون سنة 1930 إلى 15 000 اليوم، ما المعطيات الإضافية التي تلزمك لتقرر إن كان هذا التناقص أسياً؟

- 18 بيئة** تُفيد إحدى الدراسات بأن معدل بقاء نوع من البقر على قيد الحياة، في إحدى المناطق الباردة، يتأثر بسمك الثلج في الربيع. فإذا كان سمك الثلج 5000 mm يكون المعدل حوالي 0.9% . وإذا كان السمك 6700 mm يكون المعدل حوالي 0.3% بينما هو 0.17% عندما يكون سمك الثلج 8250 mm. جد دالة أسية لتمثيل هذه المعطيات. استعمل النموذج لتقدير معدل بقاء نوع من البقر على قيد الحياة عندما يكون سمك الثلج 4000 mm .



- 19 تكنولوجيا** يُبين الجدول المقابل تطور مبيعات الآلات المحمولة لسماع الموسيقى خلال العطلة الصيفية. افترض أن مبيع هذه الآلات يتزايد بالوتيرة نفسها. اكتب دالة أسية لتمثيل معطيات الجدول. استعمل النموذج لتقدير المبيعات في السنوات الثلاث التالية.

- 20 اكتب مقولة** أنشئ جدول قيم لدالة أسية مستعملاً القيم 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 للمتغير الحر x . جد الفروق الأولى والثانية والثالثة. اكتب مقولة حول الفروق من الرتبة n مفترضاً أن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الطبيعية.

- 21 اكتب** كيف تعرف أن مجموعة معطيات هي أسية وليست خطية أو تربيعية أو تكعيبية؟
- 22** استعمل معطيات الجدول أدناه.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

- أ** أيهما يمثل معطيات الجدول بشكل أفضل: نموذج أسّي أم نموذج لوغاريتمي؟ أوضح ذلك.
- ب** لو أن الصف الثاني في الجدول السابق تضمن $\log y$ عوضاً عن y ، أي نموذج يمثل معطيات الجدول الجديد بشكل أفضل: نموذج أسّي أم نموذج خطي؟ أوضح ذلك.

تحضير للاختبار

- 23** أي من الحالات التالية يُمكن تمثيلها بدالة أسية؟
- (أ) كلفة ترتفع قيمتها 100 000 دينار شهرياً.
- (ب) مساحة مربع يتزايد طول ضلعه عشرة عشرة.
- (ج) نصف قطر لولب يزداد عرضه بنسبة 10% بعد كل دورة.
- (د) عدد سكان يتضاعف كلما تضاعف الزمن.

- 24** أي من مجموعات الأعداد التالية أسية؟

- (أ) (3,12.5)، (2,2.5)، (1,0.5)، (0,0.1)
- (ب) (3,20)، (2,7)، (1,0)، (0,-1)
- (ج) (3,3.5)، (2,2)، (1,0.5)، (0,-1)
- (د) (3,26)، (2,11)، (1,2)، (0,-1)

25 **جواب مختصر** جد العدد الناقص في الجدول علماً بأن معطياته أسية.

x	0	1	2	3
y	2	3.5		10.71875

تحدّ وتوسّع

26 جد دالة أسية يمر ببياناتها في النقطتين $(2, 48)$ و $(4, 300)$. وضّح خطواتك.

27 **بيئة** تعمل سناريا في أحد المختبرات الكيميائية. تشققت بخاراً ساماً نتيجة عطل في إحدى الآلات. أظهر تحليل دمها بعد 4 ساعات من الحادث وجود مادة التوكسين Toxine السامة بمعدل 0.01006 mg/cm^3 ، وأظهر تحليل آخر بعد ساعتين من التحليل الأول أن نسبة التوكسين صارت 0.00881 mg/cm^3 . افترض أن كمية التوكسين في الدم تتغيّر أسياً بدلالة الزمن.

- أ** جد دالة أسية تمثل المعطيات.
- ب** يهدّد التوكسين صحّة الإنسان إذا زاد معدله على 0.015 mg/cm^3 في الدم. هل كانت كمية التوكسين التي تشققتها سناريا تهدّد صحتها؟
- ج** تستطيع سناريا استئناف عملها عندما يقلّ معدل التوكسين في دمها عن 0.00010 mg/cm^3 . احسب عدد الساعات اللازمة مقرباً إلى أقرب ساعة، لتتمكن من استئناف عملها.

مراجعة لولبية

حلّ (الدروس السابقة)

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1=10$

جد أصفار كل دالة باستعمال التحليل. (الدروس السابقة)

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

حلّ وتحقّق. (الدرس 4-6)

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+5}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

الفصل

4

دليل الدراسة : مراجعة

استعمل المعطيات التالية لحل التمرينين 12 و 13.

تناقص عدد سكان إحدى المدن بنسبة 3% عن عددهم السنة الماضية.

12 اكتب مقداراً يُبين عدد سكان المدينة هذه السنة P_T بدلالة عددهم السنة السابقة P_L .

13 اكتب مقداراً يُبين عدد سكان المدينة السنة الماضية P_L بدلالة عددهم هذه السنة P_T .

14 تسمح الدالة $M = \frac{5}{8}K$ بتحويل المسافات من الكيلومتر إلى الميل على نحو تقريبي. اكتب الدالة العكسية واستعملها لتحويل 25 ميلاً إلى كيلومترات.

15 اكتب المساواة $19^{1.5} = 27$ على الصورة اللوغاريتمية.

16 ما قيمة المقدار $5\log_4 64$

17 ارسم بيان الدالة $f(x) = 0.6^x$ وبيان دالتها العكسية. حدّد مجال الدالة العكسية ومداها.

حوّل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

18 $3^5 = 243$ 19 $1 = 9^0$ 20 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

حوّل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

21 $\log_2 16 = 4$ 22 $\log 10 = 1$

23 $2 = \log_{0.6} 0.36$

احسب قيمة المقدار ذهنياً.

24 $\log_7 49$ 25 $\log_{0.5} 0.25$

26 $\log_{12} \left(\frac{1}{12}\right)$ 27 $\log 0.01$ 28 $\log_2 1$

29 أنشئ جدول قيم للدالة $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ارسم بيان الدالة وبيان دالتها العكسية باستعمال جدول القيم. حدّد مجال الدالة العكسية ومداها.

1 تتناقص كمية نوع من الفيتامينات في الدم بنسبة 15% في الساعة.

أ هل الدالة التي تمثل هذه الحالة دالة نمو أم دالة تراجع؟

ب كانت كمية هذا النوع من الفيتامينات 400 mg. اكتب دالة تمثل الكمية المتبقية منه بعد T ساعة.

ج ارسم بيان هذه الدالة واستعمله لتقدير الكمية المتبقية من هذا الفيتامين بعد 7 ساعات.

اذكر إن كانت كل دالة دالة نمو أو دالة تراجع.

2 $f(x) = 0.5(1.25)^x$

3 $f(x) = 0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x) = 2.5(0.25)^x$

5 $f(x) = 2(1 + 0.25)^x$

استعمل المعطيات التالية لحل التمارين من 6 إلى 9.

ازداد عدد التلاميذ في إحدى المدارس بنسبة 2% سنوياً في السنوات الخمس الأخيرة. بلغ عدد التلاميذ هذه السنة 765 تلميذاً.

6 هل الدالة التي تمثل هذه الحالة دالة نمو أم دالة تراجع؟

7 ارسم بيان هذه الدالة.

8 استعمل بيان الدالة لكي تقدّر عدد تلاميذ المدرسة بعد 5 سنوات.

9 متى يتجاوز عدد تلاميذ المدرسة 1000 تلميذاً؟

10 ارسم بيان الدالة $f(x) = \frac{4}{5} - 3x$. اكتب الدالة العكسية وارسم بيانها.

11 مثلّ بيانياً الدالة الممثلة بالجدول.

x	-1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

ثم مثلّ بيانياً الدالة العكسية، واكتب الجدول الذي يمثلها.

اكتب المقدار اللوغاريتمي على أبسط صورة.

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

جد قيمة المقدار .

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 اليوم، كان مستوى شدة صوت الموسيقى في نادي الشببية أعلى بـ 10 ديسيبل Decibel مما كان عليه في الأمس. يُقاس مستوى شدة صوت الموسيقى L باستعمال الدالة $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ ، حيث يرمز I إلى شدة الصوت مقيسة بالـ W/m^2 ، ويرمز I_0 إلى شدة عتبة السمع. كم ضعفًا من شدة صوت الموسيقى أمس كانت شدته اليوم؟

حلّ المعادلة.

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

حلّ المتباينة.

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 تستعمل العلاقة $A = P(1+r)^n$ لتحديد قيمة حساب

مصريٍّ أودع فيه مبلغ أصلي P بفائدة سنوية معدّلها r بعد n سنة من إيداع المبلغ. أودع هكار 250 000 دينار. متى ستصبح قيمة الحساب 500 000 دينار، علمًا بأن معدّل الفائدة السنوي هو 4%؟

47 اكتب المقدار $e^{\ln(2x+1)}$ على أبسط صورة.

48 أودعت سيران 5 ملايين دينار في حساب بمعدل فائدة سنوي 6%، على أن يتم تذخير الحساب بصورة متواصلة. كم ستكون قيمة الحساب بعد 5 سنوات؟

49 كان عدد طيور الكركي المطوّق 22 طائرًا سنة 1940. ووصل، بنمو أسّي، إلى حوالي 194 سنة 2003.

أ استعمل دالة النمو الأسّي $P(t) = P_0 e^{kt}$ حيث يرمز P_0 إلى العدد الأصلي و $P(t)$ إلى عددها في الزمن t ، لكي تحدّد معدّل النمو k .

ب بكم تقدّر عدد هذه الطيور سنة 2020 إذا استمر تكاثرها بالوتيرة نفسها؟

50 يُبيّن الجدول أدناه تزايد عدد نوع من أشجار التوابل في حقل نموذجي على مدى 6 سنوات. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج لوغاريتمي يُمثّل معطيات الجدول. حدّد السنة التي سيصل فيها عدد هذه الأشجار إلى 70 شجرة.

السنة	1	2	3	4	5	6
العدد	14	30	40	46	53	55

يُبيّن الجدول أدناه تزايد عدد الطيور في سرب من نوع نادر يعيش في موطن معين، عبر السنوات الـ 55 الأخيرة.

السنوات منذ بدء تدوين الأعداد	عدد الطيور
5	18
22	22
40	85
57	185

51 استعمل ExpReg في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج أسّي لمعطيات الجدول.

52 استعمل LnReg في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج لوغاريتمي لمعطيات الجدول.

53 قارن بين قيمتي r^2 العائدتين إلى النموذجين، واستنتج أي النموذجين أدق في تمثيل معطيات الجدول.

الفصل

4

اختبار الفصل

اكتب على أبسط صورة.

17 $\log_4 128 - \log_4 8$

18 $\log_2 12.8 + \log_2 5$

19 $\log_3 243^2$

20 $5^{\log_5 x}$

حل.

21 $3^{x-1} = 729^{\frac{x}{2}}$

22 $5^{1.5-x} \leq 25$

23 $\log_4 (x+48) = 3$

24 $\log(6x^2) - \log 2x = 1$

25 يُمكن استعمال الدالة $y = D(0.95)^x$ نموذجاً

لحساب ما يتبقى في جسم إنسان عادي من فيتامين سائل بعد تناوله.

يرمز D إلى كمية الفيتامين بالمليتر التي تم تناولها.ويرمز y إلى الكمية المتبقية بالمليتر بعد x دقيقة.

تناول أحدهم 15ml من الفيتامين السائل. كم من

الزمن سينقضي لكي تصبح كمية الفيتامين في جسمه

أقل من 5ml ؟

26 عمر النصف للبلوتينيوم 239 هو 24 000

سنة. تربط العلاقة $e^{-kt} = \frac{1}{2}$ عمر النصف t لهذهالمادة مع ثابت التراجع k . كم سيتبقى من 100 g من

هذا البلوتينيوم بعد 5 سنوات؟

27 استعمل الانحدار اللوغاريتمي لإيجاد نموذج لدراسة

عدد التماسيح في مجموعة، انطلاقاً من معطيات

الجدول المقابل، حيث يرمز المتغير y إلى عددالتماسيح، ويرمز المتغير x إلى الزمن بالسنوات.

السنوات	1	2	3
العدد	50	62	78

اذكر إن كانت الدالة دالة نمو أسّي او دالة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

1 $f(x) = 0.4^x$

2 $f(x) = 1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$

3 $f(x) = \frac{7}{8}(1.1)^x$

4 $f(x) = 50(1+0.04)^x$

5 اشترت تارا سيارة بـ 13 500 000 دينار. افترض أن

قيمة هذه السيارة تنخفض بنسبة 15% سنوياً. اكتب

دالة أسية تُشكل نموذجاً لتحديد قيمة السيارة بدلالة

الزمن (بالسنوات). ارسم بيان هذه الدالة. متى

تصبح قيمة هذه السيارة أقل من 3 000 000 دينار؟

ارسم بيان الدالة، ثم اكتب دالتها العكسية،

وارسم بيانها.

6 $f(x) = x - 1.06$

7 $f(x) = \frac{5}{6}x - 1.06$

8 $f(x) = 1.06 - \frac{5}{6}x$

9 $f(x) = \frac{1}{4}\left(1.06 + \frac{5}{6}x\right)$

اكتب على الصورة الأخرى (أسية أو لوغاريتمية).

10 $16^{\frac{1}{4}} = 2$

11 $16^{-0.5} = \frac{1}{4}$

12 $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$

13 $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

استعمل قيم x المعطاة لرسم بيان الدالة، ثم اكتب

الدالة العكسية وارسم بيانها. حدّد مجال الدالة

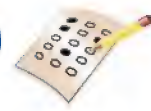
العكسية ومداهها.

14 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x ; x = -1, 0, 2, 4$

15 $f(x) = 2.5^x ; x = -1, 0, 1, 2, 3$

16 $f(x) = 5^{-x} ; x = -1, 0, 1, 2, 3$

اختبار تراكمي



الفصل

4

6 أي مما يلي عامل في $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$ ؟

- أ $4x - 1$ ب $2x + 3$ ج $x + 2$ د $3x - 3$

7 أي دالة مما يلي صفراها -1 و 0 ؟

أ $f(x) = x^2 + x - 1$ ج $f(x) = x^2 + x$

ب $f(x) = x^2 - x$ د $f(x) = -x^2 + x$

8 معامل الارتباط لمجموعتي معطيات هو -0.24 ، بينما

يقطع المستقيم الأفضل تمثيلاً المحور الثاني عند

$y = 10$. أي مما يلي ليس صحيحاً بالضرورة ؟

أ كلما تزايدت قيم مجموعة تناقصت قيم

المجموعة الأخرى.

ب في معادلة المستقيم الأكثر تمثيلاً ، تقل قيم y

المقابلة لقيم x الموجبة عن 10 .

ج يشكّل المستقيم الأفضل تمثيلاً نموذجاً جيداً

للمعطيات.

د ميل المستقيم الأفضل تمثيلاً سالب.

9 أي من القطوع المكافئة التالية رأسه $(-2, -3)$ ؟

أ $y = x^2 + 4x + 1$ ج $y = x^2 - 4x + 1$

ب $y = x^2 + 4x - 1$ د $y = x^2 - 4x - 1$

10 أي مما يلي يساوي $3(x + y)^4$ ؟

أ $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

ب $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$

ج $81x^4 + y^4$

د $3x^4 + 3y^4$

11 ميل المستقيم $y = mx + b$ موجب وتقاطعه العمودي

5. بدأ ميل المستقيم بالتناقص. أي مما يلي خطأ ؟

أ التقاطع الأفقي للمستقيم الجديد أقل من

التقاطع الأفقي للمستقيم الأصلي.

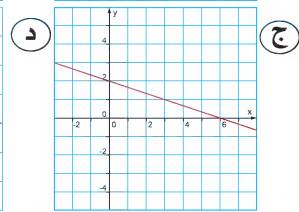
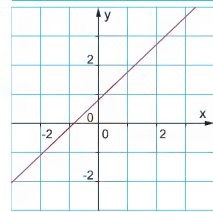
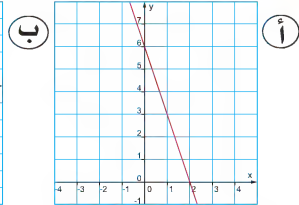
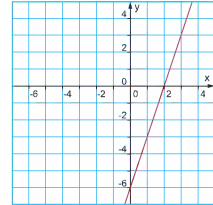
ب يقطع المستقيم الجديد المستقيم الأصلي عند

$(0, 5)$ فقط.

ج ميل المستقيم الجديد أكبر من 0 .

د المستقيم الجديد مواز للمستقيم الأصلي.

1 أي بيان يمثل الدالة العكسية للدالة $f(x) = -3x + 6$ ؟



2 ما الصورة الأبسط للمقدار $5 \log_5 12 - \log_5 4$ ؟

أ $\log_5 48$ ب $\log_5 8$ ج $\log_5 16$ د $\log_5 3$

3 ما قيمة x في المعادلة $5 \log_4 (x - 1)^3 = 9$ ؟

أ 27 ب 64 ج 65 د 81

4 ما الدالة الناتجة من سحب الدالة $f(x) = \ln x$ إلى اليمين، و 7 إلى الأسفل، ثم مط أفقي عامله 6 ؟

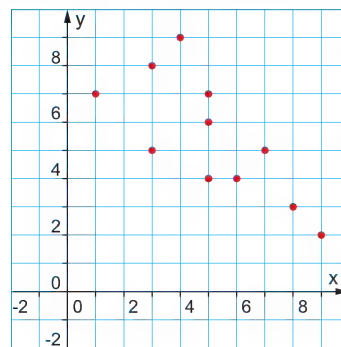
أ $g(x) = 6 \ln x$

ب $g(x) = \ln\left(\frac{x}{6} - 2\right) - 7$

ج $g(x) = 6 \ln(x + 2) + 7$

د $g(x) = 6 \ln\left(\frac{x}{6} + 2\right) + 7$

5 أي مما يلي معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً للنقاط ؟



أ $y = -\frac{10}{11}x + 10$ ج $y = -\frac{11}{10}x + 1$

ب $y = \frac{10}{11}x + 10$ د $y = \frac{11}{10}x + 1$

استعمل المصفوفة $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ لحل التمرينين 12 و 31.

12 ما هو العنصر n_{21} ؟

- أ) 2 ب) -3 ج) 4 د) -6

13 أي مما يلي هو مقلوب المصفوفة N ؟

- أ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
ج) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$

جواب مختصر

14 ما العنصر الناقص في

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \square & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

15 ما قيمة $\log_{6.25} 2.5$ ؟

16 استعمل قانون المعادلة التربيعية لكي تجد الجذر الموجب للدالة $f(x) = x^2 + 2.6x - 7.31$.

17 ما تكرار الجذر 2 في المعادلة

$$x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0$$

18 تم تحويل الدالة الأم $f(x) = x^2$ إلى الدالة

$$g(x) = \frac{1}{2}(5x)^2 - 4$$

19 أي قوة من قوى العدد 2 تساوي 268 435 456 ؟

جواب مختصر

20 تعرض إحدى المدارس للبيع حواسيب وطابعات

قديمة لتأمين مبلغ لا يقل عن 5 200 000 دينار. حددت المدرسة ثمن الحاسوب بـ 500 000 دينار وثمان الطابعة بـ 50 000 دينار. تأمل المدرسة أن تباع 5 حواسيب على الأقل لكل طابعتين.

أ) اكتب نظام متباينات خطية يمثّل المسألة حيث

يمثّل x عدد الحواسيب و y عدد الطابعات.

ب) مثل بياناً نظام المتباينات الذي كتبته.

21 يستعمل الراديوم - 226 (Radium - 226) ، في المعالجات الطبية، عمر النصف لهذه المادة 1620 سنة.

أ) جد قيمة k العائدة إلى الراديوم - 226 .

ب) كم يتبقى من 100g من الراديوم - 226 بعد

3240 سنة؟ قرب الجواب إلى أقرب غرام.

22 لدى زريان 26 شتلة صنوبر، يريد أن يزرعها، على

أبعاد متساوية، حول حديقة مربعة ضلعها 21 متراً.

سيزرع شتلة عند كل زاوية.

أ) ما أكبر عدد ممكن من الشتلات يمكنه أن يزرع؟

ب) كم ستكون المسافة بين شتلتين متجاورتين؟

23 ما باقي قسمة

$$2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 54x + 14 \text{ على } x - 4$$

جواب مفصل

24 بيّن الجدول عدد الساعات التي يقضيها التلميذ

في إنجاز الواجب المنزلي كل مساء، في عدد من

الصفوف.

الصف (x)	4	6	8	10	12
عدد الساعات (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

أ) حدّد إن كانت هذه المعطيات أسية أو

لوغاريتمية.

ب) مثل معطيات الجدول بيانياً.

ج) جد دالة تشكّل نموذجاً لتمثيل هذه المعطيات.

قرب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

د) كم يقضي تلميذ الصف الثالث في الدراسة كل

مساء؟ قرب الجواب إلى أقرب نصف دقيقة.

الفصل

5

خصائص الدوال

Properties of Functions

الفصل الخامس

خصائص الدوال

1-5 الدوال المتفرعة القاعدة

تكنولوجيا رسم بيانات الدوال
المتفرعة القاعدة

2-5 تحويلات الدوال

اختبار جزئي

3-5 العمليات على الدوال

4-5 النماذج الرياضية

نفايات الفضاء

تركت الرحلات الفضائية أكثر من 28 000 قطعة نفايات تسبح في الفضاء. يُمكنك أن تحلل الاتجاه الذي يسلكه تطوُّر أعداد هذه النفايات باستعمال الدوال وبياناتها.

هل أنت مستعد؟

المُفردات ✓

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | | | |
|----------|---|----|---|
| السحب | 1 | أ | الدراسة الإحصائية للعلاقة بين متغيرين. |
| الميل | 2 | ب | المعدل الثابت لتغير دالة خطية. |
| الانحدار | 3 | ج | النسبة بين مجموعتين من القياسات. |
| الارتباط | 4 | د | تحويل هندسي يُحرّك كل النقاط المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. |
| | | هـ | قياس قوة العلاقة الخطية بين متغيرين واتجاهها. |

الربط بين النص والجبر ✓

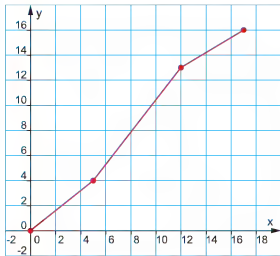
اكتب معادلة تمثل كل حالة.

- | | |
|---|---|
| 5 | كلفة استئجار استديو للتسجيل 30 000 دينار للساعة الأولى، و 20 000 دينار لكل ساعة إضافية. |
| 6 | كمية الماء في الخزّان 30 غالوناً، يُضاف إليها 8 غالونات عن كل دقيقة تعمل فيها المضخة. |

الخطوط البيانية ✓

استعمل الرسم البياني المقابل لتحديد القيمة المطلوبة.

- | | | | | | |
|---|--------|---|---------|---|-------------------------|
| 7 | $f(6)$ | 8 | $f(14)$ | 9 | قيمة x حيث $f(x) = 2$ |
|---|--------|---|---------|---|-------------------------|



- | | |
|----|--|
| 10 | قيمة x حيث $f(x) = 9$ |
| 11 | ميل القطعة المستقيمة بين $x = 6$ و $x = 14$ |
| 12 | ميل القطعة المستقيمة بين $x = 14$ و $x = 18$ |

ضرب ثنائيات الحدود ✓

اضرب، ثم اكتب على أبسط صورة.

- | | | | | | |
|----|-----------------|----|--------------------|----|----------------|
| 13 | $(x-6)(x+4)$ | 14 | $(6-x)(4-x)$ | 15 | $(5x+8)(2x-7)$ |
| 16 | $(x^2-7)(4x+5)$ | 17 | $(3x^2+8)(7x^2+8)$ | 18 | $(x-8)(x+8)$ |

كتابة المقادير الحدودية على أبسط صورة ✓

اكتب على أبسط صورة.

- | | | | |
|----|--------------------------|----|----------------------------|
| 19 | $8(3x^5) - (2x)^3(5x^2)$ | 20 | $5(x+3)^2 - 6(x+3)$ |
| 21 | $3x(4-x^3) - 6x^2(x+4)$ | 22 | $3x^3(x^2+4)^2 - x(x^4-5)$ |

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Composition of functions	تركيب الدوال
One-to-one function	الدالة التباينية
Piecewise function	الدالة المتفرعة القاعدة
Step function	الدالة المدرجة

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل،
تابع الخطوات التالية:

1. من معاني كلمة تركيب أن تضع أشياء معاً. كيف تستعمل كلمة تركيب بهذا المعنى لكي تفهم تركيب الدوال في الرياضيات ؟
2. إذا نظرت إلى درجات السلم من الناحية الجانبية، فهل ما تراه يمثل بيان دالة؟ إلى أي مدى يشبه ما تراه بيان دالة متفرعة القاعدة ؟
3. تذكر تعريف الدالة. ما تصوورك لدالة تباينية ؟ أعط أمثلة من الرياضيات ومن الحياة اليومية على دوال تباينية ودوال غير تباينية.
4. درجات السلم متوازية وغير متصلة ببعضها. بماذا توحى إليك عبارة الدالة المدرجة ؟

في الماضي

درست سابقاً

- الدوال المختلفة وبياناتها ومعادلاتها.
- تحويل الكثير من الدوال.
- إجراء العمليات المختلفة على مقادير من أنواع مختلفة.
- استعمال الدوال الخطية والتربيعية والأسية لإنشاء نماذج رياضية تمثل حالات من الواقع.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- التمثيلات المختلفة للدوال.
- تحويل الدوال المتفرعة القاعدة.
- إجراء العمليات على الدوال.
- إنشاء نماذج رياضية باستعمال دوال مختلفة.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في الصفوف العليا حيث تدرس الحساب التفاضلي والتكاملي والإحصاء.
- في دراسة المواد الأخرى مثل الصحة والفيزياء والكيمياء والاقتصاد.
- خارج المدرسة لإنشاء نماذج لدراسة المعطيات وإجراء توقعات في ميادين مختلفة مثل الرياضة والسفر والتمويل.

الرياضيات

قراءة وكتابة



استراتيجية القراءة: اقرأ المسائل لكي تفهم

اقرأ المسألة مرة لكي تتطلع على المفهوم المتعلق بالمسألة. بعد ذلك، اقرأ المسألة بتأن ودقة لكي تحدد المطلوب. خلال قراءتك، ضع خطوطاً تحت المعلومات - المفاتيح الواردة في نص المسألة. عندما تكون المسألة متعددة الخطوات، قسمها إلى أجزاء، ثم ضع مخططاً للحل.

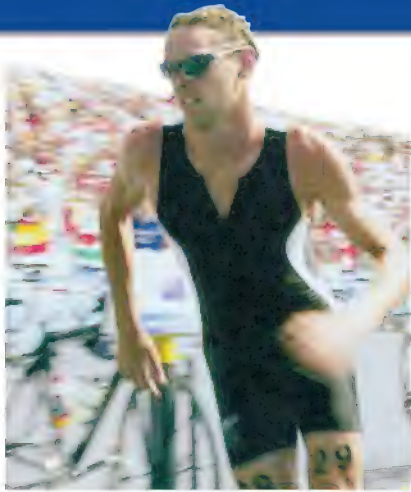
9. **استكشاف الفضاء** تشكل الدالة $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt{x}$ نموذجاً لتقدير بعد الأفق بالكيلومترات، عندما تكون عينا الناظر على ارتفاع x متراً عن سطح الأرض. يُمكنك رسم بيان الدالة التي تُقابلها على المريخ بمط أفقي عامله $\frac{9}{5}$. اكتب دالة بعد الأفق على المريخ واستعملها لحساب بعد الأفق لرائد فضاء على المريخ، ترتفع عيناها 6 أمتار عن سطح الكوكب.

الخطوة	السؤال	الجواب
1	ما المفهوم المتعلق بالمسألة؟	تحويل دالة جذر تربيعي بتغيير معاملاتها.
2	ما الذي تطلب المسألة الإجابة عنه؟	<ul style="list-style-type: none"> إعادة كتابة الدالة لإدخال المعامل الجديد. حساب قيمة الدالة الجديدة عندما يتخذ x قيمة معينة.
3	ما المعلومات - المفاتيح الضرورية لحل المسألة؟	<ul style="list-style-type: none"> تمثل الدالة $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt{x}$ المسافة على الأرض. الدالة على المريخ هي مط دالة الأرض بعامل $\frac{9}{5}$. ترتفع عينا رائد الفضاء عن سطح المريخ 6 أمتار.
4	ما مخططي لحل هذه المسألة المتعددة الخطوات؟	<ul style="list-style-type: none"> كتابة دالة مسافة الأفق على المريخ. حساب قيمتها عندما $x = 6$.

حاول

أنشئ، لكل مسألة، جدولاً بالخطوات كما هو مبين أعلاه.

1. طول مستطيل $x+5$ متراً، وعرضه $x+4$ متراً. اكتب دالة نسبية لتمثيل نسبة مساحة المستطيل إلى محيطه. حدّد مجالاً ومدى معقولين لهذه الدالة.
2. تشكل الدالة $d = \frac{\sqrt{15w}}{2.54\pi}$ نموذجاً لحساب قطر الحبل (بالسنتيمتر) الضروري لرفع w طن. كم طناً تزيد الكتلة التي يُمكن رفعها بحبل قطره 3.5cm على الكتلة التي يُمكن رفعها بحبل قطره 1.5cm؟



الدوال المتفرعة القاعدة Piecewise Functions

1-5

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال دالة متفرعة القاعدة لتمثيل أداء متسابق في السباق الثلاثي. (مثال 4).

الأهداف

يكتب دالة متفرعة القاعدة ويرسم بيانها. يستعمل الدوال المتفرعة القاعدة ليصف حالة من الواقع.

المفردات

Vocabulary

الدالة المتفرعة القاعدة
Piecewise function

الدالة المدرجة
Step function

الدالة المتفرعة القاعدة Piecewise Function هي تجميع عدّة دوال تشكّل فروعها. تتغيّر قاعدة هذه الدالة من قسم إلى قسم آخر في مجالها. مثلاً، يختلف ثمن بطاقة دخول المتحف الوطني باختلاف الأعمار، بحيث يتحدّد ثمن لكل فئة عمرية. وهكذا تكون قيمة الدالة التي تمثل ثمن بطاقة الدخول إلى المتحف الوطني بدلالة العمر، ثابتة على مدى كل قسم من مجالها يمثل فئة عمرية، وتختلف هذه القيم باختلاف تلك الأقسام.

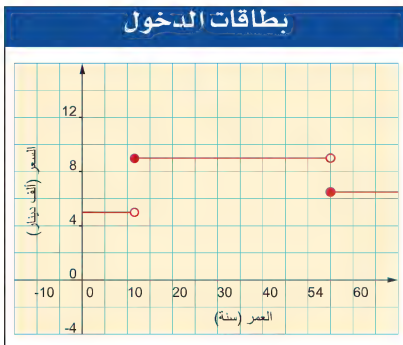
تطبيق في مجال التسلية.

1 مثال

أنشئ جدولاً لتمثيل الرسم البياني المقابل ثم اكتب وصفاً له بالكلمات.

الخطوة 1 أنشئ الجدول.

بما أن أطراف القطع المستقيمة التي تُشكّل الرسم البياني تقسم المجال إلى 3 أقسام، استعمل نقاط الأطراف والنقاط القريبة منها لتحديد هذه الأقسام.



ينقسم مجال الدالة إلى 3 أقسام.

الأعمار التي تقل عن 13. $\leftarrow [0, 13)$

الأعمار لا تقل عن 13 ولا تقل عن 55. $\leftarrow [13, 55)$

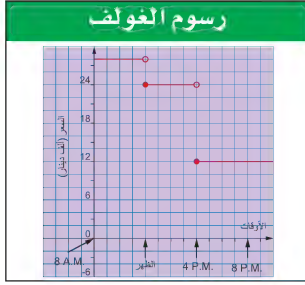
الأعمار التي لا تقل عن 55. $\leftarrow [55, \infty)$

أسعار بطاقات الدخول	
العمر	السعر
من 5 إلى 12	5000
من 13 إلى 54	9000
أكبر من 54	6500

الخطوة 2 اكتب وصفاً بالكلمات.

استعمل أقسام المجال والأسعار وفق الجدول.

يدفع الولد الذي لا تزيد سنّه على 12 سنة 5000 دينار ثمناً لبطاقته، بينما يدفع من لا تقلّ سنّه عن 12 سنة ولا تزيد على 54 سنة، 9000 دينار. ويدفع من لا تقلّ سنّه عن 55 سنة 6500 دينار.



1. أنشئ جدولاً لتمثيل الرسم البياني المقابل، ثم اكتب وصفاً له بالكلمات.



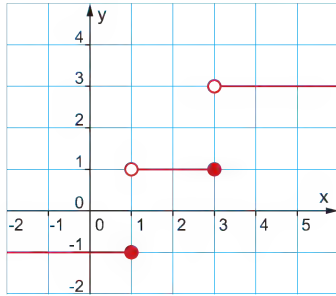
يُمكنك التعبير عن دالة متفرعة القاعدة بالكتابة الدالية. فدالة المثال 1 تكتب على الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 5000 & 0 < x < 13 \\ 9000 & 13 \leq x < 55 \\ 6500 & x \geq 55 \end{cases} \quad \text{فرع}$$

اقرأ ذلك كما يلي: $f(x)$ تساوي 5000 إذا كان x أكبر من 0 وأقل من 13،

9000 إذا كان x لا يقل عن 13 ويقل عن 55، 6500 إذا كان x لا يقل عن 55.

لتحديد قيمة دالة متفرعة القاعدة تقابل قيمة مُدخلة، ابدأ بتحديد فرعها، ثم استعمل قاعدة دالة هذا الفرع.



هناك نوع من الدوال المتفرعة القاعدة تتمتع بخاصية مهمة، وهي أن قيمتها ثابتة في كل قسم من أقسامها.

تسمى كل دالة من هذه الدوال **دالة مدرجة**

Step Function. مثال على دالة مدرجة:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$$

أمعن النظر في بيان هذه الدالة لتفهم سبب تسميتها بالمدرجة.

حساب قيم دالة متفرعة القاعدة

مثال 2

جد لكل دالة متفرعة القاعدة قيمتها التي تقابل $x = -2$ وقيمها التي تقابل $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} -5 & x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 3 \\ 12 & x > 3 \end{cases} \quad \text{أ}$$

$$\text{بما أن } -2 < 0, \text{ استعمل الفرع العائد إلى } x \leq 0 \quad f(-2) = -5$$

$$\text{بما أن } 3 < 5, \text{ استعمل الفرع العائد إلى } x > 3 \quad f(5) = 12$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x < 5 \\ x^2 - 3 & x \geq 5 \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$\text{بما أن } -2 < 5, \text{ فلتستعمل الفرع العائد إلى } x < 5 \quad f(-2) = 3(-2) + 4 = -2$$

$$\text{بما أن } 5 \leq 5, \text{ فلتستعمل الفرع العائد إلى } x \geq 5 \quad f(5) = 5^2 - 3 = 22$$

2. جد لكل دالة متفرعة القاعدة قيمتها التي تقابل $x = -1$ ، وقيمها



التي تقابل $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x < 0 \\ 5x - 2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{أ}$$

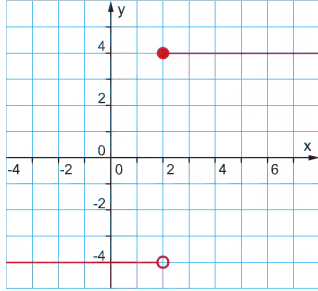
$$f(x) = \begin{cases} 12 & x < -3 \\ 15 & -3 \leq x < 6 \\ 20 & x \geq 6 \end{cases} \quad \text{ب}$$

مثال 3 رسم بيان دالة متفرعة القاعدة

ارسم بيان كل دالة.

$$f(x) = \begin{cases} -4 & x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{أ}$$

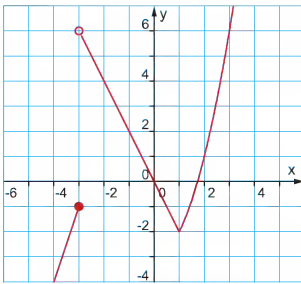
يتألف بيان الدالة من جزئين كل منهما نصف مستقيم. بما أن المستقيم $x=2$ يقسم مجال الدالة إلى قسمين، فاحسب قيمة الدالة عند هذه القيمة باستعمال فرعي قاعدتها. بما أن $f(x) = -4$ إذا كان $x < 2$ ، ف لترسم النقطة $(2, -4)$ كدائرة صغيرة مفرغة، ثم ارسم انطلاً منها نصف مستقيم أفقياً نحو اليسار. وبما أن $f(x) = 4$ إذا كان $x \geq 2$ ، ف لترسم النقطة $(2, 4)$ كدائرة صغيرة ممتلئة، وارسم انطلاً منها نصف مستقيم أفقياً إلى اليمين.



x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

$$g(x) = \begin{cases} 3x+8 & x \leq -3 \\ -2x & -3 < x < 1 \\ x^2-3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ب}$$

تتألف الدالة من فرعين خطيين ومن فرع تربيعي. ينقسم مجال الدالة عند $x = -3$ و $x = 1$. استعمل جدول قيم لرسم بيان كل فرع.



أضف دائرة ممتلئة عند $(-3, -1)$ ودائرة مفرغة عند $(-3, 6)$ ، بحيث يُحدّد البيان بوضوح قيمة الدالة عند $x = -3$. لا حاجة لوضع دائرة عند $(1, -2)$ لأنّ بياننا الفرعين يلتقيان عند هذه النقطة.

3. ارسم بيان الدالة.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases} \quad \text{أ}$$



لاحظ أن الدالة المتفرعة القاعدة ليست بالضرورة دالة متصلة، مما يعني أن بيانها قد يتضمن نقاط انقطاع. لكي تكتب قاعدة لدالة متفرعة القاعدة حدّ أولاً أين ينقسم مجال الدالة، ثم اكتب قاعدة لكل قسم. بعد ذلك جُمع القواعد في كتابة دالية.

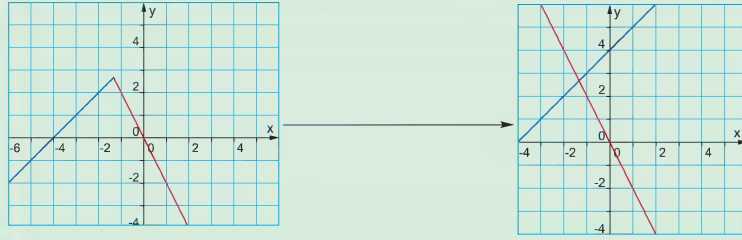


رسم بيانات الدوال المتفرعة القاعدة

من طالب إلى طالب

عندما أرسم بيان دالة متفرعة القاعدة، أرسم بيان كل فرع كما لو كان دالة مستقلة. بعد ذلك، أمحو جزء البيان العائد إلى قيم x التي تقع خارج القسم.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & x < -2 \\ -2x & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{مثال}$$



تطبيق رياضي

مثال 4

اشترك آلان في سباق ثلاثي طوله 153 km. سبح 3 km في ساعة وقطع 120 km راكباً دراجته في 4 ساعات، ثم ركض 30 km في 3 ساعات. أنشئ رسماً بيانياً يبين ما قطعه آلان بدلالة الزمن، ثم اكتب دالة متفرعة القاعدة لهذا البيان.

أداء آلان في السباق الثلاثي			
المرحلة	الزمن	المسافة	السرعة
سباحة	1	3	3
بالدراجة	4	120	30
ركض	3	30	10

الخطوة 1 أنشئ جدولاً يُخصّص المعطيات.

استعمل العلاقة بين السرعة والزمن والمسافة لتحديد معدل سرعة آلان في كل مرحلة من السباق.

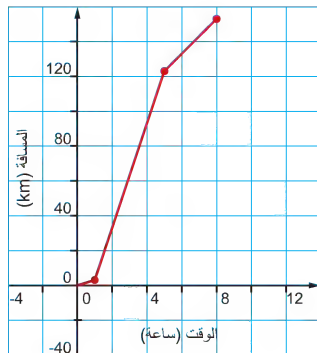
الخطوة 2 بما أن الزمن هو المتغير الحر، فلتحدّد أين

ينقسم مجال الدالة باستعمال معطيات الزمن:

سباحة: $0 \leq t \leq 1$ سبح ساعة واحدة.

بالدراجة: $1 < t \leq 5$ ركب الدراجة 4 ساعات.

ركضاً: $5 < t \leq 8$ ركض 3 ساعات.



الخطوة 3 أنشئ الرسم البياني.

بعد ساعة، كان آلان قد قطع 3 km. بلغ ما قطعه

حتى نهاية المرحلة الثانية، (أي بعد 5 ساعات)،

123 km. أخيراً أكمل الكيلومترات الـ 153 km في 8

ساعات.

انتبه!

يُمكن كتابة العلاقة $d = vt$ على صورة $v = \frac{d}{t}$ لإيجاد معدل السرعة.

الخطوة 4 اكتب دالة خطية لكل فرع.
استعمل صورة الميل - النقطة.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

سياحة: $d = 3t$. استعمل $m = 3$ والنقطة $(0, 0)$

بالدراجة: $d = 30t - 27$. استعمل $m = 30$ والنقطة $(5, 123)$

ركضاً: $d = 10t + 73$. استعمل $m = 10$ والنقطة $(8, 153)$

$$d(t) = \begin{cases} 3t & 0 \leq t \leq 1 \\ 30t - 27 & 1 < t \leq 5 \\ 10t + 73 & 5 < t \leq 8 \end{cases}$$

الكتابة الدالية لهذه الدالة هي:

4. يعمل ريباز في أحد مطاعم العاصمة. يتقاضى 8 000 دينار عن كل ساعة يعمل فيها ما دام عدد ساعاته الأسبوعية لا يتجاوز 40 ساعة. ويتقاضى 12 000 دينار عن كل ساعة يعمل فيها زيادة على الساعات الأربعين. أنشئ رسماً بيانياً يمثل ما يتقاضاه سرجون بدلالة عدد الساعات التي يعمل فيها خلال الأسبوع، علماً بأنه لا يستطيع العمل أكثر من 60 ساعة في الأسبوع. اكتب دالة متفرعة القاعدة لهذا البيان.



فكر وناقش

- أوضح إن كان ممكناً الحصول على دالة متفرعة القاعدة قيمها ثابتة في كل فرع، ولا ينقطع بيانها.
- كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار وصفاً لمجال كل دالة ومداها، ثم أعط مثلاً عليها.



الدالة	المجال	المدى	المثال
متفرعة القاعدة			
متدرجة			

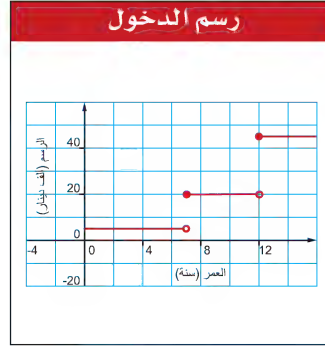
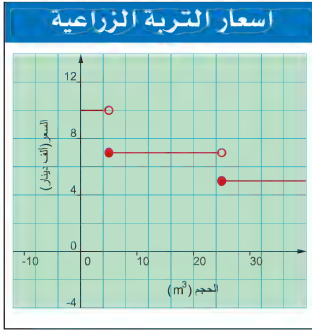
التمارين

1-5

تمارين موجّهة

1 أوضّح العلاقة بين الدالّة المتدرّجة والدالّة المتفرّعة القاعدة.

1 أنشئ جدولاً لكل رسم بياني ثم اكتب وصفاً له بالكلمات.



2 انظر المثال 2 احسب قيمة الدالّة عند $x = -6$ و $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} -8 & x \leq -5 \\ 0 & -5 < x < 6 \\ 5 & x \geq 5 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 5x - 9 & x < 2 \\ 4 - x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

3 انظر المثال 3 ارسم بيان الدالّة.

$$f(x) = \begin{cases} 7 & x < -2 \\ -2 & x \geq -2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 8 & x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x & x > 4 \end{cases}$$

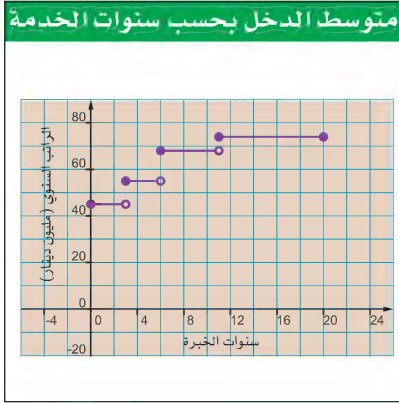
4 انظر المثال 4 كلفة استئجار مركب صغير 20 000 دينار في الساعة للساعات الأربع الأولى، و 3 000 دينار لكل ساعة إضافية. أنشئ رسماً بيانياً يُمثّل كلفة استئجار القارب لعدد ساعات لا يزيد على 8 ساعات.

تمارين وحل مسائل

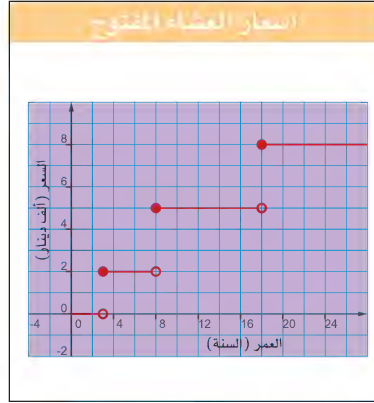
أنشئ جدولاً لكل رسم بياني، ثم اكتب وصفاً له بالكلمات.

تمارين حرة

أنظر	حل
المثال	التمارين
1	10-9
2	12-11
3	14-13
4	15



10



9

احسب قيمة الدالة عند $x = -2$ و $x = 2$ و $x = 6$.

$$f(x) = \begin{cases} 12 - 9x & x \leq 0 \\ x^2 + 3x & 0 < x < 3 \\ 4^x & x \geq 3 \end{cases} \quad 12$$

$$f(x) = \begin{cases} 9x - 2 & x < -3 \\ x^2 - 3 & -3 \leq x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases} \quad 11$$

ارسم بيان الدالة.

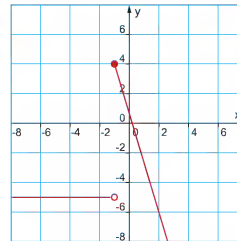
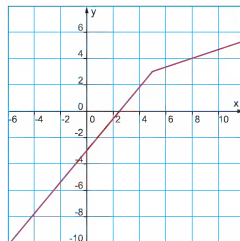
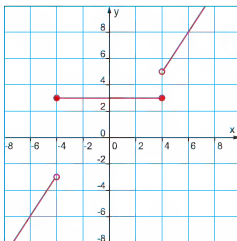
$$g(x) = \begin{cases} -2x - 5 & x < -2 \\ x^2 - 3 & x \geq -2 \end{cases} \quad 14$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 1 & x < 4 \\ \frac{3}{4}x - 2 & x \geq 4 \end{cases} \quad 13$$

أسعار جز الكباش	
السعر (دينار)	الكتلة (kg)
30 000	15 أو أقل
50 000	بين 15 و 50
75 000	50 أو أكثر

15 تتغير كلفة جز صوف الكباش بتغير كتلته. يبين الجدول المقابل أسعار جز الكباش التي يتقاضاها هشار. أنشئ رسماً بيانياً يُمثل كلفة جز الكباش التي لا تزيد كتلتها على 60 kg. اكتب دالة متفرعة القاعدة تُعبّر عن ذلك.

اكتب دالة متفرعة القاعدة لكل رسم بياني.



19 **مواقف السيارات** يتقاضى موقف سيارات في العاصمة 6 000 دينار عن كل ساعة مقابل ركن السيارة خلال الساعات الأربع الأولى، ويتقاضى عن كل ساعة إضافية 3 000 دينار. اكتب دالة متفرعة القاعدة لحساب كلفة ركن سيارة بدلالة عدد ساعات ركنها في الموقف.



20 سفر سافر هلو وتوانا بالسيارة. تُبيّن الصورة
المقابلة السرعة المتوسطة لسيارتهما في كل مرحلة.
سارا مدة 30 دقيقة في المدينة بسرعة متوسطها
45 km / h، ثم مدة 3 ساعات على الطريق السريع
بسرعة متوسطها 90 km / h، ثم 30 دقيقة بسرعة
متوسطها 60 km / h.

أ اكتب دالة متفرعة القاعدة تمثل ما قطعه
هلو وتوانا بدلالة الزمن (بالساعة).

ب ارسم بيان هذه الدالة.

ج **ماذا لو ... ؟** كم ستكون مدة الرحلة لو أن السرعة المتوسطة للسيارة كانت في المرحلة الثانية
75 km / h، عوضاً عن 90 km / h.

اكتب كل دالة على صورة دالة متفرعة القاعدة.

$$h(x) = 2|x| - 4 \quad \mathbf{23}$$

$$g(x) = |x - 4| \quad \mathbf{22}$$

$$f(x) = |x| \quad \mathbf{21}$$

24 خدمات تتقاضى مؤسسة هيوا لتوصيل الطرود 11 000 دينار عن كل طرد لا تزيد كتلته على 2 kg،
وتضيف 3 000 دينار إلى هذا السعر عن كل كيلوغرام إضافي. أنشئ الرسم البياني لكلفة توصيل طرد لا
تزيد كتلته على 8 kg. اكتب دالة متفرعة القاعدة تعبّر عن هذا الواقع.

ارسم بيان الدالة.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \leq 0 \\ 2^x - 4 & 0 < x \leq 3 \\ 2x - 2 & x > 3 \end{cases} \quad \mathbf{25}$$

$$g(x) = \begin{cases} -3 & x \leq 0 \\ 3^x - 4 & x > 0 \end{cases} \quad \mathbf{26}$$

جد مجال الدالة ومداها.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - 2 & x \leq -2 \\ -x - 5 & x > -2 \end{cases} \quad \mathbf{27}$$

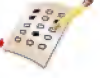
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x < 4 \\ 3x - 7 & x \geq 4 \end{cases} \quad \mathbf{28}$$

29 تفكير ناقد لماذا تمثل دالة متفرعة القاعدة أفضل تمثيل ارتفاع مصعد كهربائي عن الأرض بعد t ثانية من إقلاعه؟ هل يُمكن لها أن تكون دالة متدرّجة؟

30 اكتب ما السبب الذي يجعل استعمال الدوال المتفرعة القاعدة أفضل لتمثيل حالات من الحياة اليومية؟ ضمّن جوابك مثالين على الأقل.



تحضير للاختبار



31 تتقاضى إحدى وكالات تأجير السيارات 15 000 دينار في اليوم إذا لم يتجاوز عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة 200 km. وإذا قطعت السيارة أكثر من 200 km يترتب على المستأجر دفع 50 ديناراً عن كل كيلومتر إضافي. أي من الدوال أدناه تمثل كلفة استئجار السيارة بدلالة عدد الكيلومترات التي تقطعها في اليوم؟

$$f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000 + 50(x - 200) & x > 200 \end{cases} \quad \text{ج} \quad f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 50x & x > 200 \end{cases} \quad \text{أ}$$

$$f(x) = \begin{cases} 15\,000 & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000 + 50x & x > 200 \end{cases} \quad \text{د} \quad f(x) = \begin{cases} 15\,000x & 0 \leq x \leq 200 \\ 15\,000x & x > 200 \end{cases} \quad \text{ب}$$

32 أي من الدوال التالية دالة متصلة؟

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 2x & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ج} \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{أ}$$

$$\ell(x) = \begin{cases} 3x + 4 & x \leq -1 \\ 3^x + 4 & x > -1 \end{cases} \quad \text{د} \quad g(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 3 \\ 2x + 5 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 5x & x < -5 \\ 3 - x^3 & -5 \leq x < -2 \\ 5 - x^2 & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{ج د } f(-2) \text{ حيث} \quad \text{33}$$

11 د

9 ج

1 ب

-5 أ

تحدّ وتوسّع

دالة الصحيح الأعلى هي الدالة $f(x) = [x]$ حيث يرمز $[x]$ إلى أكبر عدد صحيح لا يزيد على x . تستعمل الحاسبات البيانية الرمز $\text{Int}(x)$ للدلالة على هذه الدالة. إذا كان ثمن علبة العصير 750 ديناراً، فإن الدالة $f(x) = \text{Int}\left(\frac{x}{750}\right)$ تُعطيك عدد علب العصير التي يُمكنك شراؤها بـ x دينار.

35 اكتب دالة لحساب عدد علب البطاطا المقلية التي يُمكنك شراؤها بـ x ديناراً علماً بأن ثمن العلبة 650 ديناراً. استعمل هذه الدالة لتحديد عدد علب البطاطا المقلية التي يُمكنك شراؤها بعشرة آلاف دينار.

دالة الصحيح الأدنى هي الدالة $f(x)=[x]$ حيث يرمز $[x]$ إلى أصغر عدد صحيح لا يقل عن x .
مثلاً: $f(2.9)=[2.9]=3$.

35 يتقاضى موقف سيارات 4 000 دينار مقابل ركن السيارة مدة لا تتجاوز الساعة الواحدة. إذا تخطت مدة الركن الساعة، يتقاضى الموقف 1500 دينار عن كل ساعة إضافية، أو كسر ساعة إضافية. اكتب دالة لتمثيل كلفة ركن السيارة بدلالة الزمن t (بالساعة)، واستعمل هذه الدالة لحساب كلفة ركن السيارة 5 ساعات و 23 دقيقة.

مراجعة لولبية

هندسة 36 هناك علاقة خطية تربط بين عدد أضلاع مضلع منتظم ومجموع قياسات زواياه الداخلية، كما يُبين ذلك الجدول أدناه. اكتب دالة تُعبر عن هذه العلاقة. (الدرس 1 - 2)

عدد الأضلاع	3	4	5	6	8
مجموع قياسات الزوايا الداخلية بالدرجة	180	360	540	720	1080

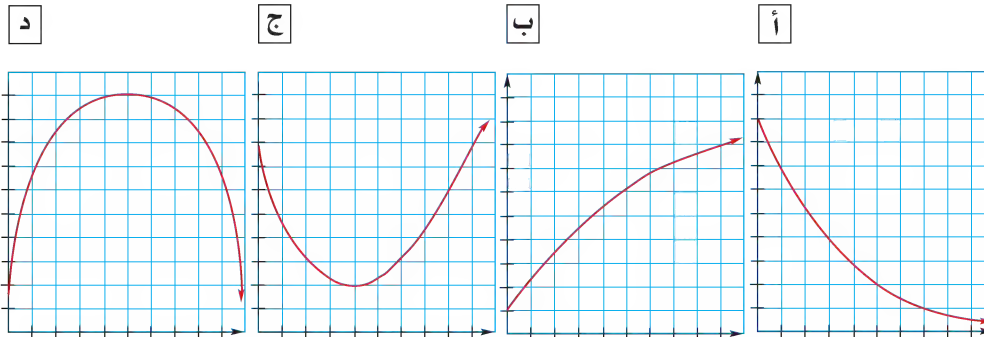
حدّد مقاربات كل دالة ومجالها ومداها. (الصفوف السابقة)

39 $f(x) = \frac{5}{x-3} + 1$

38 $f(x) = \frac{3}{x+2} + 1$

37 $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

حدّد لكل حالة، الرسم البياني المناسب للتعبير عنها. (الدرس 5 - 1)



40 طرحت شركة أحد منتجاتها في السوق من دون أن تُنظّم دعاية له، فانخفضت أرباحها! ثم عادت وأطلقت حملة دعائية للمنتج فارتفعت أرباحها.

41 تنخفض قيمة الحاسوب مع الزمن.

42 تنخفض أرباح المثلجات في الشتاء، وترتفع في الربيع والخريف، وترتفع كثيراً في الصيف.

43 ترتفع درجات الحرارة باطراد من الساعة 12:00 ب. ظ. حتى 5:00 ب. ظ.

استكشاف الفروق والنسب



تذكّر أنّ ثبات الفروق أو النسب يساعدك على تحديد نوع الدالة التي ستستعملها لتمثيل مجموعة معطيات. يُمكنك استعمال برنامج EXCEL الحاسوبي لحساب الفروق والنسب بسرعة.

استعمل معطيات الجدول المقابل. استعمل برنامج EXCEL لحساب الفروق الأولى والفروق الثانية والنسب. حدّد الثابت منها إن وجد.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

ادخل أولاً عناوين الصفوف كما هو مبيّن. لا تنس أن الفروق بين قيم x يجب أن تكون متساوية.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية							
5	النسب							

1 احسب الفروق. أدخل القاعدة $C2 - B2 =$ في الخلية C3 لحساب الفرق بين القيمتين الأولى من قيم y . انسخ محتوى C3 إلى الخلايا من D3 إلى H3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	النسب							

2 احسب الفروق الثانية. أدخل القاعدة $D3 - C3 =$ في الخلية D4 لحساب أول الفروق الثانية. انسخ محتوى D4 إلى الخلايا من E4 إلى H4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	الفروق الأولى		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	الفروق الثانية			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	النسب		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

3 احسب النسب. أدخل القاعدة $C2 / B2 =$ في الخلية C5 لحساب نسبة القيمتين الأولى من قيم y . انسخ محتوى C5 إلى الخلايا من D5 إلى H5. بيّن ما سبق أن الفروق الثانية ثابتة.

حاول

استعمل، لكل مجموعة معطيات، برنامج EXCEL لحساب الفروق الأولى والفروق الثانية والنسب. حدّد الثابت منها إن وجد.

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

x	2	4	6	8	10
y	-20	124	364	700	1132

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	-9	15	57	117	195

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

5 تفكير ناقّد أي نوع من الدوال يبدو الأنسب لتمثيل معطيات التمرين 4؟ برّر جوابك.



«أعتذر عن تأخري في دفع القسط، ولكنني أنتظر تحويلاً»

تحويلات الدوال

Transforming Functions

2-5

الأهداف

يُحوّل الدوال.
يتعرّف تحويل دالة.

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال تحويلات الدوال لوصف التغيرات التي تطرأ على رسوم التسجيل في الجامعة. (المثال 4).

تعلّمت في السابق كيف تحوّل دوالاً من أنواع مختلفة. يُمكنك تحويل دالة متفرّعة القاعدة بتحويل كل فرع من فروعها. يُلخّص الجدول أدناه القواعد التي تحكم تحويل الدوال.

تحويلات الدالة $f(x)$	
سحب عمودي	سحب أفقي
$f(x) \rightarrow f(x) + k$ إلى أعلى إذا $k > 0$ إلى أسفل إذا $k < 0$	$f(x) \rightarrow f(x - h)$ إلى اليمين إذا $h > 0$ إلى اليسار إذا $h < 0$
انعكاس حول المحور الثاني	انعكاس حول المحور الأول
$f(x) \rightarrow f(-x)$	$f(x) \rightarrow -f(x)$
مط أو كبس عمودي	مط أو كبس أفقي
$f(x) \rightarrow af(x)$ مط إذا $a > 1$ كبس إذا $0 < a < 1$	$f(x) \rightarrow f\left(\frac{1}{b}x\right)$ مط إذا $b > 1$ كبس إذا $0 < b < 1$

اعلم
احفظ

تحويل الدوال المتفرّعة القاعدة

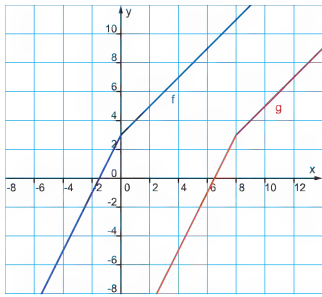
اكتب الدالة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = \begin{cases} x+3 & x > 0 \\ 2x+3 & x \leq 0 \end{cases}$ بسحب إلى اليمين 4 وحدات.

يجب سحب كل فرع من فرعي الدالة إلى اليمين 4 وحدات. عوّض عن x بالمقدار $x-4$ في قاعدة الدالة $f(x)$ ، ثم اكتب القاعدة على أبسط صورة.

$$g(x) = f(x-4) = \begin{cases} (x-4)+3 & x-4 > 0 \\ 2(x-4)+3 & x-4 \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & x > 4 \\ 2x-5 & x \leq 4 \end{cases}$$

تحقّق ارسم بيان الدالتين في المستوي الإحداثي نفسه لتدعم جوابك.



مثال 1

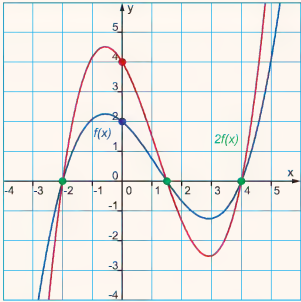
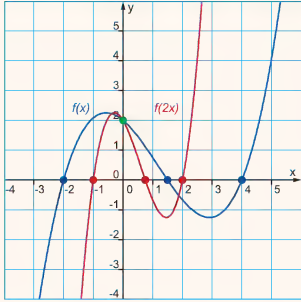
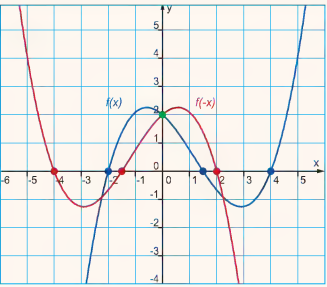
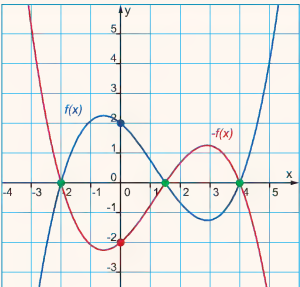
انتبه!

يُغيّر السحب الأفقي قواعد الدالة المتفرّعة القاعدة وفترات مجالها، بينما لا يغيّر السحب العمودي إلا قواعدها.

1. اكتب الدالة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x-3 & x > 0 \end{cases}$ بمط أفقي عامله 2.



عند تحويل دالة قد تتغير تقاطعاتها مع محوري الإحداثيات وقد لا تتغير. عندما تتعرف التحويل، تستطيع أن تحدد تقاطعات الدالة - الصورة مما يساعدك على رسم بيانها.

تأثير التحويلات على التقاطعات الأفقية والعمودية للدالة $f(x)$	
مط أو كبس عمودي عامله b	مط أو كبس أفقي عامله a
 <p>لا تتغير التقاطعات الأفقية. تُضرب التقاطعات العمودية في a.</p>	 <p>تُضرب التقاطعات الأفقية في b. لا تتغير التقاطعات العمودية.</p>
انعكاس حول المحور الثاني	انعكاس حول المحور الأول
 <p>تستبدل بالتقاطعات الأفقية معكوساتها. لا تتغير التقاطعات العمودية.</p>	 <p>لا تتغير التقاطعات الأفقية. تستبدل بالتقاطعات العمودية معكوساتها.</p>



تحديد التقاطعات

مثال 2

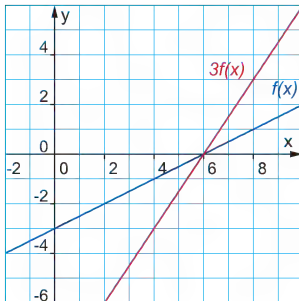
حدد تقاطعات الدالة $f(x)$ ، ثم حدد تقاطعات الدالة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

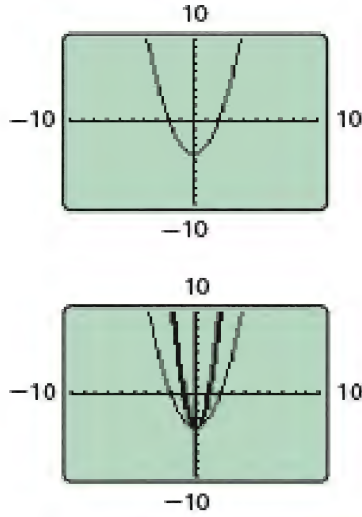
$$g(x) = 3f(x); f(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

حدد تقاطعات الدالة الأصلية.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2}(0) - 3 = -3 & 0 &= \frac{1}{2}x - 3 \\ f(0) &= -3 & x &= 6 \end{aligned}$$

التقاطع العمودي -3 والتقاطع الأفقي 6. بما أن $g(x)$ مط عمودي للدالة $f(x)$ بعامل 3 فإن التقاطع الأفقي لا يتبدل، بينما يُضرب التقاطع العمودي في عامل المط 3. التقاطع العمودي للدالة $g(x)$ هو -9.





ب $g(x) = f(2x)$: $f(x) = x^2 - 4$

تُبيّن الحاسبة البيانية أنّ التقاطع العمودي للدالة هو -4 وأنّها تقاطعين أفقيين هما -2 و 2. لاحظ أنّ الدالة $g(x)$ هي نتيجة كبس أفقي للدالة $f(x)$ عامله $\frac{1}{2}$. ينتج عن ذلك أنّ التقاطع العمودي لا يتغيّر، وأنّ كل تقاطع أفقي يُضرب في $\frac{1}{2}$. التقاطعان الأفقيان للدالة $g(x)$ هما -1 و 1. تحقّق أنشئ على الشاشة نفسها بيان الدالة $g(x)$ لتدعم جوابك.

2. حدّد تقاطعات الدالة $f(x)$ ، ثم حدّد تقاطعات الدالة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

أ $g(x) = -f(x)$ $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ **ب** $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ $f(x) = x^2 - 9$

تركيب التحويلات

مثال 3

ارسم بيان الدالة $g(x) = f\left(\frac{3}{2}x\right) + 4$ حيث $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6$

الخطوة 1 ارسم بيان الدالة $f(x)$. يقطع بيان الدالة $f(x)$ المحور الثاني عند (0, 6) والمحور الأول عند (-3, 0) و (3, 0).

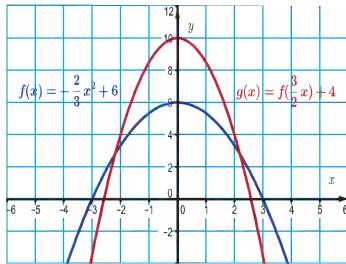
الخطوة 2 تفحص كل تحويل على حدة.

التحويل الأول هو كبس أفقي عامله $\frac{2}{3}$. بعد هذا

التحويل لا يتغيّر التقاطع العمودي ويبقى 6، بينما يصبح التقاطعان الأفقيان -2 و 2.

التحويل الثاني هو سحب إلى أعلى 4 وحدات،

استعمل الجدول لتبيان سحب كل من النقاط الثلاث.



(0, 6)	(2, 0)	(-2, 0)	نقاط التقاطع
(0, 10)	(2, 4)	(-2, 4)	صورها بالسحب

تحقّق ارسم بيان الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في المستوي الإحداثي نفسه.

3. ارسم بيان الدالة $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ حيث $f(x) = 2^x - 4$.



مثال 4

تطبيق على حل المسائل

تستعمل إدارة إحدى الجامعات دالة متفرعة القاعدة لتحديد رسوم تسجيل الطلاب بدلالة عدد ساعات المقررات التي يتسجلون فيها.

$$f(x) = \begin{cases} 110\,000x & 0 < x < 12 \\ 1\,320\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 150\,000(x-18) + 1\,320\,000 & x > 18 \end{cases} \quad \text{هذه الدالة هي}$$

قررت الإدارة زيادة الرسوم 10% لفصل الخريف، كما قررت أن تضيف رسم أعمال إدارية قدره 75 000 دينار على كل تسجيل. اكتب الدالة التي تسمح بحساب رسوم التسجيل في فصل الخريف بدلالة x .



1- افهم المسألة

تتحدد الدالة الجديدة بتحويل الدالة الأصلية بتحويلين: زيادة رسوم التسجيل 10%، ثم إضافة رسم الأعمال الإدارية وقدره 75 000 دينار. يمكن ترجمة رفع الرسوم 10% بضرب كل فرع من فروع الدالة في 1.1 أو 110% مما يعني إخضاع الدالة لمط عمودي عامله 1.1، بينما تُترجم إضافة رسم الأعمال الإدارية بسحب إلى أعلى 75 000 وحدة.

2- خطّط

أنجز التحويل الأول، ثم التحويل الثاني، واكتب الدالة الناتجة.

3- حلّ

ابدأ بإيجاد نموذج الرسوم بعد زيادتها 10%.

$$g(x) = (1.1)f(x) = \begin{cases} (1.1)110\,000x & 0 < x < 12 \\ (1.1)1\,320\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ (1.1)[150\,000(x-18) + 1\,320\,000] & x > 18 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اضرب كل فرع} \\ \text{في 1.1} \end{array}$$

$$= \begin{cases} 121\,000x & 0 < x < 12 \\ 1\,452\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,452\,000 & x > 18 \end{cases}$$

جد الآن نموذج الرسوم بعد زيادة رسم الأعمال الإدارية وقدره 75 000 دينار.

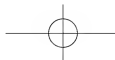
$$h(x) = g(x) + 75\,000 = \begin{cases} 121\,000x + 75\,000 & 0 < x < 12 \\ 1\,452\,000 + 75\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,452\,000 + 75\,000 & x > 18 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 121\,000x + 75\,000 & 0 < x < 12 \\ 1\,527\,000 & 12 \leq x \leq 18 \\ 165\,000(x-18) + 1\,527\,000 & x > 18 \end{cases}$$

4- تحقق

تحقق من جوابك باستعمال بعض القيم. كانت الرسوم الأصلية لـ 20 ساعة، 1 620 000 دينار. بزيادة هذه الرسوم 10% وإضافة 75 000 دينار، أصبح هذه الرسوم 1 857 000. جد قيم الدالة الجديدة عند $x = 20$.

$$h(20) = 165\,000(20-18) + 1\,527\,000 = 330\,000 + 1\,527\,000 = 1\,857\,000 \quad \checkmark$$



4. يتقاضى متحف العلوم رسم دخول 5 000 دينار عن الولد الذي يقل عمره عن 12 سنة، و 7500 دينار عن كل شخص لا يقل عمره عن 12 سنة. قرّرت إدارة المتحف رفع أسعار الدخول 20% وإضافة 500 دينار على كل بطاقة، وذلك لتسهيل شرائها بواسطة آلة. اكتب دالة تشكّل نموذجاً للكلفة الجديدة للبطاقة بدلالة عمر الزائر.



فكر وناقش

1. ما التحويلات التي لا تغيّر التقاطع العمودي؟
2. أوضح السبب الذي يجعل النقطة $(0, 0)$ لا تتغيّر تحت تأثير أي مط وأي كبس.
3. كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اذكر تأثير كل تحويل على التقاطعات.

التحويل	التقاطع الأفقي	التقاطع العمودي
مط أو كبس أفقي بعامل b		
مط أو كبس عمودي بعامل a		
انعكاس حول المحور الأول		
انعكاس حول المحور الثاني		



التمارين

2-5

تمارين موجّهة

- 1 انظر المثال** اكتب قاعدة الدالة $g(x)$ الناتجة عن تحويل $f(x) = \begin{cases} x-3 & x \leq 0 \\ 4x & x > 0 \end{cases}$ بالتحويل المحدّد.
- 1** سحب إلى اليسار 6 وحدات. **2** كبس أفقي عامله $\frac{1}{4}$.

- 2 انظر المثال** حدّد تقاطعات الدالة $f(x)$ ، ثم حدّد تقاطعات الدالة $g(x)$ من دون أن ترسم بيانها.
- 3** $g(x) = \frac{1}{6}f(x)$ ؛ $f(x) = 4x + 12$ **4** $g(x) = f(4x)$ ؛ $f(x) = -x^2 + 16$

- 3 انظر المثال** ارسم بيان الدالة $f(x)$ ثم استعمل التحويلات لرسم بيان الدالة $g(x)$.
- 5** $g(x) = f(2x) - 1$ ؛ $f(x) = -x^2 + 1$ **6** $g(x) = -2f(x)$ ؛ $f(x) = |x-1| - 2$

- 4 انظر المثال** **7 ضرائب** تعتمد إحدى الحكومات الدالة $T(x) = \begin{cases} 0.02x & 0 < x \leq 10\,000\,000 \\ 0.05x & x > 10\,000\,000 \end{cases}$ لتحديد قيمة الضريبة على الدخل بدلالة مدخول الفرد x . قرّرت الحكومة زيادة الضرائب 20% وفرض رسم مقطوع قدره 100 000 دينار يدفعه كل شخص خاضع للضريبة. اكتب الدالة الجديدة لتحديد قيمة الضريبة بدلالة المدخول.

تمارين وحلُّ مسائل

تمارين حرة

أنظر	حل
التمارين	المثال
1	10-8
2	16-11
3	18-17
4	19

اكتب قاعدة الدالة $g(x)$ الناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 4x & x \geq 1 \end{cases}$ بالتحويل المحدد.

8 كبس عمودي عامله $\frac{1}{4}$. 9 مط أفقي عامله 2. 10 سحب إلى أسفل 3 وحدات.

حدّد تقاطعات الدالة $f(x)$ مع محوري الإحداثيات، ثم حدّد تقاطعات الدالة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

$$g(x) = f\left(\frac{5}{3}x\right) ; f(x) = x^2 - 25 \quad 12 \quad g(x) = \frac{2}{3}f(x) ; f(x) = -\frac{3}{2}x + 9 \quad 11$$

$$g(x) = -f\left(\frac{1}{3}x\right) ; f(x) = x^2 - 3x - 4 \quad 14 \quad g(x) = f(2x) ; f(x) = -\frac{2}{5}x + 2 \quad 13$$

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{2}x\right) ; f(x) = x^3 + 8 \quad 16 \quad g(x) = 2f(x) - 4 ; f(x) = 3^x - 1 \quad 15$$

ارسم بيان الدالة $f(x)$ ، ثم استعمل تحويلاً لرسم بيان الدالة $g(x)$.

$$g(x) = -f(2x) ; f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \quad 18 \quad g(x) = 3f(-x) ; f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad 17$$

19 أعمال لحساب الكلفة، تعتمد شركة تؤمّن مستلزمات الاحتفالات المدرسية، الدالة

$$c(n) = \begin{cases} 18\,000n & n \leq 50 \\ 400\,000 + 10\,000n & n > 50 \end{cases}$$

أ قرّر مدير الشركة تخفيض الأسعار 10%. اكتب الدالة الجديدة لحساب الكلفة.

ب قرّر مدير الشركة أن يُقدّم حسماً إضافياً قدره 2000 دينار عن كل شخص. اكتب الدالة الجديدة لحساب الكلفة.

غرامات تجاوز حد السرعة	
الغرامة (دينار)	الزيادة على الحد (km/h)
30 000	10-1
50 000	15-11
100 000	20-16
150 000	25-21
200 000	←26

سلامة السير تُفَرِّم بلدية العاصمة السيارات التي تتجاوز حد السرعة المسموح به، وفقاً للجدول المقابل.

أ اكتب دالة لحساب قيمة الغرامة بدلالة مدى التجاوز.

ب تفرض البلدية غرامة إضافية قدرها 50 000 دينار إذا كان تجاوز حد السرعة قد حصل في منطقة مدارس. اكتب الدالة التي تُستعمل لتحديد قيمة الغرامة في مناطق المدارس.

ج ماذا لو ... ؟ قرّرت البلدية زيادة الغرامات على تجاوز حد السرعة 15%. اكتب الدالة الجديدة لتحديد الغرامات.

21 تفكير ناقد افترض أن بيان الدالة $f(x)$ يقطع المحور الأول n مرة.

أ كم مرة يقطع بيان الدالة $bf(ax)$ المحور الأول؟ أوضح ذلك.

ب أوضح السبب الذي يجعلك عاجزاً عن تحديد عدد النقاط التي يقطع فيها بيان الدالة $f(x-h)+k$ المحور الأول.

22 نقود يسمح أحد المصارف لحاملي البطاقات المصرفية الصادرة عنه أن يسحبوا على سبيل الإقراض مبالغ من آلات سحب النقود. يتقاضى المصرف مبلغ 6000 دينار إذا لم تتجاوز قيمة المبلغ المسحوب 200 000 دينار، و 3% من قيمة المبلغ المسحوب إذا تجاوز 200 000 دينار.

أ اكتب دالة تُمثّل ما يتقاضاه المصرف بدلالة المبلغ المسحوب.

ب افترض أن المصرف قرّر زيادة ما يتقاضاه 15%. اكتب الدالة الجديدة.

- 23 وقف الطلاب في حفل عيد ميلاد أحد زملائهم صفًا طويلاً. همس الطالب المضيف في أذن الطالب الأول جملة، وطلب إليه نقلها همساً إلى الطالب الذي يليه، الذي بدوره همس الجملة في أذن من يليه وطلب إليه نقلها إلى الطالب الذي يليه وهكذا ... حتى إذا وصلت الجملة إلى الطالب الأخير ذكرها بصوت مسموع أمام جميع زملائه. تشكل الدالة $T(n) = \begin{cases} 3.5n & n \leq 8 \\ 5.4n - 8 & n > 8 \end{cases}$ نموذجاً لحساب الزمن بالثواني الذي يستغرقه انتقال الجملة من أول طالب في الصف إلى الطالب ذي الرتبة n .
- أ تكررت اللعبة مرة ثانية، وكان الطلاب أسرع في اللعب من المرة الأولى بنسبة 20%. اكتب الدالة الجديدة لحساب الزمن الذي يستغرقه انتقال الجملة.
- ب صف تأثير هذا التحسن في أداء الطلاب على بيان الدالة $T(n)$.



- 24 **تكنولوجيا** المورفنج Morphing تقنية حاسوبية تسمح بتحويل صورة إلى صورة أخرى كما تُبين ذلك سلسلة الصور أعلاه. تقوم هذه التقنية على تحويل نقاط محددة من صورة إلى أخرى.
- أ ارسم بيانات الدوال $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 \\ -x^2 + 6x - 7 \end{cases}$ حيث $1 \leq x \leq 2$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7 \\ -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$ حيث $2 \leq x \leq 4$ في المستوي الإحداثي نفسه.
- ب ارسم بيانات الدوال $f_1(x) = -f(x) + 8$ و $g_1(x) = -g(x) + 8$ و $h_1(x) = -h(x) + 8$ حيث $4 \leq x \leq 5$ في المستوي الإحداثي نفسه.

اكتب، لكل دالة، الدالة الناتجة عن تحويلها بالتحويل المحدد.

25 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \leq -3 \\ -5x + 3 & x > -3 \end{cases}$ ؛ سحب إلى أدنى 7 وحدات.

26 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ -2x + 4 & x \geq 1 \end{cases}$ ؛ مط عمودي عامله 5.



- 27 **منتجات** يعرض أحد المزارعين منتجاته للبيع بأسعار مغرية.
- أ أنشئ رسماً بيانياً يمثل كلفة شراء كمية تتراوح بين 0 kg و 10 kg.

ب اكتب دالة متفرعة القاعدة يمكن استعمالها لحساب ثمن x kg من المنتجات الزراعية.

ج **ماذا لو ... ؟** في أواخر النهار، عرض المزارع أن يُقدم إلى الزبون كيلوغراماً مجاناً مقابل كل كيلوغرام يشتريه. ارسم

بيان الدالة الجديدة، وصف التحويل الذي يُؤلده من بيان الدالة الأصلية.

28 أعمال تعتمد إحدى شركات بيع الحاسبات الدالة $P(n) = -0.002n^2 + 19n - 9000$ لتحديد أرباحها من بيع n حاسبة. بالاستناد إلى معطيات جديدة، سوف تعتمد الشركة للعام المقبل الدالة $R(n) = P(0.8n)$.

أ ما تأثير هذا التغيير على عدد الحاسبات التي يتوجب على الشركة بيعها، لتحقيق الحد الأعلى من الأرباح؟

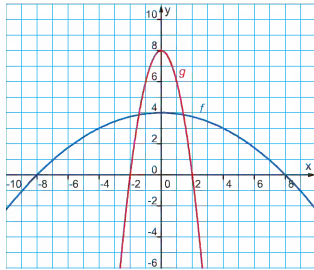
ب جد عدد الحاسبات التي على الشركة بيعها لتحقيق الحد الأعلى من الأرباح.

29 تفكير ناقد التقاطع الأفقي لدالة خطية 2 وتقاطعها العمودي 3. تم مط هذه الدالة عمودياً بعامل 2، ثم سُحبت إلى أسفل 3 وحدات، ثم تم مطّها أفقياً بعامل 2. ما التقاطعات الجديدة للدالة بعد تحويلها؟

30 تفكير ناقد لماذا لا يُغيّر السحب العمودي في مجال الدالة، بينما يُغيّر السحب الأفقي فيه؟

31 اكتب هل يُمكن تحويل بيان منقطع (غير متصل) إلى بيان متصل باستعمال المط والكبس فقط؟ أوضح ذلك.

تحضير للاختبار



32 أي مما يلي هو الدالة $g(x)$ في الرسم البياني المقابل؟

أ $g(x) = 2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ **ج** $g(x) = 2f(4x)$

ب $g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ **د** $g(x) = \frac{1}{2}f(4x)$

33 أي مما يلي هو الدالة $g(x) = f(4x)$ حيث $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 8 \\ x^2 & x \leq 8 \end{cases}$

أ $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 2 \\ \frac{x^2}{16} & x \leq 2 \end{cases}$ **ج** $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 32 \\ 4x^2 & x \leq 32 \end{cases}$

ب $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 8 \\ \frac{x^2}{16} & x \leq 8 \end{cases}$ **د** $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 2 \\ 16x^2 & x \leq 2 \end{cases}$

34 التقاطع العمودي للدالة $g(x) = \frac{3}{5}f(5x)$ هو 15. ما التقاطع العمودي للدالة $f(x)$

أ 3 **ب** 9 **ج** 25 **د** 75

تحدّ وتوسّع

35 هندسة استعمل الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 4 & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$

أ ارسم بيان الدالة $f(x)$ ، وحدّد تقاطعاتها. ثم احسب مساحة المنطقة المحددة بالبيان وبالمحور الأول.

ب ارسم بيان الدالة $g(x) = 4f(2x)$. ثم احسب مساحة المنطقة المحددة بالبيان وبالمحور الأول.

36 استعمل الدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

أ حدّد تقاطعات الدالة $g(x) = 3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ **ب** حدّد تقاطعات الدالة $h(x) = -g\left(\frac{1}{2}x\right)$

مراجعة لولبية

37 جيولوجيا ضرب الولايات المتحدة 973 زلزالاً بين عامي 1999 و 2002 وقع 43% منها في ولاية كاليفورنيا. كم زلزالاً تقريباً ضرب كاليفورنيا خلال هذه الفترة. (الصفوف السابقة)

جد القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى لكل دالة، ثم حدّد مجال الدالة ومداها.
(الصفوف السابقة)

$$g(x) = -3x^2 + 6x - 9 \quad \text{39}$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 8 \quad \text{38}$$

احسب قيمة كل دالة متفرّعة القاعدة عند $x = -4$ و $x = 0$ و $x = 5$. (الدرس 5-2)

$$g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & x < -3 \\ 4 + x & x \geq -3 \end{cases} \quad \text{41}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ x^2 - 4 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{40}$$

اختبار جزئي

الفصل

5

التمثيلات المختلفة للدوال 1-5

1 على فيان أن تقرأ في الأسبوع القادم 294 صفحة تحضيراً لاختبار التاريخ. اكتشفت أن بمقدورها قراءة 42 صفحة في الساعة. أنشئ جدولاً بيانياً واكتب معادلة لتمثيل عدد الصفحات المتبقية للقراءة بدلالة الزمن x .

2 يُبين الجدول التالي ارتفاعات قذيفة بالأمطار، في عدة أزمنة، بعد إطلاقها.

الزمن (بالثواني)	0	1	2	3	4	5
الارتفاع (بالأمتار)	50.0	65.1	70.4	65.9	51.5	27.5

أ جِد نموذجاً مناسباً لحساب ارتفاع القذيفة h بدلالة الزمن t .

ب ما أعلى ارتفاع بلغته القذيفة؟

ج كم من الزمن بقيت القذيفة في الجو؟

الدوال المتفرعة القاعدة 2-5

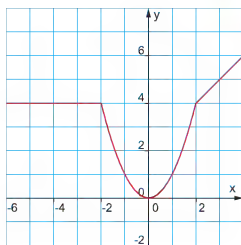
ارسم بيان الدالة.

$$h(x) = \begin{cases} -x+1 & x < -3 \\ -x & -3 \leq x < 1 \\ -x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad 4$$

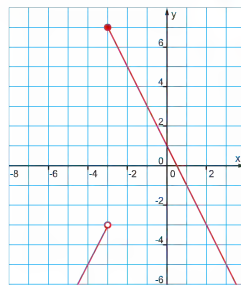
$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x+3 & x \geq 0 \end{cases} \quad 3$$

5 كلفة استئجار دراجة للتقل في الجبال 25 000 دينار للساعات الثلاث الأولى، و 5000 دينار لكل ساعة إضافية. أنشئ رسماً بيانياً يمثل كلفة استئجار الدراجة لأزمنة من 0 إلى 8 ساعات.

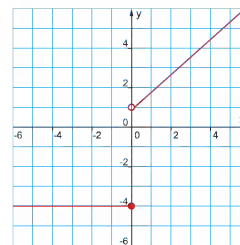
اكتب دالة متفرعة القاعدة للرسم البياني.



8



7



6

تحويلات الدوال 3-5

حدّد التقاطعات الأفقية والعمودية للدالة $f(x)$ ، واستنتج التقاطعات الأفقية والعمودية للدالة $g(x)$ من دون رسم بيانها.

$$g(x) = 2f(x), \quad f(x) = x^2 - 4 \quad 10$$

$$g(x) = -f\left(\frac{1}{2}x\right), \quad f(x) = 2x - 2 \quad 9$$

ارسم بيان $g(x)$ بمعرفة $f(x)$.

$$g(x) = -3f(x), \quad f(x) = x^2 + 1 \quad 12$$

$$g(x) = 2f(x) + 3, \quad f(x) = |x| - 3 \quad 11$$



العمليات على الدوال

Operations with Functions

3-5

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكن للمستوردين أن يستعملوا العمليات على الدوال ليُحدّدوا كلفة ما يشترونه بالعملة الأجنبية. (المثال 5).

الأهداف

يجمع الدوال ويطرحها ويضربها ويقسمها. يركّب الدوال، ويحسب قيم دالة مركّبة.

تستطيع إجراء العمليات على الدوال كما أُجريت العمليات على الأعداد والمقادير. يُمكن جمع الدوال وطرحها وضربها وقسمتها بإجراء هذه العمليات على المقادير التي تشكّل قواعدها.

كتابة العمليات على الدوال	
العملية	الكتابة
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
الضرب	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث $g(x) \neq 0$



مثال 1 جمع الدوال وطرحها

جد كل دالة. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ ، $g(x) = 2x - 2$

أ $(f + g)(x)$

عوّض عن كل دالة بقاعدتها. بسّط.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (2x^2 + 4x - 6) + (2x - 2) \\ &= 2x^2 + 6x - 8\end{aligned}$$

ب $(f - g)(x)$

عوّض عن كل دالة بقاعدتها. استعمل خاصية التوزيع. بسّط.

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (2x^2 + 4x - 6) - (2x - 2) \\ &= 2x^2 + 4x - 6 - 2x + 2 \\ &= 2x^2 + 2x - 4\end{aligned}$$

1. $f(x) = 5x - 6$ ، $g(x) = x^2 - 5x + 6$ ، جد:

أ $(f + g)(x)$

ب $(f - g)(x)$



عندما تقسم دالة على أخرى، تأكد من كتابة كل تحديد للمجال قد ينتج عن القسمة.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

عندما تقسم دالة على أخرى، تأكد من كتابة كل تحديد للمجال قد ينتج عن القسمة.

(gf)(x)

(gf)(x) = g(x) × f(x)

= (2x-2)(2x²+4x-6)

= 2x(2x²+4x-6) - 2(2x²+4x-6)

= 4x³+8x²-12x-4x²-8x+12

= 4x³+4x²-20x+12

(f/g)(x)

(f/g)(x) = f(x)/g(x)

= (2x²+4x-6)/(2x-2)

= (2(x-1)(x+3))/(2(x-1))

= (x+3)/(x-1)

= x+3 (x ≠ 1)

عوّض عن كل دالة بقاعدتها.

استعمل خاصية التوزيع.

اضرب.

بسّط.

اكتب ناتج القسمة على صورة مقدار نسبي.

حلّ بالكامل. لاحظ $x \neq 1$.

اختصر.

بسّط.

2. $f(x) = x+2$; $g(x) = x^2-4$ جد كل دالة.

(f/g)(x)

(fg)(x)



تركيب الدوال

تركيب الدالة f مع الدالة g، هو الدالة التي تُكتب

(fog)(x) = f(g(x))

مجال الدالة المركبة (fog)(x) هو مجموعة قيم x في مجال g التي تجعل g(x) تنتمي إلى مجال f.

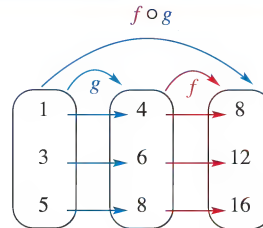
لحساب (fog)(1)، احسب g(1) أولاً:

g(1) = 4

احسب بعد ذلك f(4)

f(4) = 8

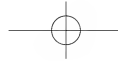
إذن (fog)(1) = f(g(1)) = f(4) = 8



قراءة الرياضيات

الدالة المركبة
(fog)(x) أو f(g(x))
تقرأ
f of g of x

قواعد تراتب العمليات على الدوال هي نفسها قواعد تراتب العمليات على الأعداد والمقادير. لحساب (fog)(3)، احسب أولاً g(3)، ثم احسب قيمة f عندما تكون القيمة المدخلة g(3).



حساب قيم الدوال المركبة

مثال 3

$f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3$ احسب كل قيمة.

<p>ب $g(f(2))$</p> <p>الخطوة 1 احسب $f(2)$</p> $f(x)=3x+1 \quad f(2)=3 \times 2 + 1 = 7$ <p>الخطوة 2 احسب $g(7)$</p> $g(x)=x^3 \quad g(7)=7^3 = 343$ <p>إذن $g(f(2))=343$</p>	<p>أ $f(g(2))$</p> <p>الخطوة 1 احسب $g(2)$</p> $g(x)=x^3 \quad g(2)=2^3 = 8$ <p>الخطوة 2 احسب $f(8)$</p> $f(x)=3x+1 \quad f(8)=3 \times 8 + 1 = 25$ <p>إذن $f(g(2))=25$</p>
--	--

انتبه!

لا تخلط بين رمز تركيب الدوال
(\circ) ورمز الضرب (\bullet).
 $(f \circ g)(x) \neq (f \cdot g)(x)$

3. استعمل الدالتين $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2$ احسب كل قيمة.

ب $g(f(3))$

أ $f(g(3))$

يمكنك استعمال مقادير جبرية كقيم مُدخلة للدالة، تماماً كما تستعمل الأعداد.
لكي تجد قاعدة الدالة المركبة $f(g(x))$ ، عوض عن x في $f(x)$ بالمقدار $g(x)$ ،
ثم اكتب المقدار الناتج على أبسط صورة.

كتابة الدالة المركبة

مثال 4

$f(x)=5x+2$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ اكتب كل دالة مركبة وحدد مجالها.

أ $f(g(x))$

عوض عن x بعبارة الدالة g .

$$f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

استعمل قاعدة f . لاحظ أن $x \neq 1$.

$$= 5\left(\frac{2}{x-1}\right) + 2$$

$$= \frac{10}{x-1} + 2 \quad ; \quad x \neq 1$$

مجال الدالة $f(g(x))$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المختلفة عن 1، أي $\{x | x \neq 1\}$
لأن $g(1)$ غير معرف.

ب $g(f(x))$

عوض عن x بقاعدة الدالة f .

$$g(f(x)) = g(5x+2)$$

استعمل قاعدة g . لاحظ أن $x \neq 1$.

$$= \frac{2}{(5x+2)-1}$$

$$= \frac{2}{5x+1} \quad , \quad x \neq -\frac{1}{5}$$

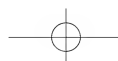
مجال الدالة $g(f(x))$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المختلفة عن $-\frac{1}{5}$ ، أي $\{x | x \neq -\frac{1}{5}\}$
لأن $f(-\frac{1}{5})=1$ و $g(1)$ غير معرف.

4. استعمل الدالتين $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\sqrt{x}+2$ اكتب الدالة المركبة وحدد مجالها.

ب $g(f(x))$

أ $f(g(x))$

يمكن استعمال تركيب الدوال لتبسيط سلسلة من الدوال.



مثال 5 تطبيق في إدارة الأعمال

يستورد دلسوز دراجات من إيطاليا مُسَعَّرة باليورو. تتضمن الكلفة الكلية لكل دراجة 10% رسماً جمركياً، و 75 يورو للشحن.



أسعار العملات
لكل 1000 دينار عراقي
0.84 دولار أميركي
3.09 ريال سعودي
1260 ليرة لبنانية
0.52 يورو أوروبي

أ اكتب دالة مركبة تُشكّل نموذجاً لحساب كلفة كل دراجة بالدينار بدلالة سعرها باليورو (c).

الخطوة 1 اكتب دالة لحساب كلفة الدراجة باليورو.

$$E(c) = c + 0.1c + 75 \\ = 1.1c + 75$$

الخطوة 2 اكتب دالة لحساب الكلفة

بالدينار بدلالة الكلفة

$$R(c) = 1920c$$

استعمل: 1 يورو = 1920 ديناراً

الخطوة 3 جد الدالة المركبة $R(E(c))$.

$$R(E(c)) = 1920E(c) = 1920(1.1c + 75) = 2112c + 144\,000$$

ب احسب الكلفة بالدينار لدراجة ثمنها 1200 يورو.

احسب قيمة الدالة المركبة $R(E(c))$ عندما $c = 1200$.

$$R(E(1200)) = 2112 \times 1200 + 144\,000 = 2\,678\,000$$

ستبلغ الكلفة الكلية لهذه الدراجة 2 678 000 دينار.

5. أعلن أحد محالّ الآلات الموسيقية عن تخفيض على آلات العود بنسبة 20%. للمحلّ زبائن مفضلون يحصلون على حسم إضافي نسبته 15% على الصندوق.



أ اكتب دالة مركبة لحساب الثمن النهائي الذي يدفعه زبون مفضل على الصندوق عند شرائه عوداً ثمنه x دينار.

ب اشترى آلان، وهو زبون مفضل لدى المحلّ، عوداً ثمنه 248 000 دينار. كم دفع آلان على الصندوق؟

فكر وناقش

- أوضح السبب الذي يجعل $(f + g)(x) = (g + f)(x)$.
- جد الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ تحققان $f(g(x)) = g(f(x))$.
- كن منظماً انسخ الجدول ثم أكمله. اكتب كل عملية على دالتين بالطريقة الصحيحة.

العملية	الكتابة
جمع الدالتين	
طرح الدالتين	
ضرب الدالتين	
قسمة دالة على أخرى	
تركيب الدالتين	



التمارين

3-5

تمارين موجّهة

1 مفردات بم يختلف تركيب الدوال عن بقية العمليات عليها؟

انظر المثال 1

$f(x) = 8x + 13$; $g(x) = x^2 - 5x$. جد كل دالة.

$(g-f)(x)$ 4

$(f-g)(x)$ 3

$(f+g)(x)$ 2

$f(x) = 2x^2 + 2x$; $g(x) = x + 1$. جد كل دالة.

انظر المثال 2

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ 7

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 6

$(fg)(x)$ 5

$f(x) = 3x^2$; $g(x) = 7 - x$. جد كل قيمة.

انظر المثال 3

$f(g(-2))$ 10

$g(f(5))$ 9

$f(g(5))$ 8

$f(x) = x^2$; $g(x) = 2x - 3$; $h(x) = \sqrt{x+1}$. جد كل دالة وحدّد مجالها.

انظر المثال 4

$f(h(x))$ 13

$(g \circ f)(x)$ 12

$f(g(x))$ 11

14 اقتصاد المستهلك يرغب كريكار في الانتساب إلى الجامعة. لذلك يودع شهرياً، في حساب للتوفير، 10% مما يتقاضاه، مضافاً إليها 50 000 دينار. يشكل صافي ما يتقاضاه كريكار بعد حسم الضرائب والرسوم 80% من مرتبه الأصلي.

انظر المثال 5

أ اكتب دالة مركبة لحساب ما يودعه كريكار شهرياً في حساب التوفير بدلالة مرتبه الأصلي g .

ب احسب ما يودعه كريكار في حساب التوفير، علماً بأن مرتبه الأصلي 2 400 000 دينار في الشهر.

تمارين وحلّ مسائل

$f(x) = 2x^2 - 8$; $g(x) = x^2 + 5x + 6$; $h(x) = 2x + 4$. جد كل دالة.

$(g-h)(x)$ 18

$(f+h)(x)$ 17

$(f-g)(x)$ 16

$(f+g)(x)$ 15

$\left(\frac{g}{h}\right)(x)$ 23

$(gh)(x)$ 22

$\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ 21

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 20

$(fg)(x)$ 19

$f(x) = 2\sqrt{x+3}$; $g(x) = -3x + 1$. جد كل قيمة.

$f(g(4))$ 26

$g(f(1))$ 25

$f(g(1))$ 24

$g(f(97))$ 29

$f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ 28

$g(f(6))$ 27

$f(x) = 4x + 3$; $g(x) = \frac{x}{x+3}$; $h(x) = x^2 - 2$. جد كل دالة مركبة وحدّد مجالها.

$f(h(x))$ 32

$g(f(x))$ 31

$f(g(x))$ 30

33 أعمال تبلغ كلفة تبليط غرفة 100 000 دينار يُضاف إليها 4000 دينار عن كل ياردة مربعة. تذكر أن الياردة وحدة إنجليزية لقياس الطول، وأن كل ياردة تساوي 3 أقدام (القدم وحدة إنجليزية أخرى لقياس الطول مقدارها 30.48cm).

أ اكتب دالة مركبة لحساب كلفة تبليط غرفة مساحتها x قدمًا مربعة.

ب احسب مساحة غرفة بالقدم المربعة علماً بأن كلفة تبليطها بلغت 380 000 دينار.

تمارين حرة

انظر	لحل
المثال	التمارين
1	18-15
2	23-19
3	29-24
4	32-30
5	33

34 عند تسخين الهواء في المنطاد حتى 38° ، يُمكن لكل متر مكعب من الهواء أن يرفع 250 g تقريباً.

أ اكتب دالة تُبين عدد الغرامات التي يُمكن لمنطاد يحتوي على $x\text{ m}^3$ من الهواء الساخن أن يحملها.

ب كم متراً مكعباً من الهواء الساخن يلزم لرفع شخص كتلته 75 kg ؟

ج تُشكّل الدالة $g(x) = \frac{x}{453.6}$ نموذجاً لتحويل x غرام إلى باوند (وحدة إنجليزية لقياس الكتلة). اكتب دالة تُبين عدد الباوندات التي يُمكن لمنطاد يحتوي على $x\text{ m}^3$ من الهواء الساخن أن يحملها.

د قدّر عدد الأمتار المكعبة من الهواء الساخن في منطاد يرفع 1000 باوند.

35 **اقتصاد المستهلك** مع كوزين بطاقتا شراء يُمكنها استعمالهما عند شرائها أحذية من محل الحذاء الأحمر. تؤمّن لها البطاقة الأولى حسم $10\,000$ دينار، بينما تؤمّن الثانية حسمًا نسبته 15% .

أ اكتب دالة $f(p)$ لحساب ما تدفعه كوزين عند شراء حذاء ثمنه p ديناراً، إذا استعملت البطاقة الأولى فقط.

ب اكتب دالة $g(p)$ لحساب ما تدفعه كوزين عند شراء حذاء ثمنه p ديناراً، إذا استعملت البطاقة الثانية فقط.

ج جد $f(g(p))$ و $g(f(p))$.

د أي بطاقة تنصح كوزين باستعمالها أولاً؟ أوضح ذلك.

هـ جد أقلّ ثمن يُمكن لكوزين أن تدفعه لشراء حذاء ثمنه $49\,000$ دينار.

36 **زلازل** تتمدّد الموجة التي يولدها زلزال انطلاقاً من مركزه بسرعة 9 km/s . عندما تتسع الموجات الدائرية التي يسببها الزلزال، يبلغ ضررها، أكثر فأكثر، المناطق المحيطة بالموقع.

أ جد دالة لحساب مساحة المنطقة (بالـ km^2) التي تتأثر بالزلزال بعد t ثانية.

ب قدّر الجيولوجيون أن أثر زلزال سينتهي بعد أن تبلغ مساحة المنطقة التي تأثرت به $35\,000\text{ km}^2$. كم من الزمن سيمضي لينتهي تأثير الزلزال؟

37 **سكان** تُعتمد الدالة $p(t) = 160\,000 \times 1.05^t$ ، حيث يُمثّل t عدد السنوات منذ عام 1980، نموذجاً لتحديد عدد سكان إحدى المدن. كما تُعتمد الدالة $d(p) = 0.0044p$ لتحديد عدد الأطباء في هذه المدينة بدلالة عدد سكانها P .

أ اكتب دالة لحساب عدد الأطباء في هذه المدينة بدلالة عدد السنوات منذ عام 1980.

ب **تقدير** قدّر عدد الأطباء في هذه المدينة سنة 2010.

ج متى سيتجاوز عدد الأطباء في هذه المدينة 5000 طبيباً؟

38 **تفكير ناقذ** إذا كان $f(x) = x$ ، فهل الدالة $f(g(x))$ تساوي الدالة $g(f(x))$ دائماً؟ أوضح ذلك.

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

استعمل الجدولين المقابلين لإيجاد كل قيمة.

$(f \circ g)(3)$ 40

$(g \circ f)(5)$ 39

$f(g(2))$ 42

$g(f(4))$ 41

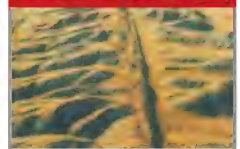
x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

43 **تفكير ناقذ** هل تستطيع استعمال الجدولين لإيجاد $f(g(4))$ ؟ أوضح جوابك.

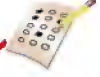
44 **اكتب** هل مجموع الدالتين خطيتين دالة خطية؟ هل ناتج ضرب الدالتين خطيتين دالة خطية؟ أوضح ذلك.

نافذة

على الزلازل



تنشأ الزلازل عادة من حركة طبقات الأرض قرب فائق أرضي. الفوالق كسور في القشرة الأرضية، وتقع الكبيرة منها عند حدود الصفائح التكتونية.



45 أي دالتين $f(x)$ و $g(x)$ ، تحققان $(f \circ g)(x) = (3x+4)^2$ ؟

- (أ) $f(x) = 3x+4$ ؛ $g(x) = x^2$ (ب) $f(x) = x^2$ ؛ $g(x) = 3x+4$
 (ج) $f(x) = (3x)^2$ ؛ $g(x) = 4^2$ (د) $f(x) = 3x+4$ ؛ $g(x) = \sqrt{x}$

46 إذا كان $f(x) = 2x+1$ و $g(x) = 5x-2$ فما قيمة $(fg)(5)$ ؟

- (أ) 253 (ب) 53 (ج) 47 (د) 13

47 أي مما يلي الدالة $(f \circ g)(x)$ ، إذا كان $f(x) = 4-x^2$ و $g(x) = \frac{1}{2}x-2$ ؟

- (أ) $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{2}x^2$ (ب) $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$
 (ج) $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x - 8$ (د) $(f \circ g)(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 2$

48 جواب فقط جد $(f+g)(2)$ ، حيث $f(x) = (x+1)^2$ و $g(x) = 3x$.

تحدّ وتوسّع

49 جد $g(x)$ ، علماً بأن $f(x) = 2x-6$ و $f(g(x)) = 3x^2+4$.

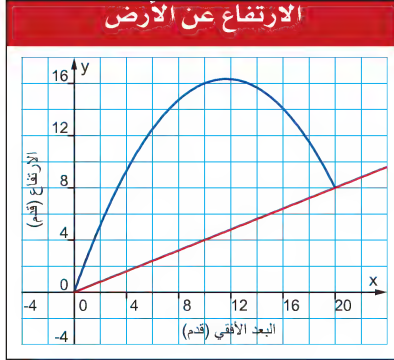
50 جد $g(f(x))$ ، حيث $f(x) = 3x+8$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 5x+2 & x \geq 0 \end{cases}$.

51 فيزياء تُشكّل الدالة $y = -0.12x^2 + 2.8x$

نموذجاً لحساب ارتفاع كرة قدم (y) تم ركلها باتجاه تلة، بدلالة بعدها الأفقي x عن نقطة الركل. كما تُشكّل الدالة $y = \frac{2}{5}x$ نموذجاً لحساب ارتفاع نقطة على التلة بدلالة بعدها عن نقطة ركل الكرة.

أ) جد الارتفاع عن مستوى نقطة الركل لأعلى نقطة تبلغها الكرة.

ب) جد الارتفاع عن مستوى نقطة الركل لنقطة وقوع الكرة على أرض التلة.



مراجعة لولبية

52 أعمال تتناقص قيمة حاسوب ثمنه 2 500 000 دينار بنسبة 20% سنوياً. (الدرس 1-4)

أ) اكتب دالة لحساب قيمة الحاسوب بعد t سنة.

ب) كم ستصبح قيمة الحاسوب بعد 10 سنوات؟

لديك $f(x) = \begin{cases} 8x & x \geq 0 \\ x-9 & x < 0 \end{cases}$ ، اكتب قاعدة لكل دالة. (الدرس 2-5)

53 $g(x)$ هي الدالة الناتجة من تحويل الدالة $f(x)$ بسحب إلى اليسار 5 وحدات.

54 $h(x)$ هي الدالة الناتجة من تحويل الدالة $f(x)$ بمط عمودي عامله 3.

النماذج الرياضية

Mathematical Models

4-5



من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكنك أن تستعمل النماذج الرياضية للتحليل وتوقع عدد آلات الصرف الآلي العاملة. (المثال 3).

كثير من المعطيات التي تتجمع حول حالة من الواقع قد تُشكّل نمطاً يُمكن تمثيله باستعمال دالة من الدوال التي درستها. آنذاك تستطيع أن تستعمل هذه الدالة للتحليل وصياغة توقعات. تذكر بعضاً من الدوال الأم التي درستها حتى الآن.

الأهداف

يُمثّل حالات من الواقع باستعمال دوال.
يستعمل النماذج الرياضية لإجراء توقعات.

الدوال الأم				
النوع	خطية	تربيعية	أسية	جذرية
المعادلة	$f(x) = x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = b^x, b > 0$	$f(x) = \sqrt{x}$
البيان				
ثبات الفروق أو النسب	ثبات الفروق الأولى لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات الفروق الثانية لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات النسبة لقيم y العائدة إلى قيم x المتساوية البعد	ثبات الفروق الثانية لقيم x العائدة إلى قيم y المتساوية البعد

اعلم

احفظ

مساعدة

بما أن دالة الجذر التربيعي هي الدالة العكسية للدالة التربيعية، فإن قيم x وقيم y تتبادلان.

تمييز النماذج باستعمال ثبات الفروق أو النسب

استعمل ثبات الفروق أو النسب لتجد الدالة الأم الأنسب لتمثيل مجموعة معطيات.

يتحدّد طول النابض بكتلة الجسم الذي يحمله.

10	9	8	7	6	5	4	الكتلة (kg)
39	37.6	36.2	34.8	33.4	32	30.6	الطول (cm)

لاحظ أن الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للكتلة ثابت. تحقّق إن كان الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للطول ثابتاً.

39	37.6	36.2	34.8	33.4	32	30.6	الطول (cm)
----	------	------	------	------	----	------	------------

الفرق الأولى 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4

بما أن الفرق الأولى ثابتة، فإن الدالة الخطية هي الأنسب لتمثيل معطيات الجدول.

مثال 1

ب يتحدّد عمر الشجرة بقطرها.

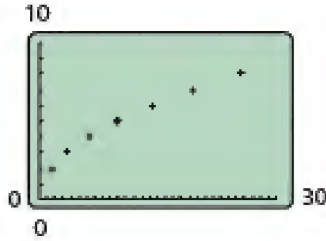
25.6	19.6	14.4	10.0	6.4	3.6	1.6	القطر (cm)
8	7	6	5	4	3	2	العمر (سنة)

لاحظ أنّ الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للعمر ثابت. تحقّق إن كان الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للقطر ثابتاً.

25.6	19.6	14.4	10.0	6.4	3.6	1.6	القطر (cm)
------	------	------	------	-----	-----	-----	------------

الفروق الأولى 6.0 5.2 4.4 3.6 2.8 2.0

الفروق الثانية 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8



بما أنّ الفروق الثانية للمتغيّر الحر، العائدة إلى قيم ثابتة التباعد للمتغيّر التابع، ثابتة، فإنّ دالة الجذر التربيعي هي الأنسب لتمثيل معطيات الجدول. تحقّق تبين النقاط البيانية التي تُمثّل معطيات الجدول أن الدالة الأنسب لتمثيل هذه المعطيات هي دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$.

ج يتحدّد حجم كمية الماء المتبقية بعد التبخر بالزمن.

6	5	4	3	2	1	الزمن (ساعة)
121.5	162	216	288	384	512	الحجم (mL)

بما أنّ الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للزمن ثابت، فلتتحقّق إن كان الفرق بين كل قيمتين متجاورتين للحجم ثابتاً.

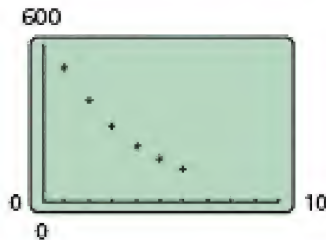
121.5	162	216	288	384	512	الحجم (mL)
-------	-----	-----	-----	-----	-----	------------

الفروق الأولى -40.5 -54 -72 -96 -128

الفروق الثانية 13.5 18 24 32

الفروق الأولى غير ثابتة، وكذلك الفروق الثانية. تحقّق إن كانت نسبة كل قيمة للحجم إلى القيمة التي تسبقها ثابتة أم لا.

$$\frac{121.5}{162} = 0.75 \quad \frac{162}{216} = 0.75 \quad \frac{216}{288} = 0.75 \quad \frac{288}{384} = 0.75 \quad \frac{384}{512} = 0.75$$



بما أنّ نسبة كل قيمة للحجم إلى القيمة التي تسبقها ثابتة، فإنّ الدالة الأسية هي الأنسب لتمثيل المعطيات. تحقّق تبين النقاط البيانية التي تُمثّل معطيات الجدول أن الدالة الأنسب لتمثيل هذه المعطيات هي دالة تراجع أسّي.

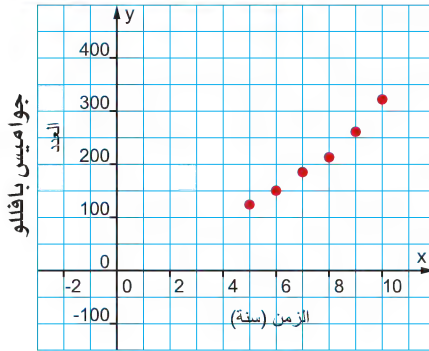
1. استعمل ثبات الفروق أو النسب لتجد الدالة الأم الأنسب لتمثيل مجموعة المعطيات.



x	21	22	23	24	ب
y	243	324	432	576	

x	12	48	108	192	300	أ
y	10	20	30	40	50	

نادرًا ما تكون فروق المعطيات الواقعية أو نسبها ثابتة بالمعنى الرياضي للكلمة، لكن بإمكانك تحليلها لترى إن كانت هذه الفروق أو النسب قريبة من أن تكون ثابتة. يُمكنك أيضًا أن تمثل بياناتًا معطيات الواقع في نقاط بيانية، وأن تتعرف نوع الدالة الأنسب لتمثيلها، ثم تستعمل وظيفة الانحدار Regression في الحاسبة البيانية، لإيجاد الدالة التي تمثل هذه المعطيات أفضل تمثيل.



مثال 2 تطبيق في الحفاظ على الأجناس

جمع عالم أحياء معطيات عن تطور عدد جواميس البافالو في قطيع أُطلق في محمية طبيعية. اكتب دالة تمثل هذه المعطيات.

الزمن (بالسنة)	5	6	7	8	9	10
العدد	124	150	185	213	261	322

الخطوة 1 أنشئ نقاطًا بيانية تمثل المعطيات. تُظهر النقاط البيانية أن لها نمطًا تربيعيًا أو نمطًا أسّيًا.

الخطوة 2 ادرس الفروق.

العدد	124	150	185	213	261	322
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

الفروق الأولى 26 35 48 61

الفروق الثانية 9 -7 20 13

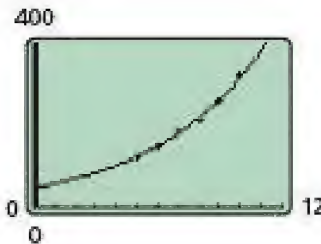
لا الفروق الأولى تبدو ثابتة ولا الفروق الثانية.

الخطوة 3 ادرس النسب.

$$\frac{322}{261} = 1.234 \quad \frac{261}{213} = 1.225 \quad \frac{213}{185} = 1.151 \quad \frac{185}{150} = 1.233 \quad \frac{150}{124} = 1.210$$

جميع النسب تبدو قريبة من 1.2، ما يدفع إلى البحث عن نموذج أسّي.

الخطوة 4 استعمل حاسبة بيانية لإيجاد نموذج أسّي.



تُشكل الدالة الأسية $f(x) = 48.581(1.207^x)$ نموذجًا لمعطيات الجدول.

2. اكتب دالة تمثل معطيات الجدول التالي:

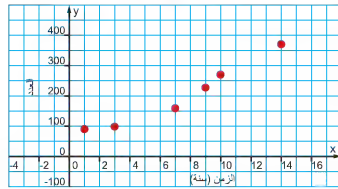
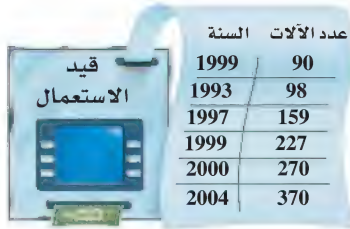
x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356



مساعدة

لكي تُظهر شاشة الحاسبة معامل الارتباط r ، عليك أن تطلب منها ذلك، اضغط CATALOG، ثم اختر 0 Diagnostic On.

عندما لا تكون المعطيات مرتّبة، أو تكون الفروق بينها غير ثابتة، عليك أن تجربَ نماذج عدة لتجد أيّها يمثل المعطيات أفضل تمثيل. تُظهر الحاسبة البيانية قيمة تُسمّى معامل التحديد يُرمز إليها بالرمز r^2 ، أو R^2 . كلما كان هذا المعامل قريباً من 1، كان النموذج أصدق في تمثيل المعطيات.



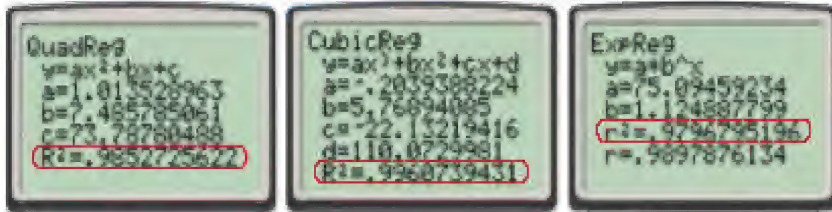
مثال 3 تطبيق في مصرفي

تُظهر المعطيات المقابلة أعداد آلات الصرف الآلي في إحدى الدول سنة بعد أخرى. اكتب دالة تمثل هذه المعطيات، معتمداً سنة 1990 السنة صفراً.

بما أن فروق قيم المتغير الحر غير ثابتة وفروق قيم المتغير التابع غير ثابتة أيضاً، فلن نستطيع دراسة الفروق.

أنشئ نقاطاً بيانية لتمثيل المعطيات، معتمداً سنة 1990 السنة صفر. توجي النقاط البيانية بنمطٍ تربيعي أو تكعيبي أو أسّي.

استعمل الحاسبة البيانية للقيام بتراجع من كل نوع.



قارن بين قيم r^2 . يبدو أن النموذج التكعيبي هو الأفضل. يُمكنك اعتماد الدالة

$$f(x) = 0.2x^3 + 5.44x^2 - 22.13x + 110.07$$

نموذجاً لتحديد عدد الآلات بدلالة السنين بعد عام 1990.

3. اكتب دالة تمثل معطيات الجدول التالي:

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705



فكر وناقش

- أوضح لماذا يُعد استعمال الفروق والنسب عند الاشتغال بمعطيات واقعية محدوداً.
- كن منظمًا. انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. أوضح كيف تساعدك كل طريقة على تحديد النموذج الأنسب لتمثيل المعطيات.

تحديد النموذج

معامل التحديد

نقاط بيانية

الفروق والنسب



التمارين

4-5

تمارين موجّهة

1 انظر المثال

استعمل الفروق أو النسب لتجد الدالة الأمّ التي تُشكّل النموذج الأفضل لتمثيل المعطيات.

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

3

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

2

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	-3.2
41	-21.4

1

2 انظر المثال

يُبيّن الجدول أدناه الكميّة، بالغرام، المتبقية من مادة الأيودين - 131 بعد t يوماً من بدء الاختبار.

الزمن t بالأيام	0	1	2	3	4	5	6
الكمية m بالغرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

4

أ اكتب دالة تمثّل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لتجد كمية الأيودين - 131 المتبقية بعد 20 يوماً.

ج استعمل النموذج لتجد كم يوماً يلزم لتصبح كمّيّة الأيودين - 131 المتبقية أقل من 50 g.

3 انظر المثال

يُبيّن الجدول أدناه عدد الدراجات في محل «دراجتي» في الشهور الأربعة والعشرين الماضية.

الزمن t بالشهر	0	4	9	12	15	20	24
العدد	62	54	45	48	55	53	60

5

أ اكتب دالة تمثّل معطيات الجدول.

ب استعمل النموذج لتجد عدد الدراجات في الشهر السادس.

ج هل تنصح مدير المحل باعتماد النموذج ليتوقّع عدد الدراجات في محله بعد سنة من الآن؟ أوضّح ذلك.

تمارين وحلّ مسائل

استعمل الفروق أو النسب لتحديد الدالة الأمّ التي تُشكّل النموذج الأفضل لتمثيل المعطيات.

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

8

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

7

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

6

تمارين حرة

أنظر	لحل
المثال	التمارين
1	8-6
2	9
3	10

9 زراعة أجرى أحد المزارعين اختباراً على كميات السماد التي يجب وضعها في الفدان الواحد للحصول على أفضل إنتاج. استعمل لهذه الغاية عدة حقول، ودون نتائج اختبارها في الجدول أدناه. اكتب دالة لتمثيل معطيات الجدول.

150	135	125	115	90	70	45	كمية السماد في الفدان (kg)
76	86	84	88	70	60	29	كمية الإنتاج في الفدان (مكيال)

10 أحياء يُبين الجدول أدناه الأعداد المقدرة لنوع من البكتيريا (إيريشيا كولي) في صحن اختبري بعد t دقيقة من بدء الاختبار.

60	50	40	30	20	10	0	الزمن ، بالدقائق
2354	1686	1188	842	596	423	300	عدد البكتيريا

- أ جـ نموذجاً يُمثل عدد البكتيريا بدلالة الزمن، أفضل تمثيل.
- ب استعمل النموذج لتجد عدد البكتيريا بعد 3 ساعات.
- ج كم يلزم من الزمن لكي يصبح عدد البكتيريا 3 أضعاف عددها في البداية؟
- 11 عقارات** يُبين الجدول أدناه ثمن عدد من البيوت المبعة وفقاً لمساحاتها.

276	227	233	138	109	248	المساحة (m^2)
187	169.9	172.5	136.75	125.9	179	الثمن (مليون دينار)



- أ جـ نموذجاً لحساب ثمن البيت بدلالة مساحته.
- ب استعمل النموذج لإيجاد المساحة التقريبية لبيت ثمنه 175 مليون دينار.
- ج هل تعتقد أنّ جوابك في السؤال ب دقيق؟ أوضح ذلك.

12 اقتصاد درس أحد علماء الاقتصاد متوسط الأجر اليومي لأفراد فئة من العمال في القطاع الخاص، وفقاً لأعمارهم، ودون المعطيات التالية:

68	58	48	38	28	18	العمر (سنة)
21 390	37 570	41 230	37 440	30 650	17 480	متوسط الأجر (دينار)

- أ جـ نموذجاً مناسباً لتمثيل معطيات الجدول.
- ب استعمل النموذج لإيجاد متوسط الأجر اليومي لعامل من هذه الفئة. عمره 43 سنة.
- 13 صحة** يُبين الجدول أدناه أعمار النساء في أحد المجتمعات، عند الإنجاب الأول.

2000	1995	1990	1985	1980	السنة
24.9	24.5	24.2	23.7	22.7	متوسط عمر المرأة عند الإنجاب الأول

- أ اعتبر سنة 1980 السنة صفر، واستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج تربيعي وآخر تكعيبي لتمثيل معطيات الجدول.
- ب استعمل كلا النموذجين لتقدير سن الإنجاب الأول لدى المرأة في هذا المجتمع، سنة 2010.
- ج أي تقدير يبدو لك أقرب إلى الواقع؟ أوضح ذلك.

نافذة

على تاريخ الرياضيات



في سنة 1806، وجد عالم الرياضيات الفرنسي لوجندر Legendre، (1752 – 1833)، مسار أحد المذنبات، عن طريق رسم منحني يمر أقرب ما يمكن من بعض المواقع التي وجد فيها المذنب.

14 يُبيّن الجدول أدناه حجم الهواء الساخن v في المنطاد، وفقاً لدرجة حرارة الجو t .

درجة الحرارة	37	41	44	47
الحجم (m^3)	850	934	1027	1130

- أ جد نموذجاً أسياً لتمثيل معطيات الجدول.
- ب استعمل النموذج لتحديد حجم الهواء الساخن في المنطاد، إذا كانت حرارة الجو $42^\circ C$.
- ج هل سيكون النموذج دقيقاً عندما تزيد درجات الحرارة على 47 درجة؟ علّل ذلك.

15 **زراعة** يُبيّن الجدول أدناه عدد المزارع في إحدى الدول الكبرى ومتوسط مساحة المزرعة، خلال القرن العشرين.

السنة	1910	1930	1950	1969	1987	1997
عدد المزارع (مليون)	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
متوسط المساحة (فدان)	139	157	216	390	462	487

- أ استعمل عدد المزارع كمتغيّر حر لإيجاد نموذج لمتوسط مساحة المزرعة.
- ب استعمل النموذج لتقدير متوسط مساحة المزرعة، عندما يبلغ عدد المزارع مليوناً واحداً.
- ج استعمل النموذج لتقدير متوسط مساحة المزرعة، عندما يكون عدد المزارع 4.5 ملايين.
- 16 **أسواق مالية** تأسست شركة للصناعات الإسمنت سنة 1990. يُبيّن الجدول أدناه بعض أسعار السهم الواحد لهذه الشركة.

السنة	1991	1994	1997	2000	2003
سعر السهم بالدينار	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

- أ جد نموذجاً لتمثيل معطيات الجدول.
- ب ما النسبة المئوية لارتفاع ثمن سهم شركة النسر في السنة؟
- ج كان سعر سهم شركة النسر 155 520 ديناراً سنة 2004. هل يتطابق هذا السعر مع السعر الذي يُحدّده النموذج؟ أوضّح ذلك.
- د استعمل النموذج لتقدير السنة التي يبلغ فيها سعر سهم الشركة النسر 200 000 دينار.
- هـ بسبب التضخم، ارتفع ما كان سعره ديناراً واحداً سنة 1991، إلى 1.34 دينار سنة 2003. قارن بين ارتفاع سعر سهم شركة النسر ونسبة التضخم.

17 **أحياء** يُبيّن الجدول أدناه أعداد أنواع الزواحف في بعض جزر الكاريبي ومساحات تلك الجزر بالأميال المربّعة.

العدد	11	16	53	45	108	100
المساحة	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218

- أ جد نموذجاً لتمثيل معطيات الجدول، بعد اعتبار العدد متغيّراً حرّاً.
- ب استعمل النموذج لتقدير مساحة جزيرة فيها 75 نوعاً من الزواحف.
- ج ما دقّة التقدير الذي وجدته في السؤال ب؟ أوضّح ذلك.



18 تفكير ناقداً قد يكون مفيداً استعمال نموذج تربيعي لمعطيات تبدو خطية. ماذا تقول عن المعامل a في النموذج التربيعي في هذه الحالة؟

19 اكتب افترض أنك وجدت نموذجاً مناسباً لتمثيل معطيات بمتغيرين. هل تستنتج وجود علاقة سببية جيدة بين المتغيرين؟ ضمن جوابك مثلاً.

تحضير للاختبار

x	y
3	2
4	23
5	50
6	83
7	122
8	167

20 أي مما يلي ينطبق على معطيات الجدول المقابل؟

- (أ) الفروق الأولى للمتغير التابع ثابتة.
 (ب) الفروق الثانية للمتغير التابع ثابتة.
 (ج) نسب قيم المتغير التابع ثابتة.
 (د) نسب المتغير الحر ثابتة.

x	5	6	7
y	16	28	n

21 ما قيمة n التي تسمح بتمثيل معطيات الجدول المقابل بنموذج أسّي دقيق؟

- (أ) 40
 (ب) 49
 (ج) 45
 (د) 52

22 ما قيمة n التي تسمح بتمثيل معطيات الجدول المقابل بنموذج تربيعي دقيق؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

- (أ) 60
 (ب) 70
 (ج) 80
 (د) 90

تحدّ وتوسّع

23 غالباً ما تستعمل الدالة $p(t) = \frac{a}{1+be^{-kt}}$ ، المسماة دالة السوق، في الحالات التي يُشكّل فيها الطعام أو مساحة الأرض معوّفاً أمام نمو المجموعات. يُمكن استعمال الدالة $F(t) = \frac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ نموذجاً لتحديد عدد الأسماك في مزرعة لتربية الأسماك، بدلالة عدد الشهور t التي مضت على زرع بويضات السمك.

- (أ) قدّر عدد الأسماك في المزرعة بعد 10 شهور من زرعها.
 (ب) كم شهراً يستغرق بلوغ عدد الأسماك 3000؟
 (ج) جد الحد الأقصى لعدد الأسماك في المزرعة، إذا افترضت أن الدالة مناسبة للاستعمال.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

24 حاسبة بيانية يُمكنك إيجاد نوع آخر من نماذج الانحدار باستعمال الحاسبة البيانية. إنه انحدار القوى Power Regression. استعمال وظيفة PwrReg في الحاسبة البيانية لإيجاد نموذج قوى يُمثّل معطيات الجدول المقابل.

مراجعة لولبية

مثّل بيانياً كل نظام متباينات. (الدرس 2-3)

$$\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases} \quad \text{27}$$

$$\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{26}$$

$$\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases} \quad \text{25}$$

28 أعمال تُشكّل الدالة $p(x) = -x^3 + 12x^2 - 12x - 80$ نموذجاً لحساب أرباح إحدى الشركات بملايين الدنانير، بدلالة عدد الوحدات المنتجة x . (الصفوف السابقة)

أ جد أصفار هذه الدالة.

ب أي من هذه الأصفار يمثّل عدد الوحدات التي على الشركة إنتاجها لكي تنتقل من الخسارة إلى الربح؟

استعمل تركيب الدوال لتقرر إن كانت الدالة g هي الدالة العكسية للدالة f . (الدرس 4-5)

$$g(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5} ; f(x) = -4 + 5x \quad \text{30}$$

$$g(x) = \sqrt{x} + 1 ; f(x) = x^2 + 1 \quad \text{29}$$

الفصل

5

دليل الدراسة : مراجعة

5 ارسم بيان الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -2 \\ -3x+2 & x \geq -2 \end{cases}$

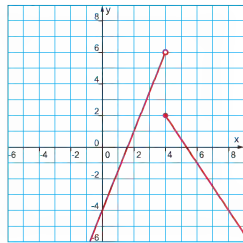
6 جِد قيمة الدالة $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+9} & x \geq 4 \\ 9-7x & x < 4 \end{cases}$ عندما $x = -6$ و $x = 10$.

ارسم بيان الدالة.

7 $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x < 0 \\ 5 & x \geq 0 \end{cases}$

8 $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x-1 & x \leq 2 \\ \sqrt{x}+2 & x > 2 \end{cases}$

9 اكتب الدالة المتفرعة القاعدة ذات البيان التالي:



10 يتقاضى ناقل طرود بريديّة 6000 دينار عن كل طرد لا تزيد كتلته على 8 kg، و 1500 دينار عن كل كيلوغرام إضافي. اكتب دالة متفرعة القاعدة عما يتقاضاه ناقل الطرود عن طرود لا تزيد كتلتها على 18 kg.

11 $g(x)$ هي الدالة الناتجة عن تحويل الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \leq 3 \\ -4x+16 & x > 3 \end{cases}$ بسحب وحدتين إلى اليسار. اكتب معادلة $g(x)$.

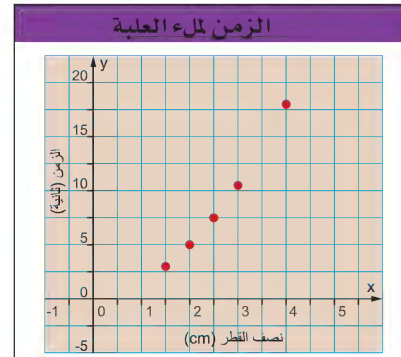
12 اكتب الدالة $h(x)$ الناتجة عن سحب $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \leq 3 \\ -4x+16 & x > 3 \end{cases}$ وحدتين إلى أعلى.

1 يهتم رئيس بلدية بتنظيف شوارعها بعد هبوب عاصفة ثلجية. يُبين الجدول كلفة تنظيف مساحات مختلفة من الشوارع. استعمل رسماً بيانياً واكتب معادلة لحساب كلفة تنظيف شارع طوله 2400 m.

طول الشارع بالأمتار	الكلفة بالدينانير
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 يخطّط نادي الثقافة لإقامة حفل تكريمي لمؤسسه. قرّر منظم الحفل أن يقدم إلى المدعوين 4 أطباق في كل منها 30 قطعة من المقبلات بالإضافة إلى 4 قطع مقبلات لكل مدعو. أنشئ جدولاً ورسماً بيانياً واكتب معادلة لتمثيل الحالة، معتمداً عدد المدعوين كمتغير حر.

3 تبيّن النقاط البيانية معطيات عن الزمن اللازم لملء عدد من اللعب الأسطوانية بدلالة نصف قطرها.



أ أنشئ جدولاً واكتب معادلة لتمثيل هذه المعطيات.

ب استعمل المعادلة التي كتبتها لتقدير الزمن اللازم لملء أسطوانة نصف قطرها 12cm.

4 جِد قيمة الدالة $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & x \leq 1 \\ x^2-6 & x > 1 \end{cases}$ عندما $x = -2$ و $x = 5$.

27 قرّرت إحدى شركات الطيران إضافة 30 000 دينار إلى ثمن كل بطاقة، بالنظر إلى ارتفاع أسعار المحروقات. وكان على الشركة أن تُضيف إلى ثمن البطاقة 9% رسوم مطارات. اكتب دالة مركّبة تمثّل الثمن الجديد لبطاقة كان ثمنها x دينارًا، قبل زيادة أسعار المحروقات والرسوم.

28 بيّن الجدول ارتفاع أسعار الدخول إلى حديقة الحيوانات بالعلاقة مع السنوات التي مضت منذ إنشائها. ادرس الفروق والنسب لتحديد أي نوع من النماذج هو الأنسب لتمثيل معطيات الجدول. استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد هذا النموذج.

أسعار الدخول إلى حديقة الحيوانات	
عدد السنوات منذ الإنشاء	السعر بالدينار
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 بيّن الجدول معطيات عن استهلاك سكان إحدى المدن للماء بدلالة درجة الحرارة.

درجة الحرارة (مئوية)	استهلاك الماء (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ جد نموذجًا تقريبيًا يمثّل هذه المعطيات.

ب استعمل النموذج لتقدير استهلاك الماء، إذا كانت درجة الحرارة $30^\circ C$.

ج كان استهلاك الماء في أحد الأيام $189\,270\,m^3$ كم بلغت درجة الحرارة في ذلك اليوم؟

13 اكتب الدالة $g(x)$ الناتجة عن سحب

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$
 وحدات إلى اليمين.

14 ارسم بيان $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ ، علمًا بأن $f(x) = 2x^2 + 1$.

15 جد $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ علمًا بأن $f(x) = x + 3$ و $g(x) = x^2 - 9$.

16 جد $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ علمًا بأن $f(x) = x + 6$ و $g(x) = \frac{18}{x+4}$. حدد مجال $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$.

$f(x) = x^2 - 5x - 14$ ، اكتب كل دالة.

و $g(x) = x - 7$

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(fg)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

$f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{8}{x+1}$ ، جد كلا مما يلي.

23 $f(g(-2))$ و $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ و $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ ومجالها.

26 $f(g(x))$ ومجالها.

الفصل

5

اختبار الفصل

جد كل دالة أو قيمة، علماً بأن $f(x) = 4x^2 - 9$ و $g(x) = 2x + 3$

$$g(f(3)) \quad \boxed{8}$$

$$(f-g)(4) \quad \boxed{7}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) \quad \boxed{10}$$

$$(fg)(5) \quad \boxed{9}$$

11 يدفع مخزن المجوهرات 10% من ثمن كل حلية كرسوم تأمين عليها. وبيعهها بثمن يبلغ 150% من كلفتها الكلية. اكتب دالة مركبة تمثل ثمن الحلية بدلالة كلفتها الأصلية c ديناراً.

12 يبين الجدول أدناه معطيات عن ثمن بعض البيوت بحسب بعدها عن وسط المدينة.

أ جد دالة تُشكل نموذجاً لدراسة ثمن البيت p بدلالة بعده d عن وسط المدينة.

ب استعمل النموذج الذي وجدته لتقدير متوسط ثمن منزل يبعد 20 km عن وسط المدينة.

أثمان المنازل	
متوسط الثمن (دينار)	البعد عن وسط المدينة (km)
118 496 000	2
109 016 000	4
100 295 000	6
92 271 000	8
84 890 000	10
78 098 000	12

1 يعمل زيار بائعاً في أحد المخازن الكبرى، ويتقاضى شهرياً 300 000 دينار يُضاف إليها 3% من مجموع مبيعاته. مثل ما يتقاضاه كريكار شهرياً بجدول ورسم بياني ومعادلة، علماً بأن مبيعاته تتراوح بين 0 و 10 000 000 دينار.

2 كان زانا يقف على صخرة عالية، حين ركل حجراً نحو الأسفل. يبين الجدول أدناه معطيات عن ارتفاع الحجر بعد عدة ثوانٍ من ركله.

أ أنشئ رسماً بيانياً ومعادلة يعبران عن ارتفاع الحجر بدلالة الزمن كمتغير حر.

ب ما ارتفاع الصخرة؟

ج ما ارتفاع الحجر بعد 10 ثوانٍ؟

د بعد كم ثانية يصل الحجر إلى الأرض؟

الارتفاع (m)	الزمن (s)
615.1	1
600.4	2
575.9	3
541.6	4
497.5	5
443.6	6

ارسم بيان الدالة.

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & x < 1 \\ 2x-6 & x \geq 1 \end{cases} \quad \boxed{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x < -2 \\ -x^2 - 4x & x \geq -2 \end{cases} \quad \boxed{4}$$

ارسم بيان $g(x)$ بمعرفة $f(x)$.

$$g(x) = -\frac{1}{2}f(x) - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x - 4 \quad \boxed{5}$$

$$g(x) = -f(x+2) \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2 \quad \boxed{6}$$

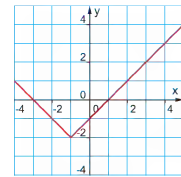
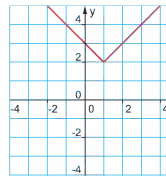
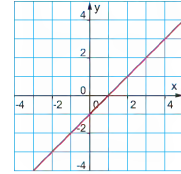
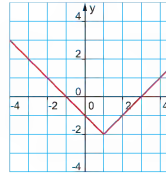
اختبار تراكمي

الفصل

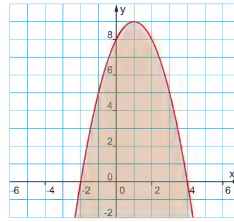
5

خيار من متعدد

1 أي بيان يمثل الدالة $f(x) = |x+1| - 2$ ؟



2 أي مما يلي حلّ البياني هو:



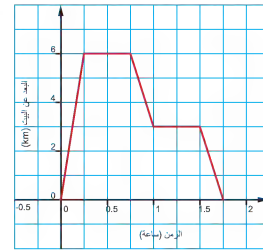
أ $y = x^2 + 2x + 8$

ب $y = -x^2 + 2x + 8$

ج $y \leq x^2 + 2x + 8$

د $y \leq -x^2 + 2x + 8$

3 أي وصف يعبر عن الرسم البياني أدناه أفضل تعبير؟



أ قطع شيركو على دراجته 6 km متوجّهاً إلى

المكتبة، حيث قضى ساعة، ثم أكمل إلى بيته.

ب قطع شيركو على دراجته 6 km متوجّهاً إلى

المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. توجّه بعد

ذلك إلى محل بيع شرائط الفيديو وقضى

نصف ساعة قبل أن يكمل إلى بيته.

ج قطع شيركو على دراجته 3 km متوجّهاً إلى

المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. قطع بعد

ذلك 3 km متوجّهاً إلى محل بيع شرائط

الفيديو، ثم أكمل إلى بيته.

د قطع شيركو على دراجته 6 km متوجّهاً إلى

المكتبة، حيث قضى نصف ساعة. قطع بعد

ذلك 3 km متوجّهاً إلى محل بيع شرائط

الفيديو، حيث قضى ساعة.

4 ما قيمة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 8 & x < -1 \\ x^3 - x^2 + 5 & x \geq -1 \end{cases}$ عندما $x = -1$ ؟

أ -13 ب -11 ج 3 د 5

5 أي مما يلي مجموعة الحل للمعادلة $\sqrt{2x-4} = x-6$ ؟

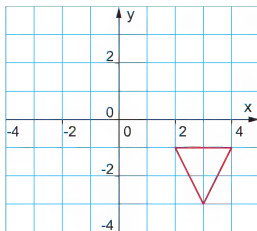
أ {10} ب {4, 10} ج {2, 20} د {2, 12}

أ أي مما يلي هو الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، حيث

$f(x) = 2x^2 - 7x - 30$ و $g(x) = x - 6$ ؟

أ $2x - 5$ ب $2x + 5$ ج $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$ د $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

أ أي تحويل مما يلي يُعطي صورة للمثلث أحد رؤوسها $(-2, 1)$ ؟



أ انعكاس حول المحور

الأول.

ب انعكاس حول المحور

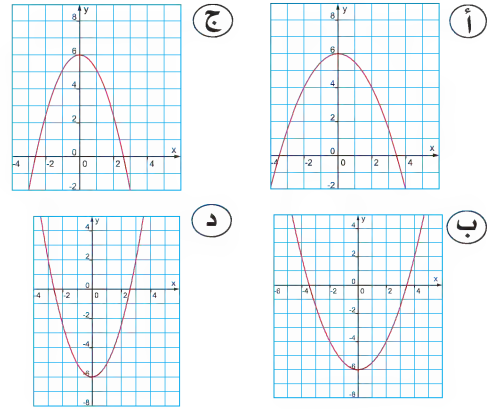
الثاني.

ج سحب 3 وحدات إلى اليسار، و3 وحدات

إلى أعلى.

د دوران حول نقطة الأصل بزاوية 180° .

8 أي بيان هو بيان الدالة $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ ؟



جواب مختصر

9 ما قيمة المقدار $\log_4 256^3$ ؟

10 ما قيمة c في $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ ؟

11 جد قيمة المقدار عندما $x = 5$.

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8} \right) \left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18} \right)$$

جواب مختصر

12 $f(x) = x^2 + 1$

أ جد العلاقة العكسية لهذه الدالة.

ب مثل بياناً الدالة $f(x) = x^2 + 1$ والعلاقة

العكسية.

ج أوضح إن كانت العلاقة العكسية دالة أم لا.

13 استعمل النقاط $(0, 6)$ ، $(2, 2)$ ، $(5, 11)$.

أ اكتب دالة تربيعية يمر ببيانها في النقاط الثلاث.

ب تحقق جبرياً من أن بيان الدالة التي كتبت يمر

في كل من هذه النقاط.

ج ارسم بيان الدالة.

د جد $f(7)$ و $f(-7)$.

14 $f(x) = x^2 - 4$

أ جد تحويلين يحولان الدالة، بحيث يُصبح رأس الدالة الناتجة عند $(1, 4)$.

ب جد تحويلين يحولان الدالة بحيث يمر بيان الدالة الناتجة في $(0, 2)$ و $(-4, 2)$.

جواب مفصل

15 ملاً آوات خزّان سيارته، وانطلق في رحلة. يُبين

الجدول معطيات عن كمية الوقود المتبقية في

الخزّان بدلالة المسافة التي قطعها السيارة.

المسافة (بالأميال)	200	150	100	50	0
كمية الوقود (بالغالون)	2	4	6	8	10

أ استعمل ثبات الفروق أو النسب لإيجاد الدالة

الأم لنموذج كمية الوقود المتبقية في خزّان

السيارة.

ب اكتب النموذج الذي يمثّل معطيات الجدول.

ج ما كمية الوقود المتبقية بعد 75 ميلاً؟

د هل يُمكن للسيارة أن تقطع 300 ميل من دون

وقود جديد؟

هـ جد الدالة العكسية، وبين ما تمثّله.

الفصل

6

المتتاليات والمتسلسلات

Sequences and Series

الفصل السادس

المتتاليات والمتسلسلات

المتتاليات	1-6
المتسلسلات	2-6
المتتاليات والمتسلسلات الحسابية	3-6

اختبار جزئي

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية	4-6
تكنولوجيا استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية	
الاستقراء الرياضي	5-6

المستطيل الذهبي

للمتتالية فيبوناتشي روابط مع الهندسة والفن والعمارة. استكشف هذه العلاقات بإستعمال المستطيلات الذهبية.

هل أنت مستعد؟

المضردات ✓

اربط المضردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | |
|--------------------|---|
| 1 الدالة الأسية | أ علاقة بين متغيرين بحيث يقابل كل قيمة للمتغير الأول قيمة وحيدة للمتغير الثاني. |
| 2 الدالة | ب دالة بيانها خط مستقيم. |
| 3 الدالة الخطية | ج دالة قاعدتها نسبة حدوديتين. |
| 4 الدالة التربيعية | د دالة معادلتها $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$. |
| | هـ دالة معادلتها $f(x) = ab^x$ ، حيث $a \neq 0$ ، $b \neq 1$ ، $b > 0$. |

كتابة المقادير الجذرية على أبسط صورة ✓

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 5 $\sqrt{25} \times \sqrt{36}$ | 6 $\sqrt{121} - \sqrt{81}$ | 7 $\sqrt{\frac{1}{49}}$ | 8 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$ |
|--------------------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------------------|

حساب القوى ✓

احسب قيمة المقدار.

- | | | | |
|------------|-------------|-------------------|-------------------------------------|
| 9 $(-3)^3$ | 10 $(-5)^4$ | 11 $1 - (-2^3)^3$ | 12 $\frac{2^2 \times 2^7}{(2^2)^5}$ |
|------------|-------------|-------------------|-------------------------------------|

حل معادلة بالنسبة إلى متغير ✓

احسب x بدلالة y .

- | | | | |
|------------------|---------------------------|-------------------|----------------------|
| 13 $y = 12x - 5$ | 14 $y = -\frac{x}{3} + 1$ | 15 $y = -9 + x^2$ | 16 $y = -4(x^2 - 9)$ |
|------------------|---------------------------|-------------------|----------------------|

حساب قيمة المقادير ✓

احسب قيمة المقدار عندما $x=2$ و $y=12$ و $z=24$.

- | | | | |
|------------------------|-----------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 17 $\frac{y(y+1)}{3x}$ | 18 $z + (y-1)x$ | 19 $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$ | 20 $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$ |
|------------------------|-----------------|----------------------------------|------------------------------------|

أمثلة مضادة ✓

جد مثلاً مضاداً يُبين عدم صحة المقولة.

- | | |
|---|--|
| 21 $n^2 = n$ ، حيث n عدد حقيقي. | 22 $n^3 \geq n^2 \geq n$ ، حيث n عدد حقيقي. |
| 23 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ ، حيث n عدد حقيقي. | 24 $\frac{2}{n} \neq \frac{n}{2}$ ، حيث n عدد حقيقي. |

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Sequence	المتتالية
Convergent sequence	المتتالية التوافقية
Divergent sequence	المتتالية التخالفية
Explicit definition	التعريف المُعلن
Finite sequence	المتتالية المنتهية
Infinite sequence	المتتالية غير المنتهية
Iteration	التكرار
Limit	النهاية
Recursive definition	التعريف المُضمر
Series	المتسلسلة
Term of a sequence	حد المتسلسلة

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل،
تابع الخطوات التالية:

1. ماذا تعني كلمة **متتالية** في الحياة اليومية؟ ماذا تعني
متتالية أعداد؟

2. تدل كلمة **منتهية** على وجود نهاية. أعط أمثلة على جمل
تستعمل كلمة **منتهية**. أوضح ما يُمكن أن يدل عليه تعبير
متتالية منتهية.

3. استند إلى معنى كلمة **منتهية**، لإعطاء أمثلة على جمل
تستعمل تعبير «غير منتهية». أوضح ما يُمكن أن يدل
عليه تعبير **متتالية غير منتهية**.

4. ماذا تعني كلمة **مسلسل** في التلفزيون؟ ماذا يمكن أن
تعني كلمة **متسلسلة** في الرياضيات؟

5. اذكر ما هو **الحد** في الحدودية، ثم اكتب وصفاً لحد
المتتالية.

في الماضي

درست سابقاً

- مجموعات الأعداد بما فيها الأعداد الطبيعية والأعداد المربعة.
- استعمال أنماط الفروق والنسب لتصنيف المعطيات.
- رسم بيانات الدوال الخطية والدوال الأسية وحساب قيمها.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- أنماطاً من الأعداد تُسمى المتتاليات، ومجاميعها وتُسمى المتسلسلات.
- طرقاً لتحديد إن كانت المتتالية حسابية أو هندسية.
- كيف نكتب المتتاليات والمتسلسلات وتحسب قيمها.

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في صفوف أعلى، عند دراسة الحساب التفاضلي والتكاملي.
- في دروس الفيزياء، لإيجاد نماذج مثل الارتفاعات المتتالية لكرة ترتطم بالأرض.
- في الحياة، لحساب نمو التوظيفات المالية.

الرياضيات

قراءة

وكتابة



استراتيجية للكتابة : استعمل حجة مقنعة

أن تكون قادراً على كتابة حجة مقنعة تتعلق بمفهوم من مفاهيم الرياضيات، يعني أنك تفهم جيداً ما تتحدث عنه. يُمكنك استعمال طريقة من أربع خطوات لكتابة مثل هذه الحجة، كما هو مبين في حل التمرين أدناه.

من كتاب الصف العاشر

اكتب أوضح الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري. أعطِ مثلاً يختلفان فيه.

الخطوة 1 حدّد الغاية.

الغاية إيضاح الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال الاختباري.

الخطوة 2 اكتب جملة تحقق الغاية.

يعتمد الاحتمال النظري على الرياضيات فحسب، بينما يستند الاحتمال الاختباري إلى نتائج تجربة.

الخطوة 3 قدّم أمثلة تدعم جوابك.

عندما نرمي قطعة نقود معدنية، فإن احتمال الحصول على الكتابة هو $\frac{\text{عدد النتائج التي تحقق الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها}}$ أي $\frac{1}{2}$.

أما الاحتمال الاختباري للحصول على الكتابة فهو $\frac{\text{عدد المرات التي ظهرت فيها الكتابة}}{\text{عدد المرات التي رمينا فيها قطعة النقود}}$

في الاحتمال الاختباري، لو اكتفينا برمي قطعة النقود مرة واحدة سنحصل على الكتابة أو على الصورة. سيكون الاحتمال الاختباري للحصول على الكتابة إما 1 (في حالة الحصول على الكتابة) وإما 0 (في حالة الحصول على الصورة). أما الاحتمال النظري للحصول على الكتابة، فيبقى $\frac{1}{2}$.

الخطوة 4 لخّص حجّتك.

بما أن الاحتمال النظري يستند فقط إلى عدد النتائج نظرياً، فهو لا يتغيّر أبداً. أما الاحتمال الاختباري فيستند إلى النتائج التجريبية، ممّا يجعله عرضة للتغيّر عند كل محاولة.

حاول

استعمل طريقة الخطوات الأربع للإجابة عن السؤالين.

1. رمت دوين مكعب الأعداد 20 مرة، وحصلت على العدد 3 مرتين. كم مرة على الأقل عليها أن ترمي المكعب بعد لكي يصبح الاحتمال الاختباري للحدث «الحصول على 3» مساوياً لاحتماله النظري؟ أوضح كيف وصلت إلى الجواب.
2. يرغب والد هشيار في إلحاق ولده بمدرسة جديدة. اختار 9 مدارس ليزورها. قرر أن يزور 3 أو 4 مدارس خلال الأسبوع القادم. كم يزيد عدد الطرق الممكنة لزيارة 4 مدارس على عدد الطرق الممكنة لزيارة 3 مدارس؟ أوضح جوابك.



مدخل إلى المتتاليات

Introduction to Sequences

1-6

من يستعمل هذا الأمر؟

تُستعمل المتتاليات لإنشاء نماذج هدفها دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية، مثل التغير في أعداد مجموعة من الأرانب مع مرور الزمن.

الأهداف

يجد الحد النوني لمتتالية.
يكتب قاعدة لمتتالية.

المفردات

Vocabulary

المتتالية

Sequence

حد المتتالية

Term of a sequence

المتتالية غير المنتهية

Infinite sequence

المتتالية المنتهية

Finite sequence

التعريف المعلن

Explicit definition

التكرار

Iteration

التعريف المضمّر

Recursive definition

وصف عالم الرياضيات الإيطالي ليوناردو فيبوناتشي، سنة 1201 م، التزايد السريع في عدد مجموعة من الأرانب تعيش في ظروف نموذجية. دُون فيبوناتشي عدد أزواج الأرانب شهراً بعد آخر، فوجد أن هذه الأعداد تتبع نمطاً سُمي فيما بعد متتالية فيبوناتشي **Fibonacci**.

المتتالية Sequence مجموعة مرتّبة من الأعداد. كل من هذه الأعداد **حد Term** من حدود المتتالية. يُمكن للمتتالية أن تكون **غير منتهية Infinite**، أي إنها تتألف من عدد غير محدود من الحدود، كمتتالية الأعداد الطبيعية، أو **متتالية منتهية Finite sequence**، أي إنها تتألف من عدد محدود من الحدود مثل 1، 2، 3، 4.

يُمكنك أن تنظر إلى المتتالية على أنها دالة يتكوّن مجالها من أعداد طبيعية متتالية، ويتكوّن مداها من مجموعة الأعداد التي تشكّل حدودها.

عوضاً عن استعمال الكتابة الدالية $a(n)$ ، يستعمل أهل الرياضيات الكتابة a_n . العدد الطبيعي n يُسمّى **رتبة الحد** a_n . فالحد الأول هو a_1 والحد الثاني هو a_2 . أما الحد ذو الرتبة n ، أو **الحد النوني**، **nth term** فهو a_n . بما أن المتتالية دالة فإن كل رتبة n يقابلها حد وحيد هو a_n .

رتبة الحد	n	1	2	3	4	5	المجال
الحد	a_n	1	1	2	3	5	المدى

في متتالية فيبوناتشي، كل من الحدين الأول والثاني يساوي 1 في حين أن كل حد من الحدود الأخرى يساوي مجموع الحدين اللذين يسبقانه مباشرة. بكتابة أخرى $a_2 = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ حيث $n \geq 3$. يُسمى مثل هذا التعريف **تعريفاً مضمراً Recursive definition**. في التعريف المضمّر يُستعمل حد سابق أو حدود سابقة لتوليد الحد التالي.

مثال 1 إيجاد حدود متتالية باستعمال التعريف المضمّر

جد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية المعرفة

بالتعريف المضمّر $a_1 = 5$ ، $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

الحد الأول مُعطى:

عوض عن a_1 بقيمته لإيجاد a_2 ، واستمر في

استعمال كل حد لإيجاد الحد الذي يليه.

الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية هي 5، 11، 23، 47، 95.

n	$2a_{n-1} + 1$	a_n
1	معطى	5
2	$2(5) + 1$	11
3	$2(11) + 1$	23
4	$2(23) + 1$	47
5	$2(47) + 1$	95

1. جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

ب $a_n = -3a_{n-1}$ ، $a_1 = 2$

أ $a_n = a_{n-1} - 8$ ، $a_1 = -5$



نقطة مراقبة

يُمكنك تعريف بعض المتتاليات تعريفاً معلناً **Explicit definition** بحيث تستطيع أن تجد قيمة أي حد بمعرفة رتبته.

مثال 2 إيجاد حدود متتالية باستعمال التعريف المعلن

جد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية المعرفة

$$a_n = 2^n - 3$$

كما يلي $a_n = 2^n - 3$. أنشئ جدولاً واحسب قيمة a_n حيث يتخذ n القيم من 1 إلى 5. الحدود الخمسة الأولى هي -1, 1, 5, 13, 29.

تحقق استعمال حاسبة بيانية. أدخل الدالة $y = 2^x - 3$ ثم أنشئ جدول قيم لها.

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	-1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29



2. جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

ب $a_n = 3n - 5$

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$



يُمكنك استعمال معرفتك للدوال لكتابة تعريف لمتتالية.

مثال 3 كتابة تعريف لمتتالية

اكتب تعريفاً ممكناً للحد النوني لكل متتالية.

أ $3, 6, 21, 24, 48$

تفحص الفروق بين كل حد والحد الذي يسبقه ونسبة كل حد إلى الحد الذي يسبقه.

النسب	2	2	2	2	
الحدود	3	6	21	24	48
الفروق الأولى	3	6	12	24	
الفروق الثانية		3	6	12	

النسب ثابتة، ما يعني أن $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ أو $a_n = 2a_{n-1}$. المتتالية هي متتالية أسية أساسها 2. انظر نمط قوى العدد 2.

$$a_1 = 3 = 3 \times 2^0, a_2 = 6 = 3 \times 2^1, a_3 = 12 = 3 \times 2^2 \dots$$

النمط $(2^{n-1}) \times 3$ هو تعريف مقبول للمتتالية. إذن $a_n = 3 \times 2^{n-1}$.

ب $2.5, 4, 5.5, 7, 8.5$

الحدود	2.5	4	5.5	7	8.5
الفروق الأولى	1.5	1.5	1.5	1.5	

بما أن الفروق الأولى ثابتة، فإن المتتالية خطية. الحد الأول هو 2.5، وتنتقل من كل حد إلى الذي يليه بإضافة 1.5.

3. اكتب تعريفاً ممكناً للحد النوني لكل متتالية.

ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

أ $7, 5, 3, 1, -1$



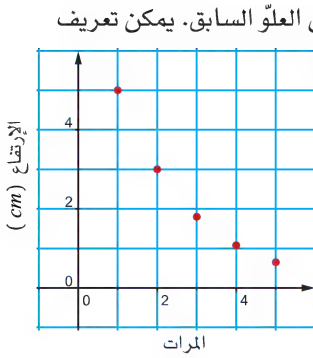
تذكر

يدل ثبات الفروق الأولى على نموذج خطي، كما يدل ثبات الفروق الثانية على نموذج تربيعي. بينما يدل ثبات النسب على نموذج أسّي.

تطبيق على الفيزياء

مثال 4

سقطت كرة على البلاط فارتفعت إلى علو 155 cm ، ثم راحت تسقط وترتدّ مرات عديدة. في كل مرة كانت ترتفع إلى 60% من العلوّ السابق. مثّل بيانيّاً متتالية الارتفاع وصف نمطها. كم سيكون علو الكرة في الارتداد التاسع؟



العلو في المرة الأولى 155 cm. العلو في كل مرة يبلغ 60% من العلوّ السابق. يمكن تعريف المتتالية كما يلي: $a_1 = 155$ ، $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ، استعمال هذا التعريف لتجد بعض حدود المتتالية ثم مثّلها بيانيّاً.

$$\begin{aligned} a_2 &= 0.6 \times 155 = 93 \\ a_3 &= 0.6 \times 93 = 55.8 \\ a_4 &= 0.6 \times 55.8 = 33.48 \end{aligned}$$

يبدو أن التمثيل البياني أسّي. استعمال النمط لكتابة تعريف مناسب للمتتالية.

حيث يدل n على رتبة علو الكرة. استعمال هذه القاعدة لحساب علو الكرة في المرة التاسعة. $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$. سترتفع الكرة عندما تعاود الارتفاع في المرة التاسعة إلى علو 2.6 cm تقريباً.

انتبه!

لا تصل بين النقاط بخط، لأن مجال الدالة هو جزء من مجموعة الأعداد الطبيعية.

4. حوض أزهار يلزم لريّه 1.6 غالون ماء كل مرة. مثّل بيانيّاً مجموع كميات الماء التي استهلكها الحوض بعد كل ريّ. صف النمط الذي حصلت عليه. ما مجموع كميات الماء التي استُهلكت بعد 10 ريّات؟



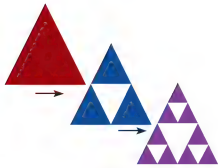
الفراكتال Fractals رسم تحصل عليه بتكرار نمطٍ مشابه لنمطٍ أساسي.

مثلث سيربنسكي Sierpinski

مثال 5

مثلث سيربنسكي هو فراكتال تحصل عليه من مثلث متساوي الأضلاع، بنزع مثلث متساوي الأضلاع من وسط المثلث الأول، ثم تكرار ذلك على كل مثلث تحصل عليه. كم سيكون عدد المثلثات في المرحلة الخامسة؟

عند كل تكرار، يتضاعف عدد المثلثات 3 مرات. ارمز بـ N_n إلى عدد المثلثات في المرحلة n . في المرحلة الأولى كان لديك مثلث واحد. في الثانية تحصل على 3 مثلثات، وهكذا...



$$N_3 = 3^2 , N_2 = 3 , N_1 = 1$$

$$N_n = 3^{n-1} \text{ يمكنك أن تكتب}$$

$$N_5 = 3^4 = 81 \text{ و } N_4 = 3^3 = 27$$

في المرحلة الخامسة سيكون عدد المثلثات 81.

5. مجموعة كانتور Cantor هي شكل فراكتال ينتج من حذف الثلث الأوسط من قطعة مستقيمة، وتطبيق هذا الإجراء على كل قطعة مستقيمة ناتجة. ما عدد القطع المستقيمة بعد تكرار الفعل للمرة الخامسة؟



فكر وناقش

1. أوضح الفرق بين تعريف المتتالية بشكل مُضمَر وتعريفها بشكل مُعلن.
2. جد 3 حدود تكمل المتتالية ... 1, 2, 4.
3. صف كيف تنظر إلى المتتالية كدالة. هل لجميع المتتاليات المجال نفسه؟ أوضح ذلك.
4. كن منظمًا انسخ الشكل المقابل ثم أكمله. لخص داخله ما تعلمته عن المتتاليات.

تعريف المتتالية	نوعا المتتاليات
أمثلة	قاعدتا تعريف ممكنتان



التمارين 1-6

تمارين موجّهة

- 1 مفردات التعريف ————— متتالية تعريف يسمح بتوليد حدّها النوني بمعرفة الحد السابق أو حدود سابقة (المُضمَر أو المُعلن).

جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

4 $a_n = \frac{a_{n-1}}{5}$; $a_1 = 500$ 3 $a_n = a_{n-1} + 11$; $a_1 = 3$ 2 $a_n = 4a_{n-1} - 1$; $a_1 = 1$

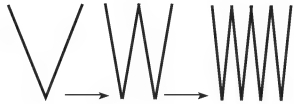
7 $a_n = -3n^2$ 6 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 5 $a_n = 12(n-2)$

10 $a_n = (n+1)^2$ 9 $a_n = 4^{n-1}$ 8 $a_n = n(n-1)$

3 اكتب تعريفًا ممكنًا للحد النوني لكل متتالية.

13 25, 15, 5, -5, -15, ... 12 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ 11 6, 9, 12, 15, 18, ...

- 4 مداخل كان مدخول آوات 25 000 000 دينار في السنة الأولى. في السنوات التالية، كان مدخوله كل سنة يزيد 5% على مدخوله في السنة السابقة. مثل بيانيًا هذه المتتالية، وصف نمطها. كم سيكون مدخوله بعد 5 سنوات؟ بعد 10 سنوات؟



- 5 فراكتال كم سيكون عدد القطع المستقيمة في الشكلين الرابع والخامس؟

تمارين وحلّ مسائل

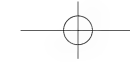
جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

18 $a_n = 1.5a_{n-1} - 2$; $a_1 = 4$ 17 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 16 $a_n = a_{n-1} - 3$; $a_1 = 7$

21 $a_n = -3a_{n-1} - 1$; $a_1 = -2$ 20 $a_n = 2n^2 - 12$ 19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$

تمارين حرة

انظر المثال	حل التمارين
1	18-16
2	21-19
3	24-22
4	25
5	26



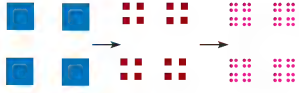
اكتب تعريفاً ممكناً للحد النوني لكل متتالية.

23 $9, 5, 1, -3, -7, \dots$

22 $2, 8, 18, 32, 50, \dots$

24 $5, 0.5, 0.05, 0.005, \dots$

25 **تصميم** وُزعت أمكنة مقاعد أفراد الأوركسترا في قاعة الموسيقى الكلاسيكية على شكل نصف دائرة، بحيث يقف قائد الأوركسترا في المركز. عدد المقاعد 16 مقعداً في الصف الأول ويزداد 4 مقاعد بالانتقال من صف إلى الصف الذي يليه. مثل بيانياً هذه المتتالية وصِف نمطها. ما عدد المقاعد في الصف السادس؟



26 **فراكتال** جد عدد المربعات في الشكلين الرابع والخامس.

جد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}, a_1 = 1$

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2, a_1 = 12$

30 $a_n = 2n^2 - 12$

29 $a_n = -a_{n-1} + 10, a_1 = -10$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

33 **خطأ في التحليل** فيما يلي محاولتان لكتابة الحدود الخمسة الأولى للمتتالية $a_n = 2n + 1, a_1 = 3$ أيهما خاطئة؟ بين الخطأ.

ب

3	7	15	31	65
---	---	----	----	----

أ

3	5	7	9	11
---	---	---	---	----

اكتب تعريفاً ممكناً للحد النوني لكل متتالية، واكتب الحد العاشر.

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \dots$

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

36 $-5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, \dots$

39 $24, 21, 16, 9, 0, \dots$

38 $0.04, 0.4, 4, 40, 400, \dots$

40 **فيبوناتشي** تذكر أن متتالية فيبوناتشي تُشكّل نموذجاً لدراسة عدد أزواج الأرانب بعد عدد معين من الشهور. تبدأ المتتالية بالعدد 1 ثم العدد 1، ويساوي كل حد مجموع الحدين السابقين له.

أ جد الحدود الاثني عشر الأولى من هذه المتتالية.

ب ما عدد أزواج الأرانب في نهاية سنة كاملة؟

41 **شطرنج** ينظم سنكر مباراة في الشطرنج بحيث يلعب كل متبار مع كل من المتبارين مرة واحدة. أنشأ جدولاً وجد أن إضافة لاعب جديد تتسبب في إضافة أكثر من مباراة.

أ مثل المتتالية بيانياً وصِف نمطها. ما الحدان التاليان؟

ب استعمل الانحدار لإيجاد قاعدة المتتالية.

ج **ماذا لو...** كيف يتغير الجدول لو توجّب على كل

متبار أن يلعب مرتين مع كل من المتبارين الآخرين؟ أنشأ جدولاً، وأوضح كيف تتغير المتتالية.

مسابقة الشطرنج

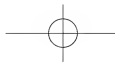
عدد اللاعبين	عدد الأدوار
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

نافذة

على تاريخ الرياضيات



تُستعمل متتالية فيبوناتشي أيضاً لاستكشاف النسبة الذهبية. تقترب نسبة كل حد إلى الذي يسبقه من النسبة الذهبية $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ كلما ازدادت رتبة الحد.



جد عدد النقاط في الرسمين التاليين من كل نمط.



44 يتألف الجسم المقابل من أشكال هندسية يتكوّن كل منها من 6 عيدان متساوية الطول. يوجد شكل واحد في الطبقة العليا و 3 أشكال في الثانية، و 6 أشكال في الثالثة، وهكذا...

أ تشكّل المتتالية $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموذجاً لحساب عدد العيدان في الطبقة ذات الرتبة n . جد الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية عندما $a_1 = 6$.

ب استعمل الانحدار لإيجاد قاعدة لهذه المتتالية.

ج كم عوداً يلزم لبناء الطبقة العاشرة؟

45 هندسة يُبين الجدول أدناه مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلّعات المنتظمة الخمسة الأولى.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية				
900°	720°	540°	360°	180°

أ اكتب تعريفاً مُعلناً لهذه المتتالية. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع منتظم اثني عشري؟

ب تذكّر أن للزوايا الداخلية في مضلع منتظم القياس نفسه. أنشئ جدولاً يُبين قياس زاوية داخلية لكل مضلع منتظم. مثل بيانياً معطيات الجدول وصف النمط.

ج اكتب تعريفاً مُعلناً لمتتالية السؤال ب.

د جد قياس زاوية داخلية في المضلع المنتظم العشاري.

46 تقدير قدّر قيمة الحد العشرين في المتتالية 7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92, ...

47 موسيقى يدل الرسم أدناه على مدة نوتات موسيقية مختلفة.



أ اكتب متتالية عددية تبين تقدّم النوتات الموسيقية. اكتب تعريفاً مُضمراً وآخر مُعلناً لهذه المتتالية.

ب تمثل نوتة كاملة 4 بيتات (Beats) ونصف النوتة بيتين، وربع النوتة بيتاً وهكذا ... اكتب متتالية تبين عدد البيئات التي يُمثّلها تتابع النوتات أعلاه. اكتب تعريفاً مُضمراً وآخر مُعلناً لهذه المتتالية. ما العلاقة التي تربط بين هذه المتتالية ومتتالية السؤال - أ؟

48 اكتب أوضح الفرق بين متتالية منتهية وأخرى غير منتهية.



تحضير للاختبار



49 أي مما يلي هو الحد التالي في المتتالية ... -9, -6, -3, 0, ...

Ⓐ 6

Ⓑ 3

Ⓒ 0

Ⓓ -3

50 أي مما يلي يُعرّف المتتالية ... 4, 12, 36, 108, ...

Ⓐ $a_n = 4 + 3n$

Ⓑ $a_n = 3 + 4n$

Ⓒ $a_n = 3a_{n-1}; a_1 = 4$ حيث $n \geq 2$

Ⓓ $a_n = 4a_{n-1}; a_1 = 3$ حيث $n \geq 2$

51 أي متتالية قاعدتها $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Ⓐ $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$

Ⓑ $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$

Ⓒ $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \dots$

Ⓓ $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$

52 أي متتالية قاعدتها $a_n = 12 - 2a_{n-1}; a_1 = 6$ ، حيث $n \geq 2$.

Ⓐ $0, 12, -12, 36, -60, \dots$

Ⓑ $6, 4, 2, 0, -2, -4, \dots$

Ⓒ $6, 0, -6, -12, -18, \dots$

Ⓓ $6, 0, 12, -12, 36, \dots$

53 **جواب مختصر** جد الحد التالي في المتتالية ... -32, 16, -8, 4, -2, ...

تحدّ وتوسّع

اكتب تعريفاً مُعلناً لكل متتالية، وجد حدّها العاشر.

54 $-2, 6, -12, 20, -30, \dots$

55 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \dots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \dots$

57 هندسة ارسم 5 دوائر. ضع نقطة على الدائرة الأولى ونقطتين على الثانية و3 نقاط على الثالثة وهكذا... في كل دائرة، صل بين كل نقطتين عليها. عدّ الحد الأعلى للمناطق غير المتقاطعة التي تتضمّنّها كل دائرة.

Ⓐ اكتب المتتالية التي حصلت عليها.

Ⓑ يبدو أن كل حد يساوي ضعف الحد الذي يسبقه. غير أن الحد السادس يبدو أقل من 32. حاول أن

تحدّد هذه المناطق في الدائرة السادسة تحديداً دقيقاً بأن تنشئ رسماً متقناً.

مراجعة لولبية

اكتب المقدار على أبسط صورة، مفترضاً أنه مُعرّف. (الصفوف السابقة)

58 $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

59 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

60 $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

61 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$

اجمع أو اطرح. (الصفوف السابقة)

62 $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

63 $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$

64 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$

65 أدب يقرأ كرمانج كتاباً من 854 صفحة بمعدل صفحة ونصف في الدقيقة. أنشئ جدولاً واكتب دالة

تمثّل عدد الصفحات الباقية بدلالة الزمن. ارسم بيان الدالة.



المتسلسلات Series

2-6

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال مجاميع المتتاليات لإيجاد قياسات منزل مبني باستعمال البطاقات. (المثال 4)

الأهداف

يحسب مجموع متتالية ويكتبه باستعمال رمز الجمع.

المفردات

Vocabulary

المتسلسلة

Series

المجموع الجزئي

Partial sum

رمز الجمع

Summation symbol

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$	2, 4, 6, 8, ...	1, 2, 3, 4	المتتالية
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$	2+4+6+8+...	1+2+3+4	المتسلسلة

بما أن أكثرية المتتاليات غير

منتهية، فغالباً ما تستعمل مجاميع

جزئية. **المجموع الجزئي**، ويُرمز

إليه بالرمز S_n ، هو مجموع n حداً

من الحدود الأولى للمتتالية.

$$\begin{aligned} \text{مجموع الحد الأول} & S_1 = 2 \\ \text{مجموع الحدين الأولين} & S_2 = 2 + 4 = 6 \\ \text{مجموع الحدود الثلاثة الأولى} & S_3 = 2 + 4 + 6 = 12 \\ \text{مجموع الحدود الأربعة الأولى} & S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 \end{aligned}$$

يُمكنك التعبير عن المتسلسلة باستعمال رمز الجمع Σ على الصورة التالية.

$$\begin{aligned} \text{قيمة } k \text{ الأخيرة} & \rightarrow \sum_{k=1}^{k=5} 2k \\ \text{قيمة } k \text{ الأولى} & \rightarrow \sum_{k=1}^{k=5} 2k \end{aligned}$$

استعمال رمز التجميع

مثال 1

اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$$

جد التعريف المعلن للمتتالية.

$$\text{التعريف المعلن} \quad a_k = (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

اكتب مجموع الحدود الستة الأولى،

$$\text{استعمل رمز الجمع} \quad \sum_{k=1}^{k=6} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15$$

جد التعريف المعلن للمتتالية.

$$\text{التعريف المعلن} \quad a_k = 3k$$

اكتب مجموع الحدود الخمسة الأولى.

$$\text{استعمل رمز الجمع} \quad \sum_{k=1}^{k=5} 3k$$

انتبه!

للمتتاليات المتناوبة الإشارة، استعمال $(-1)^{k+1}$ إذا كانت إشارة a_1 (+)، و $(-1)^k$ إذا كانت إشارة a_1 (-).

1. اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

$$-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12$$

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{2}{25} + \frac{2}{36}$$

نقطة مراقبة



حساب قيم المتسلسلات

مثال 2

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها .

$$\sum_{k=3}^6 \frac{1}{2^k}$$

انشر المتسلسلة بالتعويض عن k .

احسب القوى.

بسط.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^6 \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^4 (10 - k^2)$$

$$\text{انشر} \quad \sum_{k=1}^4 (10 - k^2) = (10 - 1^2) + (10 - 2^2) + (10 - 3^2) + (10 - 4^2) = 10$$

انتبه!

قد تبدأ بعض المتتاليات بالحد a_k حيث $k \neq 1$ كما هي حال المثال 2-أ.

2. انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

$$\sum_{k=1}^5 -5(2)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^4 (2k-1)$$



ليس من السهل دائماً إيجاد مجموع عدد من حدود متتالية. لكن يمكن إيجاد صيغ لحساب مجموع الحدود الأولى لبعض المتتاليات الخاصة. المتسلسلة الثابتة متسلسلة جميع حدودها متساوية: $3+3+3+3+3$.

$$\sum_{k=1}^5 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{عدد الحدود } 5} = 5 \times 3 = 15$$

مجموع الحدود الأولى للمتسلسلة الثابتة هو $c = ac$. $\sum_{k=1}^n c = ac$

$$\sum_{k=1}^n c = \underbrace{c+c+c+\dots}_{\text{عدد الحدود } n} = c \times n = 15$$

المتسلسلة الخطية متسلسلة للعدد مثل مجموع الأعداد الطبيعية الأولى حتى رتبة معينة. فمجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى (باستثناء الصفر) هو:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

أعد ترتيب الأعداد:

$$\begin{aligned} &= (1+10) + (2+9) + (3+8) + (4+7) + (5+6) \\ &= 11+11+11+11+11 = 5 \times 11 = 55 \end{aligned}$$

لاحظ أن 5 هو نصف عدد الحدود، وأن $10+1=11$ هو مجموع الحد الأول والحد الأخير. تسمح لك هذه الملاحظة بتوقع أن يكون مجموع الأعداد الطبيعية حتى الرتبة

$$n \quad (\text{باستثناء الصفر}) \text{ هو: } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ أو } \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$$

قوانين الجمع



المتسلسلة التربيعية	المتسلسلة الخطية	المتسلسلة الثابتة
$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^n a = na$

استعمال قوانين الجمع

مثال 3

احسب قيمة المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 \quad \text{ا} \quad \text{متسلسلة ثابتة}$$

طريقة ثانية انشر واحسب المجموع.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{6 \text{ حدود}} = 48$$

طريقة أولى استعمال قانون الجمع.

تتضمن المتسلسلة 6 حدود.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} k \quad \text{ب} \quad \text{متسلسلة خطية}$$

طريقة ثانية انشر واحسب المجموع.

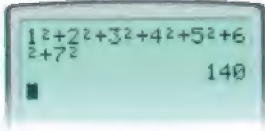
$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

طريقة أولى استعمال قانون الجمع.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 \quad \text{ج} \quad \text{متسلسلة تربيعية}$$

طريقة ثانية استعمال الحاسبة البيانية.



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=7} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{7(7+1)(2 \times 7+1)}{6} \\ &= \frac{56(15)}{6} \\ &= 140 \end{aligned}$$

3. احسب قيمة المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{k=10} k^2 \quad \text{ج}$$

$$\sum_{k=1}^{k=15} k \quad \text{ب}$$

$$\sum_{k=1}^{k=60} 4 \quad \text{ا}$$

تطبيق على حل المسائل

مثال 4

يرغب سيبان في بناء منزل من بطاقات اللعب شبيه
بما تراه في الصورة المقابلة. وهو يريد الحصول
على أكبر عدد ممكن من الطوابق. كم طابقاً يمكنه
أن يبني علماً بأن عدد بطاقات اللعب 52؟



افهم المسألة

المطلوب معرفة عدد الطوابق.

اذكر المعلومات المهمة:

- عدد البطاقات 52.
- المطلوب أكبر عدد ممكن من الطوابق.

خطّط

أنشئ مخططاً للمنزل لكي تفهم المسألة بشكل أفضل. جد نمطاً لعدد البطاقات في كل طابق.
اكتب المتسلسلة، واحسب قيمتها.

انتبه!

عندما تعد حدود متسلسلة
ينبغي أن يتضمن العدّ الحدين
الأول والآخر.

فعدد حدود المتسلسلة $\sum_{k=5}^{k=10} 8$
هو 6 وليس 5، لأن قيم n هي
5، 6، 7، 8، 9، 10.

نقطة
مراقبة

3 حل

أنشئ جدولاً ورسوماً.

الطابق	1	2	3	4
الرسم				
عدد البطاقات	2	5	8	11

يزداد عدد البطاقات 3 بطاقات من طابق إلى آخر. اكتب متسلسلة تُبين عدد البطاقات في n طابقاً.

حيث يرمز k إلى رتبة الطابق، ويرمز n إلى عدد الطوابق.

$$\sum_{k=1}^{k=4} (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) = 26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) + (3 \times 5 - 1) = 40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} (3k-1) = (3 \times 1 - 1) + (3 \times 2 - 1) + (3 \times 3 - 1) + (3 \times 4 - 1) + (3 \times 5 - 1) + (3 \times 6 - 1) = 57$$

بما أن عدد البطاقات 52، فإن أكبر عدد من الطوابق يُمكن لسيان أن يحصل عليه هو 5 طوابق.

4 تحقق

استعمل الجدول لإكمال النمط. فالطابق الخامس سوف يتضمن 14 بطاقة.

$S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$. لو أراد سيان أن يُضيف طابقاً آخر لاحتاج إلى بطاقات أكثر من البطاقات المتبقية لديه وعددها 12.

4. بعد الانتهاء من ري الحديقة، قام مهند بلف خرطوم الماء عدة لفات لركنه في مكان أمين. كان طول كل لفة يزيد 6 cm على طول اللفة السابقة، وكان طول اللفة الأولى 34 cm. ما طول الخرطوم إذا كان عدد اللفات 12؟



فكر وناقش

- أوضح الفرق بين المتتالية والمتسلسلة.
- أوضح ما يرمز إليه كل متغير في $\sum_{k=1}^{k=n} k$.
- كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. اكتب الصيغة العامة لكل مفردة، ومثالاً عليها.

المتتالية	المتسلسلة

الصيغة العامة

مثال



2-6 التمارين

تمارين موجّهة

1 مفردات أعط مثلاً على استعمال رمز الجمع.

1 انظر المثال

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

$$-3+6-9+12-15 \quad 3$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25} \quad 2$$

$$100+95+90+85+80 \quad 5$$

$$1+10+100+1000+10\,000 \quad 4$$

2 انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

2 انظر المثال

$$\sum_{k=5}^{k=10} -5k \quad 8$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1} \frac{12}{k^2} \quad 7$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} k^3 \quad 6$$

3 احسب قيمة المتسلسلة.

3 انظر المثال

$$\sum_{k=15}^{k=35} 6 \quad 11$$

$$\sum_{k=1}^{k=20} k^2 \quad 10$$

$$\sum_{k=1}^{k=21} k \quad 9$$

12 تمويل يدفع كارزان قسطاً شهرياً مقداره 285 000 دينار، من ثمن سيارة اشتراها.

4 انظر المثال

كم سيكون قد دفع بعد سنتين؟ بعد 5 سنوات؟

تمارين وحلّ مسائل

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6} \quad 14$$

$$1.1+2.2+3.3+4.4+5.5 \quad 13$$

$$1+2+4+8+16+32 \quad 16$$

$$11-12+13-14+15-16 \quad 15$$

انشر المتسلسلة، واحسب قيمتها.

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1} \quad 19$$

$$\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k \quad 18$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1) \quad 17$$

احسب قيمة المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{k=25} k^2 \quad 22$$

$$\sum_{k=1}^{k=88} 2.5 \quad 21$$

$$\sum_{k=1}^{k=99} k \quad 20$$

23 يعرض أحد المخازن الكبرى عبوات الحساء موضبة في عدة طبقات، بحيث تحوي الطبقة العليا

عبوة واحدة، تحوي كل طبقة عبوة زيادة على الطبقة التي تعلوها. كم عبوة يُعرض،

علماً بأن عدد الطبقات 20؟

اكتب المتتالية باستعمال رمز الجمع.

$$25+24+23+\dots+2+1 \quad 25$$

$$-1+4-9+16-25+36 \quad 24$$

$$-800-80-8-0.8-0.08 \quad 27$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243} \quad 26$$

$$9-16+25-36+49-64 \quad 29$$

$$10.8+10.5+10.2+9.9 \quad 28$$

$$0+3.4+6.8+10.2+13.6 \quad 31$$

$$-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9 \quad 30$$

$$1000+100+10+1+\frac{1}{10} \quad 33$$

$$3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5} \quad 32$$

تمارين حرة

أنظر	لحل
المثال	التمارين
1	16-13
2	19-17
3	22-20
4	23

34 سفر تبلغ المسافة بين بغداد وبلدة هاوكار 596 km . قرّر هاوكار أن يقطع نصف المسافة

في اليوم الأول ونصف المتبقي في اليوم الثاني، ونصف المتبقي في اليوم الثالث، وهكذا...

اكتب متسلسلة باستعمال رمز الجمع يكون مجموعها ما قطعه هاوكار في 5 أيام.

كم كيلومتراً اجتاز في الأيام الخمسة؟

35 أمان يعتمد مدير أحد المخازن الكبرى طريقة الشجرة لإبلاغ مستخدميه قرار إقفال المخزن في

حالة الطوارئ. تقوم هذه الطريقة على إبلاغ المدير 3 مستخدمين بقرار الإقفال، ويقوم كل منهم

بإبلاغ ثلاثة مستخدمين آخرين وهكذا...

أ أنشئ مخطط شجرة من ثلاثة مستويات لتمثيل هذه الطريقة.

ب اكتب متسلسلة تكون قيمتها عدد المستخدمين الذين تم إبلاغهم على 5 مستويات واحسب قيمة

هذه المتسلسلة.

ج ماذا لو...؟ افترض أن المدير قرر أن يكون الإبلاغ لخمس مستخدمين بدل 3 في كل مستوى.

فكم يكون عدد المستخدمين الإضافيين الذين يتم إبلاغهم على 5 مستويات؟

انشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

$$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2k} \quad \mathbf{38}$$

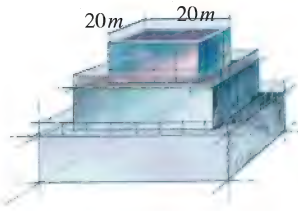
$$\sum_{k=1}^{k=6} (-1)^k (5k) \quad \mathbf{37}$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} (k^2 + 1) \quad \mathbf{36}$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} \frac{k^2}{5k} \quad \mathbf{41}$$

$$\sum_{k=6}^{k=11} 12(k-2) \quad \mathbf{40}$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} (3k-2) \quad \mathbf{39}$$



42 عمارة يبين الشكل المقابل تصميم فندق على شكل

هرم. لكل طابق شكل مربع يزيد طول ضلعه 10 m

على طول ضلع الطابق الذي يقع فوقه مباشرة.

أ اكتب متسلسلة تمثل مجموع مساحات n طابقاً

في هذا الفندق.

ب ما الحد الأدنى لعدد الطوابق بحيث لا يقل مجموع

مساحات الطوابق كلها عن 50000 m^2 ؟

تقدير قدر ذهنياً كل مجموع. قارن، بعد ذلك، بين تقديرك وبين المجموع

الذي تحصل عليه باستعمال الحاسبة.

$$1+3+5+\dots+97+99 \quad \mathbf{44}$$

$$10+11+12+\dots+29+30 \quad \mathbf{43}$$

$$(-2)+(-4)+(-6)+\dots+(-98)+(-100) \quad \mathbf{45}$$

46 فيزياء يبين الجدول المقابل المسافات التي

يقطعها جسم يسقط سقوطاً حراً في كل فترة

من الفترات الزمنية المتساوية. (تم إهمال

وحدات المسافة والزمن في هذا التمرين لعدم

تأثيرها).

أ اكتب متسلسلة على 5 فترات لكل نموذج،

واحسب قيمتها. ماذا يُمثل كل مجموع؟

ب اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع. احسب مجموع الحدود العشرة الأولى في

كل منها.

ج المسافات التي يقطعها الجسم الذي يسقط سقوطاً حراً وفقاً للنموذج المعمول به حالياً هي:

.. 1, 4, 9, 16, 25, قارن بين نموذج كل من ليوناردو وغاليليو وبين النموذج المعمول به حالياً.

نافذة

على تاريخ الرياضيات



اكتشف عالم الرياضيات الألماني فرديريك غوس في العاشرة من عمره طريقة سريعة لحساب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100. أدت طريقته إلى اكتشاف قانون حساب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n ، أيًا يكن العدد الطبيعي الموجب n .

47 تفكير ناقد يُمكن تطبيق بعض الخصائص الرياضية على المتسلسلات.

أ احسب مجموع كل من $\sum_{k=1}^{10} 3k$ و $\sum_{k=1}^{10} k$. اكتب مقولة تستند إلى ما توصلت إليه.

ب احسب كلاً من $\sum_{k=1}^{10} 2$ و $\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} (k+2)$. اكتب مقولة تستند إلى ما توصلت إليه.



48 تستعمل المتسلسلة $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k)$ لإيجاد عدد العيدان الضرورية لإنشاء هرم من n طبقة شبيهة بالهرم المبين في الصورة.

أ انشر المتسلسلة العائدة إلى هرم من 5 طبقات، واحسب قيمتها لتعرف عدد العيدان.

ب استعمل القاعدة

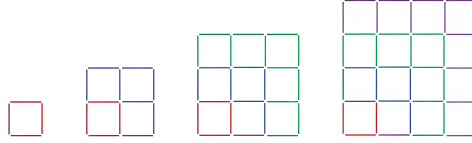
$$\sum_{k=1}^n ax_k = a \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{والقاعدة} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

لكتابة المتسلسلة $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k)$ كمجموع ناتج ضرب متسلسلة

تربيعية في عدد، مع ناتج ضرب متسلسلة خطية في عدد.

ج استعمل قوانين جمع المتسلسلات الخطية والتربيعية وما حصلت عليه في السؤال ب، لإيجاد عدد العيدان الضرورية لبناء هرم من 17 طبقة.

49 خطوات متعددة تفحص النمط التالي القائم على استعمال عيدان كبريت لبناء مربعات يزداد طول ضلعها واحداً في كل مرة.



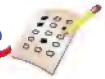
أ اكتب متتالية تبين عدد العيدان المضافة لإنشاء مربع جديد.

ب اكتب متسلسلة باستعمال رمز التجميع لتمثيل عدد العيدان المستعملة لإنشاء مربع طول ضلعه 6 عيدان. كم عوداً لزم لإنشاء هذا المربع؟

50 تفكير ناقد هل المجموع $1+3+5+7+9$ مساوٍ للمجموع $9+7+5+3+1$ ؟ هل تكتب هاتان المتسلسلتان على الصورة نفسها باستعمال رمز الجمع؟

51 اكتب أوضح السبب الذي يجعل S_n يُمثل مجموعاً جزئياً وليس المجموع الكلي لحدود متتالية.

تحضير للاختبار



52 أي مما يلي هو نشر المتسلسلة $\sum_{k=1}^7 (-1)^k (3k)$ ؟

ج $3-6+9-12+15-18+21$

أ $3+6+9+12+15+18+21$

د $-3-6-9-12-15-18-21$

ب $-3+6-9+12-15+18-21$

53 أي مما يلي هو كتابة المتسلسلة $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ باستعمال رمز الجمع؟

د $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k+2}$

ج $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{2k}$

ب $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{2^k}$

أ $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{2}$

54 أي مما يلي يُشكّل قيمة $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ ؟

273 (د)

91 (ج)

55 (ب)

36 (أ)

55 أي مما يلي يُشكّل قيمة $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ ؟

$\frac{5}{8}$ (د)

$\frac{7}{12}$ (ج)

$\frac{4}{45}$ (ب)

$\frac{1}{45}$ (أ)

56 **جواب مختصر** أنشأ بريز هرمًا من علب المرطبات، بحيث تشكّلت الطبقة العليا من علبة واحدة، بينما تشكّلت الطبقة التي تليها من 4 علب، والثالثة من 9 علب، والرابعة من 16 علبة... هل تستعمل متتالية أم متسلسلة لإيجاد عدد العلب في الطبقة 20؟ أوضح ذلك.

تحدّ وتوسّع

اكتب المتسلسلة باستعمال رمز الجمع، ثم جد قيمتها.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2$ 58

$1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ 57

أثبت كلاً من خصائص المتسلسلات.

$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$ 60

$\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a \sum_{k=1}^{k=n} x_k$ 59

61 **تفكير ناقد** ما هو، في رأيك، قيمة المتسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

إذا تابعت على هذا المنوال؟ أوضح ذلك.

مراجعة لولبية

جد التقاطعات الأفقية والعمودية لكل مستقيم، ثم ارسمه. (الصفوف السابقة)

$10x + 15y = -5$ 64

$-6x + 3y = -18$ 63

$3x - 4y = 12$ 62

65 **عمارة** تشكّل الدالة $h(t) = 8|t - 6| + 10$ نموذجًا لحساب ارتفاع مصعد عن الأرض، بالأقدام،

بدلالة الزمن t ، بالثواني. ما أقل ارتفاع للمصعد؟ (الصفوف السابقة)

جد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. (الدرس 6 - 1)

$a_n = \frac{4^n}{2}$ 68 $a_n = (a_{n-1})^2 - 1$ ؛ $a_1 = 2$ 67 $a_n = \left(\frac{1}{2}n + 2\right)^2$ 66



المتتاليات والمتسلسلات

الحسابية Arithmetic Sequences and Series

3-6

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال المتتاليات الحسابية لتقدير كلفة إرسال طرود بريدية.

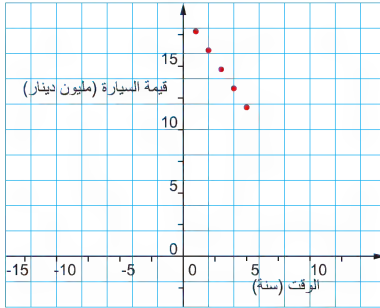
الأهداف

يجد الحد المطلوب في متتالية حسابية.
يجد قيم المتسلسلات الحسابية.

المفردات

Vocabulary

المتتالية الحسابية
Arithmetic Sequence
المتسلسلة الحسابية
Arithmetic Series



اشترى سمكو سيارة جديدة ثمنها 16 750 000 دينار.

تُقدّر مديرية الضرائب قيمة هذه السيارة سنة بعد أخرى كما يلي 17 750 000 ، 16 250 000 ، 14 750 000 ، 13 250 000 ...

تقول عن هذه المتتالية أنها **متتالية حسابية** Arithmetic sequence لأن الفرق d بين كل

حد والحد الذي يليه ثابت، ولا يساوي 0. يُسمّى هذا الفرق **الفرق المشترك** Common difference. الفرق المشترك للمتتالية الحسابية أعلاه هو 1 500 000 دينار.

الحد	a_1	a_2	a_3	a_4
القيمة	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000
الفروق		-1500	-1500	-1500

تذكر أن الفروق الأولى لقيم دالة خطية فروق ثابتة. لاحظ التالي: إذا مثّلت بيانياً الأزواج المرتبة (n, a_n) تحصل على نقاط تقع كلها على مستقيم واحد. هكذا يُمكنك النظر إلى المتتالية الحسابية على أنها دالة خطية مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.

تمييز المتتاليات الحسابية

مثال 1

حدّد إن كانت المتتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جد الفرق المشترك والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, \dots$

الحدود $-3, 2, 7, 12, 17$
الفروق $5, 5, 5, 5$

المتتالية حسابية، والفرق المشترك بين حدودها هو 5. الحد التالي هو $22 = 17 + 5$.

ب $-4, -12, -24, -40, -60, \dots$

الحدود $-4, -12, -24, -40, -60$
الفروق $-8, -12, -16, -20$

المتتالية ليست حسابية لأن الفروق الأولى غير متساوية.

1. حدّد إن كانت المتتالية حسابية، أو لا. إذا كانت حسابية، جد الفرق المشترك والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.



أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \dots$ **ب** $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \dots$

قيمة السيارة سنة بعد سنة	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$

تفحص النمط في الشكل المقابل.
كل حد يساوي الحد الأول مضافاً إليه أحد مضاعفات الفرق المشترك.
الحد الثاني = الحد الأول + الفرق المشترك
الحد الثالث = الحد الأول + 2 الفرق المشترك
وهكذا...
يمكنك تعميم هذا النمط بالقانون التالي:

القانون العام للمتتاليات الحسابية

يُحسب الحد النوني لمتتالية حسابية بالقانون $a_n = a_1 + (n-1)d$ حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، و d ويسمى أساس المتتالية.



مثال 2 حساب الحد النوني لمتتالية حسابية منشورة

جد الحد العاشر في المتتالية الحسابية ... 4, 11, 18, 25, 32

الخطوة 1 جد أساس المتتالية. $d = 25 - 32 = -5$

الخطوة 2 احسب الحد العاشر باستعمال القانون.

$$\begin{aligned} \text{القانون.} \quad a_n &= a_1 + (n-1)d \\ \text{عوّض.} \quad a_{10} &= 32 + (10-1)(-5) \\ \text{بسّط.} \quad &= -31 \end{aligned}$$

الحد العاشر في هذه المتتالية هو -31.

تحقق أكمل المتتالية.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	-3	-10	-17	-24	-31

2. جد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

9.2, 9.15, 9.1, 9.05, ...

-3, -5, -7, -9, ...



من طالب إلى طالب

Plot1 Plot2 Plot3		
Y1=32+(X-1)(-7)		
Y2=		
X	Y1	
8	-12	
9	-19	
10	-26	
11	-33	

أحب أن أتحقق من قيمة حد باستعمال الحاسبة البيانية.
أدخل إلى الحاسبة دالة الحد العام. أدخل، في المثال 2 ،
 $y = 32 + (x-1)(-7)$
أستعمل، بعد ذلك، وظيفة الجدولة. أبدأ ب 1 ($n=1$) ، وأستعمل
خطوة مقدارها 1. بعد ذلك، أقرأ قيمة الحد الذي أريد. إنها
قيمة y التي تقابل رتبة الحد.

إيجاد الحدود الناقصة.

مثال 3

جد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $-17, \square, \square, \square, 11$.
الخطوة 1 جد الأساس.

القانون.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

عوّض.

$$-17 = 11 + (5-1)d$$

بسّط.

$$-7 = d$$

الخطوة 2 جد الحدود الناقصة باستعمال $a_1 = 11$ و $d = -7$.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$

$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$

$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$

3. جد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $0, \square, \square, \square, 2$.

نقطة
مراقبة

بما أن الفروق بين حد وسابقه في متتالية حسابية، هي فروق ثابتة، فإن معرفة حدّين تكفي لإيجاد الأساس.

إيجاد الحد النوني لمتتالية حسابية بمعرفة حدّين.

مثال 4

جد الحد السادس في متتالية حسابية، علماً بأن $a_9 = 120$ و $a_{14} = 195$.
الخطوة 1 جد الفرق المشترك.

القانون.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

اعتبر $a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$. ضع 9 بدل 1.

بسّط.

$$a_{14} = a_9 + 5d$$

عوّض.

$$195 = 120 + 5d$$

حلّ.

$$15 = d$$

الخطوة 2 جد a_1 .

القانون.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

عوّض.

$$120 = a_1 + (9-1)(15)$$

بسّط.

$$120 = a_1 + 120$$

حلّ.

$$0 = a_1$$

الخطوة 3 اكتب قاعدة المتسلسلة واستعملها لإيجاد a_6 .

القانون.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

عوّض.

$$a_n = 0 + (n-1)(15)$$

بسّط.

$$a_6 = 0 + (6-1)15$$

$$= 75$$

الحد السادس في هذه المتتالية هو 75.

تذكّر

إذا عُلم حدان a_m و a_n من متتالية حسابية، فإن الأساس يُساوي $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.

4. جد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

نقطة
مراقبة

ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$

كتبت في الدروس السابقة متسلسلات، وحسبت قيمها. المتسلسلة الحسابية

Arithmetic Series متسلسلة متتالياتها حسابية. يُمكنك أن تجد بسهولة قانونًا لحساب قيمة

متسلسلة حسابية حتى رتبة معينة، كما يلي:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + a_n \\ S_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_1 \\ 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

مجموع n مقدار كل منها يساوي $a_1 + a_n$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \text{ أو } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابية

في الجبر	بالأعداد	بالكلمات
$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$ حيث n عدد الحدود و a_1 الحد الأول و a_n الحد الأخير.	مجموع $2 + 4 + 6 + 8 + 10$ $S_5 = 5 \left(\frac{2+10}{2} \right) = 5(6) = 30$	مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابية هو ناتج ضرب عدد هذه الحدود في متوسط الحدين الأول والأخير.



إيجاد قيمة متسلسلة حسابية

مثال 5

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

ب $\sum_{k=1}^{12} (3+4k)$

جد الحدين a_1 و a_{12} .

$$a_1 = 3 + 4(1) = 7$$

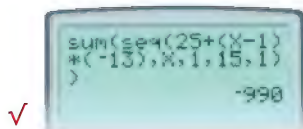
$$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$$

جد S_{12} .

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{12} = 12 \left(\frac{7+51}{2} \right) = 348$$

استعمل الحاسبة البيانية للتحقق.



✓

أ S_{15} في المتسلسلة

$$25 + 12 + (-1) + (-14) + \dots$$

جد الأساس.

$$d = 12 - 25 = -13$$

جد الحد a_{15} .

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13) = -157$$

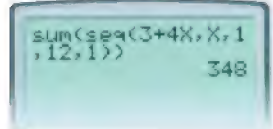
جد S_{15} .

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{15} = 15 \left(\frac{25 + (-157)}{2} \right)$$

$$= 15(-66) = -990$$

استعمل الحاسبة البيانية للتحقق.



✓

انتبه

هذه المجاميع جزئية. لا تستطيع أن تجد مجموع متسلسلة حسابية غير منتهية، لأن قيم حدودها تتزايد أو تتناقص إلى ما لا نهاية.

5. جد المجموع المطلوب لكل متسلسلة حسابية.

ب $\sum_{k=1}^{15} (50 - 20k)$

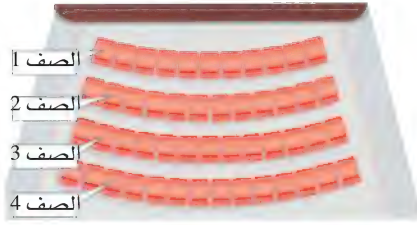
أ S_{16} في المتسلسلة $12 + 7 + 2 + (-3) + \dots$





مثال 6

تطبيق على المسارح



تُشكّل أعداد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى في الجناح الأوسط من أحد المسارح العالمية، متتالية حسابية.

أ ما عدد المقاعد في الصف الـ 14 ؟

اكتب القانون مستعملًا $a_1 = 11$ و $d = 1$.

اكتب قانون الحد النوني.

عوّض.

بسّط.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$$

$$= 11 + 13$$

$$= 24$$

عدد المقاعد في الصف الرابع عشر 24 مقعدًا.

ب ما عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 كلها؟

جد S_{14} باستعمال قانون مجموع الحدود الأولى في متسلسلة حسابية.

القانون.

عوّض.

بسّط.

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{14} = 14 \left(\frac{11 + 24}{2} \right)$$

$$= 14 \left(\frac{35}{2} \right) = 245$$

عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى هو 245 مقعدًا.

6. ماذا لو... ؟ افترض أن عدد المقاعد في كل صف ابتداء من الثاني يزيد

مقعدين على الصف الذي أمامه.

أ ما عدد المقاعد في الصف الـ 14 ؟

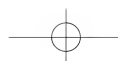
ب ما عدد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى ؟



فكر وناقش

1. قارن بين المتتالية الحسابية والدالة الخطية.
2. ما معنى أن يكون أساس متتالية حسابية سالبًا؟
3. كيف تجد الحد السادس في متتالية حسابية إذا عرفت الحدين الثالث والرابع؟
4. كيف تجد الأساس في متتالية حسابية إذا عرفت الحدين السابع والثاني عشر؟
5. كن منظمًا انسخ المخطط المقابل ثم أكمله.
املا كل إطار بحيث تبين ما فهمته من المتتاليات الحسابية.

الخصائص	التعريف
قوانين	أمثلة
المتتاليات الحسابية	



3-6 التمارين

تمارين موجّهة

- 1 مفردات** المقدار $10 + 20 + 30 + 40 + 50$ هو (متتالية حسابية أو متسلسلة حسابية).
- 1 انظر المثال** حدّد إن كانت كل متتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جد الأساس والحد التالي.
- 28, 21, 15, 10, 6, ... **3** 46, 39, 32, 25, 18, ... **2**
- $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ **4**
- 2 انظر المثال** جد الحد الثامن في كل متتالية حسابية.
- 10, $9\frac{3}{4}$, $9\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{4}$, ... **6** 3, 8, 13, 18, ... **5**
- $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \dots$ **7**
- 3 انظر المثال** جد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.
- 1.4, \square , \square , \square , $-1, \dots$ **10** 9, \square , \square , \square , 37, ... **9** 13, \square , \square , 25, ... **8**
- 4 انظر المثال** جد الحد التاسع في كل متتالية حسابية.
- $a_6 = -11$, $a_3 = -5$ **13** $a_4 = 12.6$, $a_3 = 12.2$ **12** $a_5 = 19$, $a_4 = 27$ **11**
- $a_8 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{4}$ **16** $a_{11} = -28$, $a_7 = -42$ **15** $a_{20} = 50$, $a_{10} = 100$ **14**
- 5 انظر المثال** جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة.
- $\sum_{k=1}^{k=12} (-2+6k)$ **18** $5+9+13+17+\dots$ في المتسلسلة S_{15} **17**
- $3.2+2.9+2.6+2.3+\dots$ في المتسلسلة S_{18} **19**
- 6 انظر المثال** أجور التحق بـ 1250 000 دينار سنوياً. يزداد مرتبته 26 000 000 دينار على أن
- أ) كم سيبلغ مرتبه في السنة السادسة؟
- ب) كم سيكون مجموع ما تقاضاه من أجور في السنوات الست الأولى؟

تمارين وحل مسائل

- حدّد إن كانت المتتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جد الأساس والحد التالي.
- $-2, -12, -22, -32, -42, \dots$ **22** 288, 144, 72, 36, 18, ... **21**
- $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \dots$ **23**
- جد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.
- $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ **25** 12, 11.9, 11.8, 11.7, ... **24**
- $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \dots$ **26**
- جد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.
- $-29, \square, \square, -2, \dots$ **28** 77, \square , \square , \square , 33, ... **27**
- $2.3, \square, \square, \square, 1.5, \dots$ **29**

تمارين حرة

أنظر	حل
المثال	التمارين
1	23-21
2	26-24
3	29-27
4	32-30
5	35-33
6	36

جد الحد الثاني عشر في كل متتالية حسابية.

$$a_{25} = -58, a_{22} = -49 \quad \boxed{32}$$

$$a_8 = 46, a_4 = -2 \quad \boxed{31}$$

$$a_5 = 16.2, a_4 = 18.4 \quad \boxed{30}$$

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

$$S_{15} \text{ في المتسلسلة } -18 + (-16) + (-14) + \dots \quad \boxed{34} \quad \sum_{k=1}^{20} (88 - 3k) \quad \boxed{33}$$

36 استهلاك اشترت كازين ثوباً بالتقسيط. دفعت للبائع 15000 دينار في الأسبوع الأول، واتفقت معه على زيادة القسط 5000 دينار كل أسبوع.

أ كم ستدفع في الأسبوع التاسع؟

ب كم سيكون مجموع دفعاتها عند نهاية الأسبوع التاسع؟

37 ساعات تدق ساعة الساحة دقة عند الساعة الواحدة، ودقتين عند الساعة الثانية، وهكذا ...

أ كم دقة تدق الساعة من الساعة 1 بعد الظهر حتى منتصف الليل؟ على مدى 24 ساعة؟

ب **ماذا لو...؟** تدق ساعة البلدية دقة كل نصف ساعة. اكتب المتتالية التي تمثل الدقات المسموعة عند كل ساعة. وما عدد الدقات المسموعة؟

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

$$\sum_{k=1}^{18} \left(-33 + \frac{5}{2}k\right) \quad \boxed{40}$$

$$\sum_{k=1}^{15} (4 - 0.5k) \quad \boxed{39}$$

$$\sum_{k=1}^{16} (555 - 11k) \quad \boxed{38}$$

$$S_{18} \text{ في المتسلسلة } 2 + 9 + 16 + 23 + \dots \quad \boxed{42}$$

$$S_{16} \text{ في المتسلسلة } 7.5 + 7 + 6.5 + \dots \quad \boxed{41}$$



43 عمارة تم إنشاء هرم اللوفر في باريس أمام متحف

اللوفر وذلك في ثمانينيات القرن العشرين. شُيّد هذا الهرم باستعمال ألواح من الزجاج. يتألف الهرم من مستويات. يتضمن المستوى الأعلى 4 ألواح ويزداد عدد الألواح 4، بالانتقال الى المستوى الأدنى منه.

أ استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة تحدّد عدد الألواح الكلي في n مستوى.

ب لو كان الهرم يتألف من 18 مستوى، فكم سيكون عدد ألواح الزجاج؟

ج في الحقيقة، تم استعمال عدد من الألواح يقلّ 11 لوحاً عما حسبته لإنشاء مدخل إلى الهرم.

ما عدد ألواح الزجاج التي يتضمنها هرم اللوفر؟

44 فيزياء ترتفع أبراج المياه عالياً لكي تصل المياه إلى كل بيت. كلما ارتفع الخزان متراً واحداً

ازداد ضغط المياه 9.73 كيلو باسكال.

أ اكتب متتالية تُبيّن ضغط المياه مع ارتفاع الخزان متراً بعد آخر.

ب ما الحد الأدنى لارتفاع الخزان حتى يصل ضغط المياه إلى 345 كيلو باسكال؟

ج ما الحد الأدنى لارتفاع الخزان حتى يصل ضغط المياه إلى 690 كيلو باسكال،

وهو المستوى الأفضل المتعارف عليه لضغط الماء؟

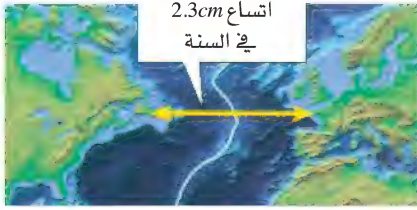
د مثّل المتتالية بيانياً، وناقش العلاقة بين ضغط المياه في السؤالين ب و ج.

نافذة

على الساعة

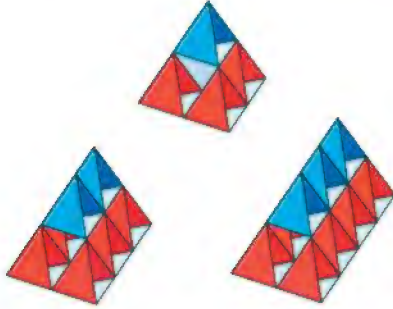


من أهم معالم مدينة لندن، عاصمة بريطانيا، ساعة بيغ بن الشهيرة. تقع هذه الساعة في ساحة البرلمان البريطاني. يعود اسم هذه الساعة Big Ben إلى جرسها الضخم الذي تبلغ كتلته 13.8 طن والذي يذق للإعلان عن الوقت.



45 جيولوجيا تبعد قارة أمريكا الشمالية سنوياً عن القارة الأوروبية.

- أ كم ستبتعد أمريكا الشمالية عن أوروبا بعد 50 سنة؟
 ب بعد كم سنة سيزيد البعد بين القارتين كيلومتراً واحداً على الأقل؟



- 46** يُمكنك تركيب نموذج هرمي وحيد الرأس من طابقيين باستعمال 4 أهرامات ثلاثية القاعدة. لكي ترُكَّب نموذجاً برؤوس متعددة من طابقيين، يلزمك 3 إهرامات إضافية في كل مرة، كما تُبين ذلك الصورة المقابلة.
- أ كم هرمًا ثلاثي القاعدة يلزمك لبناء نموذج من طابقيين له 20 رأساً؟
 ب رُكِّب سولاف 20 نموذجاً من طابقيين رؤوسها من 1 إلى 20 على التوالي. كم هرمًا ثلاثي القاعدة استعملت؟

- 47 أجور** يعرض أحد نوادي كرة السلة على مدرِّب للفريق أجراً مقداره 395 000 دينار في الأسبوع الأول، وزيادة 45 000 دينار كل أسبوع بغية تشجيع المدربين الناجحين على التقدم إلى الوظيفة. تقاضى المدرب 755 000 دينار في آخر أسبوع من موسم التدريب . كم أسبوعاً دام هذا الموسم؟
- 48 تفكير ناقداً** ما الحد الأدنى من الحدود التي عليك معرفتها لتكتب قاعدة متتالية حسابية؟ كم نقطة يلزمك لكتابة معادلة مستقيم؟ هل من علاقة بين الجوابين؟ أوضح ذلك.

- 49 اكتب** الفرق المشترك في متتالية حسابية عدد موجب. ما الذي يحدث للحد a_n عندما تتزايد قيمة n باستمرار؟ ما الذي يحدث له إذا كان الفرق المشترك سالباً؟

تحضير للاختبار

50 أي مما يلي متتالية حسابية؟

- أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
 ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \dots$
 ج $2, 4, 8, 16, \dots$
 د $2, 4, 7, 11, \dots$

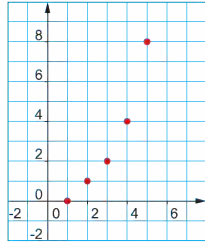
- 51** يتقاضى أحد منظّمي الحفلات 45 ألف دينار، يُضاف إليها 12 ألف دينار عن كل شخص. أي من المتتاليات أدناه تعبّر عن الحالة؟

- أ $a_n = 45 + 12(n-1)$
 ب $45, 57, 69, 81, 93, \dots$
 ج $a_n = 57 + 12n$
 د $57, 69, 81, 93, 105, \dots$

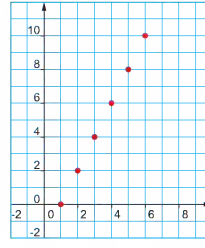
52 أي مما يلي الأعداد الناقصة في المتتالية الحسابية 40, 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4, 0 ؟

- أ $11, 22, 33$
 ب $13, 22, 31$
 ج $14, 24, 34$
 د $16, 24, 36$

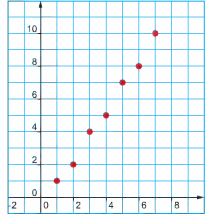
53 أي رسم بياني يمثل متتالية حسابية؟



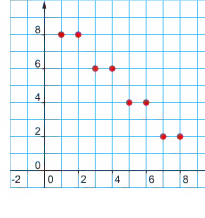
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

54 أي مما يلي مجموع المتسلسلة $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$ ؟

ب $\sum_{k=1}^{k=6} (22 - 3k)$

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 19 - 3k$

د $\sum_{k=1}^{k=6} (22 - 3(k-1))$

ج $\sum_{k=1}^{k=6} 19 - 4k$

55 **جواب مختصر** ما الحد الثالث عشر في المتتالية الحسابية $54, 50, 46, 42, \dots$ ؟

تحدّ وتوسّع

56 لديك حدان a_n و a_m من حدود متتالية حسابية.

أ بين أن الأساس في هذه المتتالية الحسابية هو $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

ب استعمل القاعدة الجديدة لإيجاد الأساس عندما $a_{12} = 88$ و $a_{36} = 304$

57 جد قاعدة لا تتضمن من الحدود غير الحد الأول، لحساب مجموع متتالية حسابية. متى يكون مناسباً استعمال هذه القاعدة؟

58 مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتالية حسابية هو 60. ما هذه الحدود إذا كان ناتج ضربها يساوي 7 500 ؟

59 **تفكير ناقد** ما معنى أن تكون المساواة $a_{2n} = 2a_n$ صحيحة في متتالية حسابية؟

مراجعة لولبية

اذكر إن كانت الدالة الأسية دالة نمو أو دالة تراجع. (الدرس 4 - 1)

60 $f(x) = 1.25(0.75)^x$

61 $f(x) = 1.43(5.32)^x$

62 $f(x) = 0.92(0.64)^x$

63 **أصوات** تشكّل الدالة $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ، حيث يمثل L مستوى شدة الصوت بالديسيبل و I شدة الصوت، و I_0 شدة عتبة السمع، نموذجاً لحساب مستوى شدة الأصوات،

جد مستوى شدة صوت شدته $10^{9.2} I_0$.

اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز الجمع. (الدرس 6 - 2)

65 $\frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} + 4$

64 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

67 $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1 - \frac{4}{3} - \frac{5}{3}$

66 $-1 + 2 + 7 + 14 + 23$

اختبار جزئي

الفصل

6

1-6 مدخل إلى المتتاليات

جد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

$$a_n = n^2 - 2n \quad 4 \quad a_n = 2a_{n-1} - 12, a_1 = -1.3 \quad 3 \quad a_n = 4^{n-1} \quad 2 \quad a_n = \frac{2}{3}n \quad 1$$

اكتب تعريفاً معلناً ممكناً لكل متتالية.

$$-2, -8, -18, -32, -50, \dots \quad 6 \quad 8, 11, 14, 17, 20, \dots \quad 5$$

$$437, 393, 349, 305, 261, \dots \quad 8 \quad 1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \dots \quad 7$$

9 تسير حافلة بسرعة 55 km/h. انطلقت الحافلة من الكيلومتر 18 من الطريق وحافظت على سرعتها. عند أي كيلومتر من الطريق تكون الحافلة بعد 4 ساعات؟ مثل بيانياً المتتالية لـ n ساعة، وصِف النمط.

2-6 المتسلسلات ورمز الجمع

اشر المتسلسلة واحسب قيمتها.

$$\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^k (k^2 - 2) \quad 12 \quad \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{k}{k+2} \right) \quad 11 \quad \sum_{k=1}^{k=4} (-14 - 2k) \quad 10$$

جد قيمة المتسلسلة.

$$\sum_{k=1}^{k=15} k \quad 15 \quad \sum_{k=1}^{k=40} k^2 \quad 14 \quad \sum_{k=1}^{k=5} \frac{1}{2} \quad 13$$

16 عدد مقاعد الصف الأول في أحد المسارح 20 مقعداً. يزداد عدد المقاعد من صف إلى الصف الذي يليه 3 مقاعد. ما مجموع المقاعد في المسرح، علماً بأن عدد صفوفه 12 صفاً؟

3-6 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

جد الحد الثامن في كل متتالية حسابية.

$$-5, -13, -21, -29, \dots \quad 18 \quad 10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \dots \quad 17$$

$$a_{13} = 186 \text{ و } a_{10} = 141 \quad 20 \quad a_5 = 80 \text{ و } a_2 = 57.5 \quad 19$$

جد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

$$31, \square, \square, \square, 79, \dots \quad 22 \quad -23, \square, \square, -89, \dots \quad 21$$

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

$$\sum_{k=1}^{k=8} 4k \quad 24 \quad S_{10} \text{ في المتسلسلة } 40 + 30 + 20 + 10 + \dots \quad 23$$

$$-6 - 1 + 4 + 9 + \dots \text{ في المتسلسلة } S_{14} \quad 26 \quad \sum_{k=1}^{k=11} (0.5k + 5.5) \quad 25$$

27 قرر بيشرو توفير بعض ما يُعطيه إياه والده في صندوق خاص. قرر أن يودع الصندوق ألف دينار في الأسبوع الأول من السنة، و 1500 ألف دينار في الأسبوع الثاني، وألفي دينار في الأسبوع الثالث، وهكذا... كم سيودع الصندوق في الأسبوع الأخير من السنة؟ (تذكر أن السنة تتألف من 52 أسبوعاً). كم سيكون في الصندوق عند نهاية العام؟

4-6

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية Geometric sequences and Series

من يستعمل هذا الأمر؟

يُمكن لمخططي المباريات الرياضية استعمال المتتاليات والمتسلسلات الهندسية لتحديد عدد المباريات في كل دوري (مثال 6).

الأهداف

يجد حدود متتالية هندسية بما فيها المتوسط الهندسي. يجد قيم المتسلسلات الهندسية.

المفردات

Vocabulary

المتتالية الهندسية

Geometric Sequence

المتوسط الهندسي

Geometric mean

المتسلسلة الهندسية

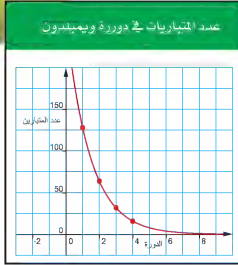
Geometric Series

فازت سيرينا ولياس، من بين 128 متبارية، في كرة المضرب للسيدات في ويمبلدون Wimbledon سنة 2003. في نهاية كل مباراة بين لاعبتين، تتابع الفائزة اللعب بينما تخرج الخاسرة من الدورة. هذا يعني أن عدد المباريات ينخفض إلى النصف في نهاية كل دورة. يُمكن التعبير عن أعداد المباريات الباقية بعد كل دورة باستعمال متتالية هندسية. في متتالية هندسية **Geometric sequence**، تكون النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه ثابتة ومختلفة عن 1. تُسمى هذه النسبة أساس المتتالية **Common ratio**. أساس المتتالية الهندسية أعلاه هي $\frac{1}{2}$.

الدورة	1	2	3	4
العدد	128	64	32	16

$$\frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad \frac{32}{64} = \frac{1}{2} \quad \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \quad \text{النسب}$$

تذكر أن للدوال الأسية نسبة مشتركة. عندما تمثل بيانياً الأزواج المرتبة (n, a_n) لمتتالية هندسية، تقع النقاط التي رسمتها على منحنٍ أسّي، كما يُبين ذلك الرسم البياني المقابل. وهكذا تستطيع أن تنظر إلى المتتالية الهندسية كما لو أنها دالة أسية مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية.



تمييز المتتاليات الهندسية

مثال 1

حدّد إن كانت المتتالية هندسية أو لا. إذا كانت هندسية، حدّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد معطى.

<p>ج 6, 10, 15, 21, ...</p> <p>6 10 15 21</p> <p>الفروق 4 5 6</p> <p>النسب $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$</p> <p>المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.</p>	<p>ب 8, 16, 24, 32, ...</p> <p>8 16 24 32</p> <p>الفروق 8 8 8</p> <p>النسب $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$</p> <p>المتتالية حسابية.</p> <p>الأساس $d = 8$</p>	<p>أ 8, 12, 18, 27, ...</p> <p>8 12 18 27</p> <p>الفروق 4 6 9</p> <p>النسب $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$</p> <p>المتتالية هندسية.</p> <p>الأساس $r = \frac{3}{2}$</p>
--	---	---

1. حدّد إن كانت المتتالية هندسية أو لا. إذا كانت هندسية، حدّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد معطى.

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \dots$

ج -50, -32, -18, -8, ...

كل حد في متتالية هندسية هو ناتج ضرب الحد الذي يسبقه في الأساس، مما يُعطي التعريف المضمر لهذه المتتالية على الشكل التالي.

$$\text{الأساس} \leftarrow a_n = \underbrace{a_{n-1}}_{\text{الحد السابق}} r \rightarrow \text{الحد النوني}$$

يمكنك أيضًا أن تستعمل تعريفًا معلنًا لإيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية. كل حد هو ناتج ضرب الحد الأول في قوة من قوى الأساس، كما يُبين ذلك الجدول التالي.

عدد اللاعبات في كل دورة في ويمبلدون					
الدورة	1	2	3	4	n
عدد اللاعبات	128	64	32	16	a_n
القاعدة	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

القانون العام للمتتاليات الهندسية

يُحسب الحد النوني a_n لمتتالية هندسية بالقانون

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، و r أساسها.



مثال 2 إيجاد الحد النوني في متتالية هندسية منشورة

جد الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... -80, 40, -20, 10, -5

الخطوة 1 احسب الأساس باستعمال القانون. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

الخطوة 2 احسب الحد التاسع باستعمال القانون.

القانون.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

عوّض.

$$a_9 = -5(-2)^{9-1}$$

بسّط.

$$a_9 = -5(256) = -1280$$

الحد التاسع في هذه المتتالية هو -1280.

تحقق أكمل المتتالية.

$$a_5 = -80$$

$$a_6 = -80(-2) = 160$$

$$a_7 = 160(-2) = -320$$

$$a_8 = -320(-2) = 640$$

$$a_9 = 640(-2) = -1280 \quad \checkmark$$

2. جد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \dots$

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \dots$



إيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية بمعرفة حدّين

مثال 3

جد الحد العاشر في متتالية هندسية علماً بأن $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$.

الخطوة 1. جد الأساس.

القانون.

$$a_7 = a_5 r^{7-5}$$

بسّط.

$$a_7 = a_5 r^2$$

عوّض.

$$384 = 96r^2$$

اقسم كل طرف على 96.

$$4 = r^2$$

جد الجذر التربيعي لكل طرف.

$$\pm 2 = r$$

الخطوة 2. جد a_1 .

ادرس كل حالة من حالتَي r على حدة.

القانون.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

عوّض.

$$96 = 6(-2)^{5-1}$$

$$96 = a_1 (2)^{5-1}$$

بسّط.

$$6 = a_1$$

$$6 = a_1$$

الخطوة 3. اكتب قاعدة المتتالية، واستعملها لإيجاد a_{10} .

القانون.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

عوّض.

$$a_n = 6(-2)^{n-1}$$

$$a_n = 6(2)^{n-1}$$

عوّض عن n بـ 10.

$$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$$

$$a_{10} = 6(2)^{10-1}$$

بسّط.

$$a_{10} = -3072$$

$$a_{10} = 3072$$

الحد العاشر في هذه المتتالية هو 3072 أو -3072.

3. جد الحد السابع في كل متتالية هندسية.

نقطة مراقبة



ب $a_4 = 48$ و $a_2 = 768$

أ $a_5 = -40$ و $a_4 = -8$

إذا كان a, b, c ثلاثة حدود متتالية موجبة، في متتالية هندسية، فإن $b = \sqrt{ac}$

لذلك يعرف المتوسط الهندسي لعددتين موجبتين x و y بأنه \sqrt{xy} .

المتوسط الهندسي

في كل متتالية هندسية حدودها موجبة، كل حد هو متوسط هندسي للحدّين المحيطين به.

اعلم

و
احفظ

إيجاد المتوسط الهندسي

مثال 4

جد المتوسط الهندسي للعددتين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{32}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

4. جد المتوسط الهندسي للعددتين 16 و 25.

نقطة مراقبة



كما هي حال المتسلسلات الحسابية، فإن **المتسلسلة الهندسية Geometric Series** هي متسلسلة متتاليها هندسية. يُمكنك أن تجد بسهولة قانوناً لحساب مجموع متسلسلة هندسية حتى رتبة معينة كما يلي:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1}$$

$$-rS_n = -a_1r - a_1r^2 - \dots - a_1r^{n-1} - a_1r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

مجموع الحدود الأولى في متسلسلة هندسية

يُحسب مجموع الحدود الأولى (S_n) في متسلسلة هندسية $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ باستعمال القانون.

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right); r \neq 1$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية و r أساسها.



مثال 5 إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

أ S_7 في المتسلسلة $3 - 6 + 12 - 24 + \dots$

الخطوة 1 جد النسبة المشتركة.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

الخطوة 2 جد S_7 حيث $a_1 = 3$

$r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$S_7 = 3 \left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} \right)$$

$$= 3 \left(\frac{1-(-128)}{3} \right) = 129$$

استعمل الحاسبة البيانية للتحقق.

ب $\sum_{k=1}^{k=5} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$

الخطوة 1 جد الحد a_1 .

$$a_1 = \left(\frac{1}{3} \right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^0 = 1$$

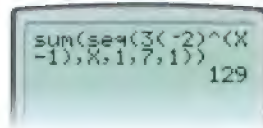
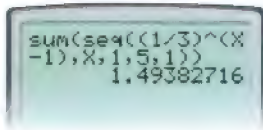
الخطوة 2 جد S_5 .

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

$$S_5 = 1 \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

استعمل الحاسبة البيانية للتحقق.



تذكر

هذه المراجع جزئية، لأن كلا منها مجموع عدد منته من الحدود. سوف تتعلم في الدرس 5 - 6 كيف تجد مجموع بعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.

5. جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

أ S_8 في المتسلسلة $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

ب $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$





تطبيق في الرياضة.

مثال 6

أجريت في ألعاب كرة المضرب في ويمبلدون 128 متبارية، استمرت المباريات حتى بقيت فائزة واحدة. كم مباراة جرت في هذه الألعاب؟

الخطوة 1 اكتب متتالية.

اكتب n = عدد الدورات

a_k = عدد المباريات في الدورة k

S_n = العدد الكلي للمباريات في n دورة

$a_1=64$ وبما أن عدد المباريات في كل دورة هو نصف عددها

$$a_n = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

في الدورة السابقة، فإن $r = \frac{1}{2}$.

الخطوة 2 جد عدد الدورات.

$$1 = 64 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

تتضمن الدورة الأخيرة مباراة واحدة

$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

اعزل الجزء الأسّي من المقدار بالقسمة على 64.

$$\left(\frac{1}{2} \right)^6 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

اكتب $\frac{1}{64}$ على صورة قوة من قوى $\frac{1}{2}$.

$$6 = n - 1$$

ساو بين الأسين.

$$7 = n$$

بسّط.

الخطوة 3 جد العدد الكلي للمباريات.

$$S_7 = 64 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)} \right) = 127$$

استعمل قانون مجموع المتسلسلة الهندسية

إذن تضمّنت الدورة 127 مباراة.

6. تدفع شركة كبرى 84 000 000 دينار سنوياً كإيجار لمقرّها. ويزداد هذا المبلغ 8% سنوياً. كم تدفع الشركة على مدى 6 سنوات؟



فكّر وناقش

1. جد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الهندسية ... 6, 3 ثم جد الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الحسابية ... 3, 6.

2. قارن بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي للعددين 4 و 16.

3 كن منظماً انسخ المخطط المقابل ثم أكمله.

املا كل إطار بحيث تُبين ما فهمته عن المتتاليات الهندسية.

التعريف	الخصائص
أمثلة	قوانين
المتتاليات الهندسية	



التمارين

4-6

تمارين موجّهة

- 1 مفردات** الحد الواقع بين حدّين غير متتاليين في متتالية هندسية هو ——— (متوسط هندسي أو متسلسلة هندسية).
- 1 انظر المثال** حدّد إن كانت كل متتالية هندسية أم حسابية أم غير ذلك. إذا كانت هندسية، جد الأساس والحد التالي.
- 2** $-10, -12, -14, -16, \dots$ **3** $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$ **4** $-320, -80, -20, -5, \dots$
- 2 انظر المثال** جد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.
- 5** $2, 6, 18, 54, 162, \dots$ **6** $5000, 500, 50, 5, 0.5, \dots$ **7** $-0.125, -0.25, -0.5, 1, -2, \dots$
- 3 انظر المثال** جد الحد السادس في المتتالية الهندسية المعرفة بحدّين.
- 8** $a_5 = -4, a_4 = -12$ **9** $a_5 = 108, a_2 = 4$ **10** $a_5 = 12, a_3 = 3$
- 4 انظر المثال** جد المتوسط الهندسي لكل عددين.
- 11** $\frac{3}{8}$ و 6 **12** 2 و 32 **13** 12 و 192
- 5 انظر المثال** جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.
- 14** S_8 في المتسلسلة $2 + 0.2 + 0.02 + \dots$ **15** $\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$ **16** S_5 في المتسلسلة $12 - 24 + 48 - 96 + \dots$ **17** $\sum_{k=1}^{k=9} 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$
- 6 انظر المثال** **18 أجور** مدرس لغة أجره في سنته الأولى 8000000 دينار. يزداد هذا الأجر بنسبة 5% سنوياً. كم سيكون أجره في عامه العشرين من الخدمة؟ كم سيكون قد تقاضى خلال تلك الفترة؟

تمارين وحلّ مسائل

حدّد إن كانت المتتالية هندسية أم حسابية أم غير ذلك. إذا كانت هندسية، جد الأساس والحد التالي.

- 19** $-36, -49, -64, -81, \dots$ **20** $-2, -6, -18, -54, \dots$ **21** $2, 7, 12, 17, \dots$
- 22** $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \dots$ **23** $3, -6, 12, -24, 48, \dots$ **24** $3200, 1600, 800, 400, \dots$
- 25** $8, 24, 72, 216, 648, \dots$ **26** $a_5 = 162, a_4 = 54$ **27** $a_6 = 20.25, a_5 = 13.5$ **28** $a_6 = -100, a_4 = -4$
- 29** 9 و $\frac{1}{9}$ **30** 18 و 2 **31** $\frac{1}{5}$ و 45
- جد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.**
- جد الحد السابع في المتتالية الهندسية المعرفة بحدّين.**
- جد المتوسط الهندسي لكل عددين.**

تمارين حرة

انظر	لحل
المثال	التمارين
1	21-19
2	25-22
3	28-26
4	31-29
5	35-32
6	36

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

32 S_6 في المتسلسلة $1+5+25+125+\dots$ 33 S_8 في المتسلسلة $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots$

34 $\sum_{k=1}^{k=6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ 35 $\sum_{k=1}^{k=7} 8(10)^{k-1}$

36 أجد لك والدان، وجدّان وجدّتان، وأربعة جدود وأربع جدّات.

أ ما عدد أسلافك خلال 6 أجيال قبلك؟ خلال 21 جيلاً؟

ب ماذا لو...؟ كيف تتغيّر قاعدة حساب عدد الجدود والجدات إذا كنت أنت الجيل الأول؟

جد لكل متتالية هندسية: تعريفها المعلن، وحدها العاشر ومجموع حدودها العشرة الأولى.

37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ 38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \dots$

39 $8, 16, 32, 64, \dots$ 40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \dots$

41 $162, -54, 18, -6, \dots$ 42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \dots$

43 تحف اشترت شاناز طابعاً بريدياً قديماً، ودفعت 20 000 دينار ثمناً له. قدّرت شاناز أن ثمن هذا الطابع سيزداد 15% سنوياً.

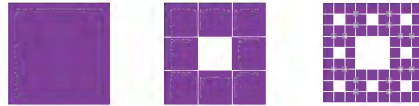
أ كم سيصبح ثمن الطابع بعد 4 سنوات؟ بعد 6 سنوات؟

ب هل ازدادت قيمة الطابع في السنوات الأربع الأولى أكثر مما زادت في السنوات الأربع الثانية أم لا؟ أوضح ذلك.

44 أقساط جامعية عند ولادة شيرين قرّر جدّها وجدّتها أن يدفعها عنها أقساط الانتساب إلى الجامعة. أعطياها 50 ديناراً يوم مولدها، قررا أن يدفعها لها في كل سنة ضعف ما دفعاه في السنة السابقة. ما المبلغ الذي تجمع لدى شيرين عند بلوغها 18 سنة؟ عند بلوغها 21 سنة؟

45 تكنولوجيا تلقّيت بالبريد الإلكتروني رسالة تمنّى لك فيها مرسلها الحظ السعيد، وطلب إليك أن ترسلها إلى 5 أصدقاء، طالباً إليهم أن يرسلها كل منهم بدوره إلى 5 أصدقاء، وهكذا... ما عدد هذه الرسائل بعد 10 مستويات.

46 فراكتال Fractals سجادة سيربنسكي Sierpinski شكل توالدي يرتكز على مربع. يتم في كل دورة نزع قلب كل مربع مظلل كما يبين ذلك الشكل أدناه.



أ معتبراً مساحة المربع الأول 1 m^2 ، اكتب متتالية تُبين المساحة المظللة الناتجة في كل دورة.

ب في أي دورة ستقل المساحة المظللة عن $\frac{1}{2} \text{ m}^2$ ؟

47 ورق يبلغ سمك ورقة بيضاء 0.1 mm. إذا طويت الورقة يتضاعف سمكها.

أ أظهرت الدراسات أن بمقدورك طي هذه الورقة 7 مرات على الأكثر. كم سيكون سمك الورقة بعد طيها سبع مرات؟

ب افترض أن بإمكانك الاستمرار في طي الورقة قدر ما تريد. بعد كم مرة يصبح سمك الورقة أكبر من ارتفاع قمة إيفرست Everest الذي يبلغ 8 850 m؟

48 جد متتالية حسابية وأخرى هندسية، بحيث تبدأ كل منها كما يلي: 1, 4, ...

نافذة

على التحف



كانت سيارة الرولس رويس العائدة لمغني الروك اند رول جون لينون الأعلى، فقد بيعت بثمن قدره 2.2 مليون دولار.

قياسات الورق	
القياس	البعدان (بالإنش)
A	$8\frac{1}{2} \times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

49 قياس يُبين الجدول المقابل قياسات الورق الأكثر استعمالاً في الطباعة المكتبية.

- أ) تفحص طول وعرض الورقة من كل قياس، أي علاقة تكتشف؟
- ب) ما العلاقة التي تربط بين مساحات الأوراق من مختلف القياسات. ما اسم هذه العلاقة؟

50 بلغت إيرادات أحد الأفلام السينمائية 60 مليار دينار في الأسبوع الأول من عرضه، و 9.6 مليار دينار في الأسبوع الثالث. افترض أن من الممكن تمثيل الإيرادات الأسبوعية بمتتالية هندسية.

- أ) قدر إيرادات الفيلم في الأسبوع الثاني.
- ب) ما نسبة تدني الإيرادات من أسبوع إلى آخر؟
- ج) في أي أسبوع تتوقع أن تقل الإيرادات عن مليار دينار؟
- د) استمر عرض الفيلم 8 أسابيع. ما مجموع إيرادات عرضه؟

51 أحياء نوع من البكتيريا يزداد عدده وفق متتالية هندسية. كان عدد البكتيريا 4 بعد ساعة واحدة، وأصبح 1024 بعد 5 ساعات. كم عدد هذه البكتيريا بعد ساعتين؟ بعد 3 ساعات؟ بعد 4 ساعات؟

52 تمويل استأجرت إحدى المؤسسات مقراً لها بمبلغ قدره 750 000 دينار شهرياً خلال السنة الأولى، على أن يزداد هذا المبلغ 10% سنوياً بعد السنة الأولى.

- أ) اكتب متسلسلة تمثل ما تدفعه المؤسسة سنوياً على مدى 5 سنوات.
- ب) استعمل رمز الجمع لتمثل ما تدفعه المؤسسة سنوياً على مدى 10 سنوات، ثم جد قيمته.

مقياس النوتات	
النوتة	ترددها بالهيرتز
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	

53 موسيقى تُشكّل ترددات بعض النوتات الموسيقية متتالية هندسية حيث C_0 هي النوتة الأضعف.

- أ) تُعد النوتة C_4 النوتة الوسطى في هذا النوع. ما تردداتها؟
- ب) اكتب متتالية هندسية تمثل تردد النوتات من هذا النوع، معتبراً $a_1 = C_1$.
- ج) لا تستطيع الأذن البشرية أن تسمع نوتات تزيد تردداتها

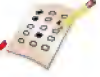
على 20 000 هيرتز. ما رتبة أول نوتة من هذا النوع لا تسمعها الأذن البشرية؟

54 طب سجل أحد المستشفيات خلال موجة من انتشار الإنفلونزا دخول 16 حالة في الأسبوع الأول، و 56 حالة في الأسبوع الثاني، و 196 حالة في الأسبوع الثالث.

- أ) اكتب متتالية هندسية تمثل أعداد حالات الإصابة بالإنفلونزا.
- ب) إذا استمر ازدياد حالات الإصابة على هذا المنوال، ففي أي أسبوع يبلغ مجمل عدد الحالات 10000 إصابة؟

55 تفكير ناقد ما تأثير أن يكون أساس متتالية هندسية r أكبر من 1 على حدودها؟ ما تأثير أن يكون $0 < r < 1$ ؟

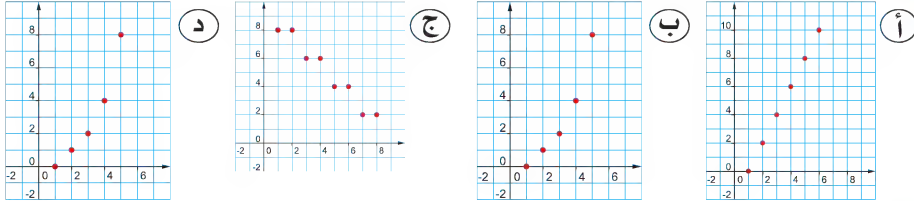
56 اكتب ما الذي يحدث لحدود متتالية هندسية لو أن حدّها الأول تضاعف 3 مرات؟ ما الذي يحدث لمجموع حدودها الأولى؟



57 أي مما يلي مجموع الحدود الستة الأولى في المتتالية الهندسية $4.5 + 9 + 18 + 36 + \dots$ ؟

- أ 67.5 ب 144 ج 283.5 د 445.5

58 أي رسم بياني يبدو أنه يمثل متتالية هندسية؟



59 أي مما يلي الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية حيث $a_9 = -768$ و $a_7 = -192$ ؟

- أ 3, -6, 12 ب -3, 12, -48, ...
ج -3, 6, -12 أو -3, -6, -12 د -3, -12, -48 أو 3, -12, 48

60 أي مما يلي قيمة المتسلسلة $10 - 15 + 22.5 - 33.75 + 50.625 - \dots$ ؟

- أ $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ب $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ج $\sum_{k=1}^{k=5} 10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ د $\sum_{k=1}^{k=5} -10\left(-\frac{3}{2}\right)^k$

تحدّ وتوسّع

حاسبة بيانية جد في كل متتالية هندسية أول حد تتجاوز قيمته المليون.

- 61 $r=2, a_1=10$ 62 $a_1=\frac{1}{4}, r=4$ 63 $r=3.2, a_1=0.01$

64 مجموع 3 حدود متتالية في متتالية هندسية هو 73.5. ما هذه الحدود علماً بأن ناتج ضربها 2744 ؟ أوضّح ذلك.

65 استعمل المتتالية الهندسية التي حدّها الأول 55، وأساسها $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- أ جد الحدود الخمسة التي تلي الحد الأول، مقربة إلى أقرب عدد صحيح.
ب احسب مجموع كل حدين متتالين. ماذا تلاحظ؟
ج صيغ مقولة بخصوص هذه المتتالية.

مراجعة لولبية

جد أصفار كل دالة ومقارباتها. (الصفوف السابقة)

- 66 $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$ 67 $f(x) = \frac{x+5}{x^2-x-6}$ 68 $f(x) = \frac{x^2-16}{4x}$

69 تسوّق يعرض أحد المحالّ الكبرى حسماً نسبته 20% على بضائعه، خلال فترة شهر. ويعرض حسماً إضافياً أيام الإثنين نسبته 10%. (الدرس 3-5)

- أ اكتب دالة مركبة تمثّل ثمن سلعة يوم الإثنين بدلالة ثمنها الأصلي x .
ب اشترت بينا ثوباً يوم الإثنين. كم دفعت علماً، بأن الثمن الأصلي للثوب 275000 دينار؟

جد الحدود العشرة الأولى في كل متتالية حسابية. (الدرس 3-6)

- 70 78, 65, 52, 39, 26, ... 71 1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, ...
72 9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, ... 73 16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, ...

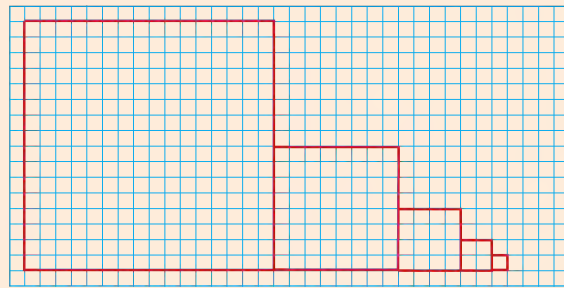
استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية



يُمكنك استكشاف المتسلسلات الهندسية غير المنتهية باستعمال متتالية مربعات.

نشاط 1

- 1 ارسم على ورقة مربعات، مربعاً ضلعه 16 وحدة طول. لاحظ أن محيطه 64 وحدة طول.
- 2 انطلق من إحدى زوايا المربع الذي رسمته، وارسم إلى جانبه مربعات أضلاعها على التوالي 8 و 4 و 2 و 1.



ضلع المربع	المساحة	المجموع
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

- 3 انسخ الجدول المقابل، وأكمل الصفوف الستة الأولى بتدوين محيطات المربعات في العمود الثاني، والمجموع التراكمي لهذه المحيطات في العمود الثالث.

- 4 استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة هندسية تمثل مجموع المحيطات.

- 5 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد مجموع الحدود العشرين الأولى.

- 6 اكتب مقولة اكتب مقولة بشأن المجموع التراكمي للمحيطات إذا تابعت إنشاء المربعات إلى ما لا نهاية.

- 7 جد قيمة المقدار $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ ما العلاقة بين ما وجدته وجواب السؤال 6؟

ضلع المربع	المساحة	المجموع
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

حاول

- 1 انسخ الجدول المقابل وأكمه بإيجاد مساحات المربعات والمجموع التراكمي للمساحات.

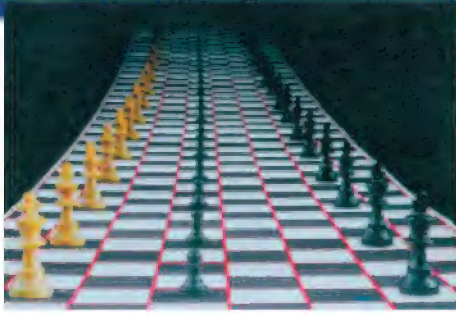
- 2 استعمل رمز الجمع لكتابة متسلسلة هندسية تمثل مجموع المساحات.

- 3 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد مجموع الحدود العشرة الأولى.

- 4 اكتب مقولة اكتب مقولة بشأن المجموع التراكمي للمساحات إذا تابعت إنشاء المربعات إلى ما لا نهاية.

- 5 جد قيمة المقدار $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ ما العلاقة بين ما وجدته وجواب السؤال 4؟

- 6 استخلص نتيجة اكتب قانوناً لحساب قيمة متسلسلة هندسية غير منتهية، نسبتها المشتركة r تحقق $0 < r < 1$.



الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

5-6

لماذا نتعلم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لاستكشاف الأنماط المتكررة (التمرين 58).

الأهداف

يجد قيمة متسلسلة هندسية غير منتهية.
يستعمل الاستقراء الرياضي لإثبات مقولات.

المفردات

Vocabulary

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية
Infinite geometric series

التوافقية

Convergent

النهاية

Limit

التخالفية

Divergent

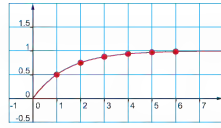
الاستقراء الرياضي

Mathematical Induction

تعلّمت في الدرس السابق كيف تجد المجاميع الجزئية في متسلسلة هندسية. ستعلّم في هذا الدرس إيجاد المجموع لمتسلسلات هندسية غير منتهية. تتألف المتسلسلة الهندسية غير المنتهية Infinite geometric series من عدد غير منته من الحدود. انظر إلى المتسلسلتين الهندسيتين غير المنتهيتين أدناه.

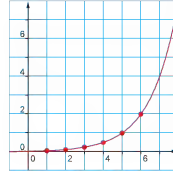
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

المجاميع الجزئية						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



$$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$$

المجاميع الجزئية						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



لاحظ أن أساس في المتسلسلة الهندسية S_n يساوي $\frac{1}{2}$ ، وأن مجاميعها الجزئية تقترب أكثر فأكثر من 1 كلما كبرت قيم n . عندما يكون $|r| < 1$ تقترب المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية من عدد محدد كلما ازدادت قيمة n . تقول في هذه الحالة إن المتسلسلة توافقية **Convergent** وإن هذا العدد هو نهاية **Limit** المتسلسلة.

الأمر مختلف مع المتسلسلة R_n . عندما يكون $|r| \geq 1$ ، وتزداد قيم n ، تزداد قيم المجاميع الجزئية وتتجاوز كل حد. تقول في هذه الحالة أن المتسلسلة تخالفية **Divergent**.

تميز المتسلسلات الهندسية التوافقية والتخالفية

مثال 1

حدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$|r| < 1$; $r = \frac{1}{3}$

المتسلسلة توافقية ولها مجموع.

أ $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \dots$

$|r| \geq 1$; $r = \frac{24}{20} = 1.2$

المتسلسلة تخالفية ولا مجموع لها.

1. حدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \dots$

أ $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$



إذا كانت المتسلسلة الهندسية توافقية، تستطيع حساب مجموعها . عد إلى المجاميع
 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$. استعمل قانون مجموع الحدود الأولى مع $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثّل بيانيًا الدالة $S(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. لاحظ أن قيمة $S(n)$ تقترب من 1 كلما كبرت قيمة n .
 كلما سعى n نحو اللامنتهي الموجب $+\infty$ ، سعى $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نحو 0، مما يؤكد أن مجموع المتسلسلة هو 1. يمكن تعميم هذا المفهوم على جميع المتسلسلات الهندسية التوافقية وإثباته، باستعمال الحساب التفاضلي والتكاملي.

مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

إذا كان أساس المتسلسلة هندسية غير منتهية يحقق $|r| < 1$ ، فإن المتسلسلة توافقية ومجموعها يساوي

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتسلسلة و r الأساس.



إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

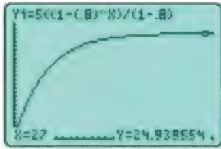
أ $5 + 4 + 3.2 + 2.65 + \dots$

$$r = 0.8$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = \frac{5}{1-0.8} = \frac{5}{0.2} = 25$$

تحقق ارسم بيان الدالة $y = 5 \left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8} \right)$ باستعمال الحاسبة البيانية.
 واضح أن قيمة y تسعى نحو 25.



المتسلسلة توافقية لأن $|r| < 1$.

القانون.

عوض.

إضاءة

يُمكنك تمثيل متتالية هندسية بيانيًا باستعمال قانون مجموعها، كما ورد في الدرس السابق $S = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right)$ ، بإحلال y محل S و x محل n ، والتعويض عن كل من a_1 و r بقيمته.

ب $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$

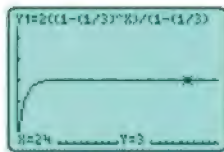
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$$

$$r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

القانون. $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$

تحقق ارسم بيان الدالة $y = 2 \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}} \right)$ باستعمال الحاسبة.

واضح أن قيمة y تسعى نحو 3.



المتسلسلة توافقية لأن $|r| < 1$.

القانون.

2. جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

ب $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^k$

أ $25 - 5 + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$



يُمكنك استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لكتابة عدد نسبي دوري على صورة كسر.

كتابة عدد نسبي دوري على صورة كسر

مثال 3

اكتب العدد $0.232323\dots$ ككسر على أبسط صورة.

الخطوة 1 اكتب العدد كمتسلسلة هندسية غير منتهية.

$$0.232323\dots = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \dots$$

الخطوة 2 جد الأساس.

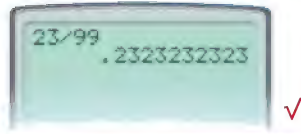
$$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$$

الخطوة 3 جد المجموع.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

تحقق استعمال حاسبة

لقسمة 23 على 99.



تذكر

تذكر أن كل عدد دوري مثل $0.232323\dots$ أو $0.\overline{23}$ هو عدد نسبي ويُمكنك أن تكتبه على صورة كسر.

3. اكتب العدد $0.111\dots$ ككسر على أبسط صورة.

نقطة مراقبة



استعملت المتسلسلات لكي تجد المجاميع، مثل مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. يمكن إثبات القوانين المستعملة لإيجاد مثل هذه المجاميع باستعمال إحدى طرق البرهان في الرياضيات، وهو البرهان بالاستقراء الرياضي **Mathematical induction**.

البرهان بالاستقراء الرياضي

اعلم

احفظ

لكي تبرهن أن مقولة صحيحة أيًا تكن قيمة العدد الطبيعي n ، اتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1 تحقق من الحالة الأولى: بين أن المقولة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن المقولة صحيحة عندما $n=k$.

الخطوة 3 أثبت أن المقولة صحيحة عندما $n=k+1$.

البرهان بالاستقراء الرياضي

مثال 4

استعمل الاستقراء الرياضي لبرهان $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

الخطوة 1 تحقق من الحالة الأولى، بين أن المقولة صحيحة عندما $n=1$.

$$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \text{المقولة صحيحة عندما } n=1$$

الخطوة 2 افترض أن المقولة صحيحة عندما $n=k$.

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{عوض عن } n \text{ بـ } k$$

الخطوة 3 برهن أن المقولة تصحّ عندما $n = k+1$.

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

أضف الحد التالي $k+1$ إلى كل طرف .
جد المقام المشترك .

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

اجمع البسطين.

حلّ بالعامل $k+1$

اكتب بدلالة $k+1$

المقولة $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ صحيحة إذن، أيًا يكن العدد الطبيعي n .

4. استعمل الاستقراء الرياضي لبرهان أن مجموع الأعداد الطبيعية الفردية الأولى

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2 \text{ هو}$$



قد تبدو بعض المقولات الرياضية صحيحة في الكثير من الحالات. غير أن ذلك لا يكفي للقول بصحتها في كل الحالات. للبرهنة على خطأ القول بأن مقولة صحيحة في جميع الحالات، جد مثالاً مضاداً يبين خطأ المقولة في حالة واحدة.

إيجاد مجموع متسلسلة هندسية

مثال 5

جد مثالاً مضاداً يبين عدم صحة $2^n \geq n^2$ ، حيث n عدد حقيقي.

$$2^0 \geq (0)^2 \quad 2^1 \geq (1)^2 \quad 2^4 \geq (4)^2 \quad 2^{-1} \geq (-1)^2$$

$$1 \geq 0 \quad 2 \geq 1 \quad 16 \geq 16 \quad \frac{1}{2} \geq 1$$

إذن، $2^n \geq n^2$ خطأ، عندما $n = -1$ ، مما يثبت أن القول بصحتها أيًا يكن العدد الحقيقي n ، هو قول خطأ.

إضاءة

تذكر أن إيجاد غالبية الأمثلة المضادة يتم باستعمال أعداد خاصة مثل 0 و 1 والأعداد السالبة أو الكسور.

5. جد مثالاً مضاداً يبين عدم صحة $\frac{a^2}{2} \leq 2a+1$ ، حيث a عدد حقيقي.



فكر وناقش

- كيف تحدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية غير المنتهية توافقية أم تخالفية؟
- كيف تحوّل العدد النسبي الدوري $0.\overline{83}$ إلى متسلسلة هندسية غير منتهية؟
- كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. لخصّ مختلف أنواع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.

المجموع	النسبة المشتركة	مثال
		متسلسلة توافقية
		متسلسلة تخالفية



التمارين

5-6

تمارين موجّهة

1 مفردات المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي تقترب قيم حدودها من عدد معين مع تزايد قيمة n هي متسلسلة _____ (توافقية أو تخالفية).

انظر المثال 1

حدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

27+18+12+8+... 4

1-5+25-125+... 3

1- $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{9}$ - $\frac{1}{27}$ +... 2

انظر المثال 2

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

800+200+50+... 7

$\sum_{k=1}^{\infty} 4(0.25)^k$ 6

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+...$ 5

انظر المثال 3

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة .

0.131313... 10

0.56 9

0.888... 8

انظر المثال 4

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات أن مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية الأولى تحقق

$2+4+6+8+...+2n=n(n+1)$

انظر المثال 5

جد مثلاً مضاداً يُثبت عدم صحة أن المقولة صحيحة أيًا يكن العدد الحقيقي n .

$n^3 \leq 3n^2$ 14

$\log n > 0$ 13

$n^4 \geq 1$ 12

تمارين وحلّ مسائل

حدّد إن كانت المتسلسلة الهندسية توافقية أو تخالفية.

2-4+8-16+... 17

5+10+20+40+... 16

$3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+...$ 15

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

$\sum_{k=1}^{\infty} (3.5)^k$ 20

$\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+...$ 19

$\sum_{k=1}^{\infty} 60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ 18

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

0.541541541... 23

0.90909... 22

0.6 21

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات أن $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ جد مثلاً مضاداً يُثبت عدم صحة أن المقولة صحيحة أيًا يكن العدد الحقيقي n .

$5n^2 > 2^n$ 27

$n^4 > 0$ 26

$n^3 \neq -n^2$ 25

خطأ في التحليل فيما يلي جوابان عن سؤال يطلب إيجاد مجموع المتسلسلة

الهندسية غير المنتهية $...+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$. أي الجوابين خطأ؟ بيّن الخطأ.

ب

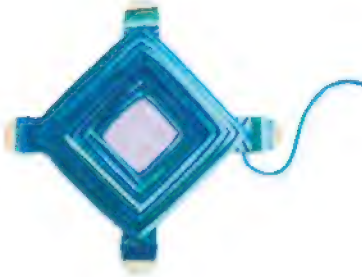
لا يوجد مجموع
لهذه المتسلسلة

أ

$S = \frac{1}{1-2} = -\frac{1}{5}$

تمارين حرة

انظر المثال	لحل التمارين
1	17-15
2	20-18
3	23-21
4	24
5	27-25



29 فنون رسم أحد الفنانين جدارية عملاقة مؤلفة من مربعات يقع الواحد منها داخل الآخر. استعمل خيطاً لإنشاء المربعات. ضلع المربع الأكبر 8 m وضلع كل مربع داخلي يساوي 90% من ضلع المربع الذي يحتويه. افترض أن الفنان قادر على إضافة مربعات أحدها داخل الآخر إلى ما لا نهاية. كم متراً من الخيط سيلزم الفنان؟ (مثل النمط بواسطة متسلسلة هندسية غير منتهية).

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ، إذا كان لها مجموع.

31 $500 + 400 + 320 + \dots$

30 $215 - 86 + 34.4 - 13.76 + \dots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty} -5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

32 $8 - 10 + 12.5 - 15.625 + \dots$

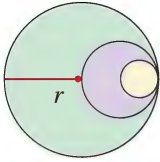
35 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

34 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

37 $\sum_{k=1}^{\infty} 200(0.6)^{k-1}$

36 $-25 - 30 - 36 - 43.2 - \dots$

38 هندسة ادرس النمط المبين في الشكل المقابل، حيث تُرسم دوائر الوحدة داخل الأخرى، على أن يكون قطر كل دائرة نصف قطر الدائرة السابقة.



اكتب، بدلالة r ، متسلسلة هندسية غير منتهية تمثل محيطات هذه الدوائر، وجد مجموعها.

ب ما مجموع محيطات هذه الدوائر، إذا كان نصف قطر الدائرة الكبرى 93 cm

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

41 $0.\overline{123}$

40 $0.\overline{9}$

39 $0.\overline{4}$

44 $0.0\overline{54}$

43 $0.\overline{5}$

42 $0.1\overline{8}$

45 موسيقى تراجعت مبيعات أقراص ال CD الموسيقية

في السنوات الأخيرة بسبب تزايد تنزيل الملفات الموسيقية عبر الإنترنت. يُمكن تمثيل أعداد الأقراص المباعة منذ سنة 2001 بواسطة متتالية هندسية.

أ قَدّر عدد أقراص ال CD التي ستباع سنة 2010 .

ب قَدّر عدد أقراص ال CD التي ستكون قد بيعت من

2001 إلى 2010 .

ج افترض أن المتتالية الهندسية استمرت إلى ما لا

نهاية. ما عدد أقراص ال CD التي ستكون بيعت

ابتداءً من سنة 2001 ؟



استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات كل مقولة.

46 $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

47 $1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2) + 2(3) + 3(4) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 سينما بلغت إيرادات أحد الأفلام السينمائية 80 مليار دينار في الأسبوع الأول للعرض، وراحت تتناقص بنسبة 40% أسبوعياً في الأسابيع التالية.

أ اكتب متتالية هندسية تمثل إيرادات الفيلم كل أسبوع.

ب قدر مجموع إيرادات الفيلم خلال الأسابيع الستة الأولى من العرض.

ج لو استمر عرض هذا الفيلم إلى ما لا نهاية، فكم سيكون مجمل إيراداته؟

51 مباريات العروض ربحَت الجائزة الكبرى في إحدى مباريات العروض، وعُرض عليك أن تتسلم جائزتك بإحدى طريقتين: أن تتقاضى مليون دينار في الشهر الأول بالإضافة إلى مبلغ شهري قيمته نصف مبلغ الشهر السابق، أو 100 000 دينار شهرياً على مدى 20 شهراً. أي طريقة تختار؟

جد لكل مقولة مثلاً مضاداً، حيث x عدد حقيقي.

54 $\ln x^5 > \ln x$

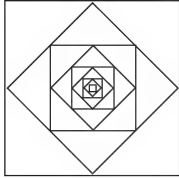
53 $x^4 - 1 \geq 0$

52 $\frac{x^4}{x^3} \leq 2x$

57 $12x - x^2 > 25$

56 $2x^2 - x \geq 0$

55 $2x^2 \leq 3x^3$



58 هندسة طول ضلع المربع الكبير 12 m ورؤوس كل مربع داخلي هي منتصفات أضلاع المربع السابق. افترض أن عملية إنشاء هذه المربعات استمرت إلى ما لا نهاية.

أ جد محيط المربع الثاني.

ب جد مجموع محيطات المربعات كلها.

ج جد مجموع مساحات المربعات كلها.

د اكتب، في حالة مربع ضلعه s ، مجموع المحيطات باستعمال رمز الجمع. كرر الأمر مع مجموع المساحات.

هـ أي المتسلسلتين تتناقص أسرع: مجموع المحيطات، أم مجموع المساحات؟ كيف عرفت ذلك؟

59 تفكير ناقد قارن بين المجموع الجزئي S_n لمتسلسلة هندسية غير منتهية ومجموعها الكامل عندما $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ أيهما أكبر؟ هل يتغير الأمر لو كان $a_1 < 0$ أوضح ذلك.

60 اكتب ما الفرق بين كتابة المجموع الجزئي S_n لمتسلسلة هندسية ومجموعها الكلي؟

تحضير للاختبار



61 أي من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية توافقية؟

د $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k (5)^k$

ج $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4} (5)^k$

ب $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{4}\right)^k$

أ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^k$

62 ما مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ ؟

د $\frac{1}{3}$

ج $\frac{1}{2}$

ب $\frac{2}{3}$

أ 2

63 متسلسلة هندسية غير منتهية مجموعها 180، ونسبتها المشتركة $r = \frac{2}{3}$. ما حدّها الأول؟

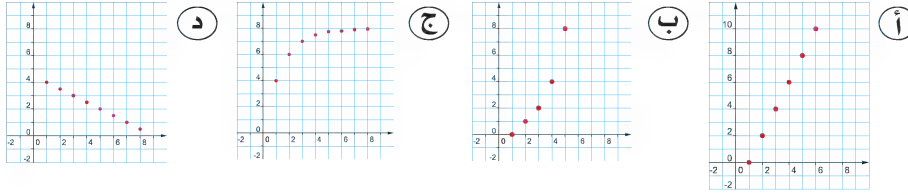
د 540

ج 270

ب 120

أ 60

64 أي رسم بياني يمثل متسلسلة هندسية غير منتهية توافقية؟



65 **جواب مفصل** استعمل الاستقراء لإثبات $3 + 5 + \dots + (2n+1) = n(n+2)$. بيّن كل ما تقوم به.

تحدّ وتوسّع

اكتب العدد الدوري ككسر على أبسط صورة.

66 $0.1\bar{6}$

67 $0.41\bar{6}$

68 $0.52\bar{86}$

69 **تفكير ناقد** هل يُمكن لمتسلسلة حسابية غير منتهية أن يسعى مجموعها إلى نهاية محدّدة، كما هي حال بعض المتسلسلات الهندسية غير المنتهية؟ أوضّح جوابك.



70 **هندسة** ضلع المربع الكبير 12 m، ورؤوس كل مربع داخلي

هي منتصفات أضلاع المربع الذي يتضمّنه. افترض أن عملية

إنشاء هذه المربعات استمرت إلى ما لا نهاية. لاحظ أن هذا

الشكل يبيّن خطاً لولبياً بالأحمر ومساحة لولبية بالأزرق.

أ استعمل مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية لتجد طول الخط الأحمر.

ب استعمل متسلسلة هندسية غير منتهية لتجد مساحة المنطقة الزرقاء.

ج هل الجواب الذي حصلت عليه في السؤال ب معقول؟ أوضّح ذلك.

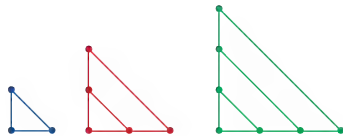
مراجعة لولبية

71 **كرة قدم** يُصيّب هدّاف نادي بابل لكرة القدم الهدف في 80% من الضربات الحرة. سوف يسدّد

الهدّاف خمس ضربات حرة. ما احتمال أن يصيب الهدف 4 مرات على الأقل؟

(الصفوف السابقة)

72 **هندسة** استعمل النمط المقابل. (الدرس 3-6)



أ حدّد عدد النقاط في كل من الأشكال الثلاثة التالية.

ب اكتب قاعدة لإيجاد عدد النقاط في الشكل ذي الرتبة n .

ج ما عدد النقاط في الشكل الثاني والعشرين؟

حدّد إن كانت المتتالية حسابية أو هندسية. جد الفرق المشترك أو النسبة المشتركة، عندما يكون

ذلك ممكناً. (الدرس 4-6)

74 $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, \dots$

73 $297, 99, 33, 11, \dots$

76 $4, 4.8, 5.76, 6.912, \dots$

75 $25, 100, 250, 1000, \dots$

الفصل

6

دليل الدراسة : مراجعة

19 تمويل اشترى سردار منزلاً بالتقسيط. كان القسط الشهري 1150 000 دينار . كم سيكون قد دفع بعد سنتين؟ بعد 15 عاماً؟

جد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

23, 19, 15, 11, ... **20**

$\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \dots$ **21**

-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, ... **22**

$a_4 = 5$ و $a_3 = 1.5$ **23**

$a_8 = 21$ و $a_6 = 47$ **24**

$a_9 = 13$ و $a_5 = -7$ **25**

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

S_{18} في المتسلسلة $-1-5-9-13-\dots$ **26**

S_{12} في المتسلسلة $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \dots$ **27**

$\sum_{k=1}^{k=5} (-14 + 3k)$ **28**

$\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10 \right)$ **29**

30 ادخار كان مع هاوري في أول السنة 50 000 دينار.

قرّر والدّها أن يعطيها 8 000 دينار مصروفًا

أسبوعيًا، قررت هي ادخار ما معها وما يُعطىها إياه

والدها، لشراء معطف ثمنه 499 000 دينار. اكتب

متتالية حسابية لتمثيل الحالة . هل سيكون بمقدور

هاوري أن تشتري المعطف في نهاية السنة؟

جد الحد الثامن في كل متتالية هندسية.

40, 4, 0.4, 0.04, ... **31**

$\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ **32**

-16, -8, -4, -2, ... **33**

-6, -12, -24, 48, ... **34**

جد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

$a_n = n - 9$ **1**

$a_n = \frac{1}{2}n^2$ **2**

$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ **3**

$a_n = a_{n-1} - 2$ و $a_1 = 55$ **4**

$a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$ و $a_1 = 200$ **5**

$a_n = -3a_{n-1} + 1$ و $a_1 = -3$ **6**

اكتب قاعدة للحد النوني في كل متتالية.

-4, -8, -12, ... **7**

5, 20, 80, 320, ... **8**

-24, -19, -14, -9, ... **9**

27, 18, 12, 8, $\frac{16}{3}$, ... **10**

11 رياضة رمى لاعب الكرة من ارتفاع

3.2 m . ارتفعت الكرة بعد ارتطامها بالأرض إلى

ارتفاع يساوي 70% من الارتفاع السابق. أي ارتفاع

تصل إليه الكرة في المرة الرابعة، لو أن الأمر تكرر

على هذا النمط؟ في المرة التاسعة؟

انشر المتسلسلة واحسب المجموع.

$\sum_{k=1}^{k=4} k^2 (-1)^k$ **12**

$\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$ **13**

$\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1} (2k - 1)$ **14**

$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$ **15**

احسب مجموع المتسلسلة.

$\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$ **16**

$\sum_{k=1}^{k=10} k^2$ **17**

$\sum_{k=1}^{k=12} k$ **18**

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية.

$$-2700 + 900 - 300 + \dots \quad 51$$

$$-1.2 - 0.12 - 0.012 + \dots \quad 52$$

$$-49 - 42 - 36 - \frac{216}{7} - \dots \quad 53$$

$$4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \dots \quad 54$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^k} \quad 55$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} -7 \left(\frac{3}{5} \right)^k \quad 56$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^k \quad 57$$

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات كل مما يلي.

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2 \quad 58$$

$$1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4} \quad 59$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1} \quad 60$$

61 تسليّة هبط ولد بالأرجوحة من علٍ بلغت المسافة

التي قطعها الولد في أول جيئة وزهاب 9m.

أ اكتب متسلسلة غير منتهية تمثل المسافة الكلية

التي يقطعها الولد، علماً بأن المسافة في كل

جيئة وزهاب تساوي 85% من سابقتها.

ب كم ستبلغ المسافة التي قطعها الولد قبل أن

تتوقّف الأرجوحة؟

جد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

$$a_4 = 96 \text{ و } a_3 = 24 \quad 35$$

$$a_2 = -\frac{4}{3} \text{ و } a_1 = \frac{2}{3} \quad 36$$

$$a_6 = -4 \text{ و } a_4 = -1 \quad 37$$

$$a_6 = 500 \text{ و } a_3 = 4 \quad 38$$

جد المتوسط الهندسي لكل عددين.

$$2.5 \text{ و } 10 \quad 39$$

$$\frac{1}{2} \text{ و } 8 \quad 40$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{96} \quad 41$$

$$\frac{125}{108} \text{ و } \frac{5}{12} \quad 42$$

جد المجموع المطلوب في كل متتالية هندسية.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \text{ في المتسلسلة } S_5 \quad 43$$

$$-\frac{4}{5} + 8 - 80 + \dots \text{ في المتسلسلة } S_6 \quad 44$$

$$\sum_{k=1}^{k=8} (4)^{k-1} \quad 45$$

$$\sum_{k=1}^{k=7} -2(5)^{k-1} \quad 46$$

$$\sum_{k=1}^{k=6} 60 \left(-\frac{1}{2} \right)^{k-1} \quad 47$$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 18 \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \quad 48$$

49 أدوات مكتبية يبلغ ثمن آلة ناسخة حديثة 9

ملايين دينار. كم ستكون قيمة هذه الآلة في السنة

السادسة، علماً أن ثمنها في كل سنة يساوي 65%

من ثمنها في السنة السابقة؟

50 إيجارات إيجار أحد المنازل 650 000 دينار في

الشهر، وهو يزداد بنسبة 6% سنوياً.

أ كم سيبلغ الإيجار السنوي لهذا المنزل في

السنة السادسة؟

ب كم سيبلغ مجموع ما دفعه المستأجر في

السنوات الخمس الأولى؟

الفصل

6

اختبار الفصل

جد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.

1 $a_n = n^2 - 4$

2 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 8$ و $a_1 = 48$

اكتب قاعدة لكل متتالية.

3 $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

4 $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots$

انشر المتتالية واحسب مجموعها.

5 $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$

6 $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1} (k)$

جد الحد التاسع في كل متتالية حسابية.

7 $-19, -13, -7, -1, \dots$

8 $a_5 = 5$ و $a_2 = 11.6$

جد الحدين الناقصين في المتتالية الحسابية

9 $125, \square, \square, 65$

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

10 S_{20} في المتسلسلة $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$

11 $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8)$

12 يتألف الصف الأول في أحد المسارح من 16 مقعداً،

ويزداد عدد المقاعد في كل صف بدءاً من الثاني،

مقعدين عن الذي يسبقه. كم مقعداً في الصف

الثاني عشر؟ كم عدد المقاعد في الصفوف الاثني

عشر الأولى؟

جد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.

13 $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \dots$

14 $a_5 = 8$ و $a_4 = 2$

15 جد المتوسط الهندسي للعددين 4 و 25.

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة هندسية.

16 S_6 في المتسلسلة $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

17 $\sum_{k=1}^{k=12} 250 \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

18 كنت تضع في حساب مصري مليون دينار كل سنة

على مدى 10 سنوات. وكانت نسبة الفائدة السنوية

5%. كم أصبح المليون الأول في نهاية العام العاشر؟

ما المبلغ في حسابك في نهاية السنة العاشرة؟

جد مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية، إذا كان لها مجموع.

19 $200 - 100 + 50 - 25 + \dots$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{7}{8}\right)^k$

استعمل الاستقراء الرياضي لإثبات

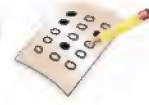
21 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$

الخطوة 1:

الخطوة 2:

الخطوة 3:

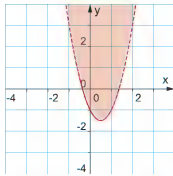
اختبار تراكمي



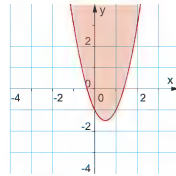
الفصل

6

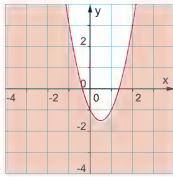
6 أي رسم يُمثّل الحل البياني للمتباعدة التربيعية
 $6x + 3y \geq 6x^2 - 3$



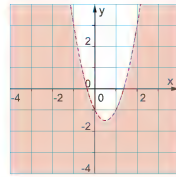
(ج)



(أ)



(د)



(ب)

7 افتتحت زيله صالوناً للتجميل. كانت أرباحها في
 الأسابيع الأربعة الأولى 2 000 000 دينار،
 2 400 000 دينار، 2 880 000 دينار،
 3 456 000 دينار، على التوالي. كم ستبلغ أرباحها
 في الأسبوع السادس، لو استمر تزايد أرباحها على
 هذا المنوال؟

- (أ) 3 856 000 دينار (ب) 4 032 000 دينار
 (ج) 4 147 000 دينار (د) 4 980 000 دينار

8 ما الحد التاسع في المتتالية $a_n = \frac{1}{2}(2^{n-1}) + 4$
 (أ) 36 (ب) 68 (ج) 132 (د) 260

9 ما الدالة العكسية للدالة $f(x) = 4x - 5$
 (أ) $f^{-1}(x) = -4x + 5$ (ب) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 5$
 (ج) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}$ (د) $f^{-1}(x) = 5x - 4$

1 أي مما يلي يمثّل المتتالية 4، 6، 4، 6، 4 مكتوبة
 باستعمال رمز التجميع؟

(أ) $\sum_{n=0}^5 (-1)^n + 5$ (ج) $\sum_{n=0}^5 (-1)^n + 5$

(ب) $\sum_{n=1}^4 (-1)^n + 5$ (د) $\sum_{n=1}^5 (-1)^n + 5$

2 أي مما يلي هو نشر ثنائية الحدين $(2x - y)^3$.

- (أ) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
 (ب) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$
 (ج) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
 (د) $8x^3 + 12x^2y + 3xy^2 + y^3$

3 صورة الدالة $f(x)$ بانعكاس حول المحور الثاني هي
 أي من الدوال التالية هي

- (أ) $g(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 9$
 (ب) $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 9$
 (ج) $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 18$
 (د) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 5$

4 أي مما يلي دالة تراجع أسّي؟

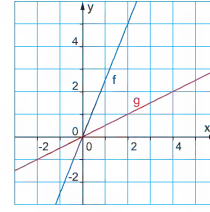
- (أ) $f(x) = -5x$
 (ب) $f(x) = 2.3(6.7)^x$
 (ج) $f(x) = 0.49(7.9)^x$
 (د) $f(x) = 5.13(0.32)^x$

5 رُميت كرة من ارتفاع 10 m لترتطم بالأرض وتعاود

الارتفاع. كانت في كل مرة تعاود الارتفاع إلى
 60% من الارتفاع السابق. أي مما يلي يمثّل ارتفاع
 الكرة بالأمتار في المرة n

- (أ) $10(0.6n)$ (ب) $10(0.6)^{n-1}$
 (ج) $\frac{10-n}{0.6}$ (د) $10(0.6)^n$

10 أي تحويل يُحوّل الدالة $f(x)$ إلى الدالة $g(x)$ ؟



- أ كبس أفقي عامله $\frac{1}{5}$.
 ب مط أفقي عامله 5 .
 ج كبس عمودي عامله $\frac{1}{3}$.
 د مط عمودي عامله 3 .

11 أي ممّا يلي صفرا الدالة $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$ ؟

- أ -4 و $\frac{3}{2}$ ج $-\frac{3}{2}$ و 4
 ب -2 و 3 د $\frac{3}{2}$ و 2

جواب مختصر

12 ما النسبة المشتركة للمتتالية الهندسية
 125, 50, 20, 8, ... ؟

13 سُحبت ورقة من بطاقات ورق اللعب. ما احتمال أن تكون هذه الورقة 10 أو حمراء ؟

14 ما مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{k=8} (7k - 3)$ ؟

15 ما الإحداثي الثاني للنقطة التي تمثل حل النظام

$$\begin{cases} 2y - 2 = 4x \\ 6 - x = 8y \end{cases}$$

16 استعمل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{5x}$.

- أ ما مجال هذه الدالة ؟ وما مداها ؟
 ب ما الدالة العكسية للدالة $f(x)$ ؟
 ج ما مجال الدالة العكسية ؟ وما مداها ؟
 د ارسم بيان الدالة والدالة العكسية في المستوى الإحداثي نفسه.

17 استعمل المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4^{n-1}}$.

- أ حدّد إن كانت المتسلسلة توافقية أو تخالفية.
 ب جد مجموع المتسلسلة إذا كان لها مجموع.

18 يعرض أحد المحالّ الكبرى لعب المرطبات على شكل مثلث، بحيث يكون عدد اللعب 3 في الصف الأعلى ويزداد هذا العدد لعبة كلما نزلنا في الصفوف.

- أ هل تستعمل متتالية أم متسلسلة لتمثيل عدد اللعب في الصف من الرتبة n ؟
 ب ما عدد اللعب في 12 صفّاً ؟
 ج ماذا تمثل المتسلسلة $\sum_{k=1}^{k=n} (k+2)$ ؟ أوضّح ذلك.

جواب مفصّل

19 يجتاز المرشحون للدخول إلى مدرسة الضباط اختبارين. يجتاز 60% من المرشحين الاختبار الأول بنجاح، ويجتاز 20% الاختبار الثاني بنجاح.

أ أنشئ مخطط شجرة يبيّن الاحتمالات الممكنة لكل مرشح.

ب إذا كان على كل مرشح التقدم إلى الاختبارين، ما احتمال أن يجتاز مرشح الاختبارين بنجاح. كم مرشحاً تنتظر أن ينجح في الاختبارين لو كان عدد المرشحين 50 ؟

ج أيهما أكبر: احتمال أن ينجح المرشح في الاختبارين معاً، أو أن يُخفق فيهما معاً ؟ أوضّح ذلك.

الفصل

7

علم المثلثات Trigonometry

الفصل الأول

الدروس

- 1-7 قانون الساين والكوساين
 2-7 الدوال المثلثية
 تكنولوجيا المتطابقات المثلثية بيانيًا
 3-7 المتطابقات المثلثية الأساسية

اختبار جزئي

- 4-7 متطابقات المجموع والفرق
 5-7 متطابقات الضعف والنصف

الدروس

يُمكنك استعمال بيانات الدوال المثلثية والمتطابقات المثلثية لإنشاء نماذج لحركات دائرية أو عجلة في حالات مختلفة.

هل أنت مستعد؟

المُفردات ✓

اربط المفردة بتعريفها الوارد إلى اليسار.

- | | | | |
|---|-------------------|----|---|
| 1 | ساين الزاوية | أ | نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الضلع المجاور لها. |
| 2 | كوساين الزاوية | ب | نسبة طول الضلع المجاور للزاوية إلى طول الوتر. |
| 3 | وتر المثلث القائم | ج | نسبة طول الوتر إلى طول الضلع المقابل للزاوية. |
| 4 | تانجانت الزاوية | د | نسبة طول الضلع المقابل للزاوية إلى طول الوتر. |
| | | هـ | الضلع المقابل للزاوية القائمة. |

قسمة الكسور ✓

اقسم.

- | | | | | | | | |
|---|--------------------------------|---|--------------------------------|---|---------------------------------|---|---------------------------------|
| 5 | $\frac{3}{5} \div \frac{5}{2}$ | 6 | $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ | 7 | $\frac{-3}{8} \div \frac{1}{8}$ | 8 | $\frac{2}{3} \div \frac{-7}{4}$ |
|---|--------------------------------|---|--------------------------------|---|---------------------------------|---|---------------------------------|

تبسيط المقادير الجذرية ✓

اكتب المقدار على أبسط صورة.

- | | | | | | | | |
|---|----------------------------|----|-----------------|----|------------------------------|----|-----------------------|
| 9 | $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$ | 10 | $\sqrt{100-64}$ | 11 | $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$ | 12 | $\sqrt{\frac{4}{25}}$ |
|---|----------------------------|----|-----------------|----|------------------------------|----|-----------------------|

ضرب ثنائيات الحدود ✓

اضرب.

- | | | | | | |
|----|---------------|----|---------------|----|----------------|
| 13 | $(x+11)(x+7)$ | 14 | $(y-4)(y-9)$ | 15 | $(2x-3)(x+5)$ |
| 16 | $(k+3)(3k-3)$ | 17 | $(4z-4)(z+1)$ | 18 | $(y+0.5)(y-1)$ |

المتطابقات الخاصة ✓

اضرب.

- | | | | |
|----|----------------|----|----------------|
| 19 | $(2x+5)^2$ | 20 | $(3y-2)^2$ |
| 21 | $(4x-6)(4x+6)$ | 22 | $(2m+1)(2m-1)$ |
| 23 | $(s+7)^2$ | 24 | $(-p+4)(-p-4)$ |

دليل الدراسة : نظرة إلى الفصل

Vocabulary

المفردات

Amplitude	السعة
Cycle	الدورة
Frequency	التكرار
Period	الزمن الدوري
Periodic functions	الدوال الدورية
Phase shift	انحراف الطور
Rotation matrix	مصفوفة الدوران

في الماضي

درست سابقاً

- حل مسائل تتضمن مثلثات ونسباً مثلثية.
- استعمال التحليل لحل معادلة تربيعية.
- استعمال الدوال التي تشكل نماذج لحل مسائل من الحياة.
- حل معادلات جبرياً وبيانياً.

في هذا الفصل

سوف تتعلم

- حل مسائل تتضمن الدوال المثلثية.
- استعمال الدوال المثلثية لإنشاء نماذج تمثل حالات من الواقع.

نافذة على المفردات

لكي تألف بعض المفردات الواردة في هذا الفصل،
تابع الخطوات التالية:

1. ماذا تعني كلمة **سعة** في الحياة اليومية؟ ما تعنيه سعة رقص الساعة؟
2. ماذا تعني كلمة **دورة** في الحياة اليومية؟ أعط أمثلة على ظواهر دورية.
3. أعط مثالاً على أمر يحدث تكررًا. كم يتكرر أمر ما كتظيف أسنانك يوميًا، تقول «أنظف أسناني مرتين في اليوم». صف تكرار المثل الذي أعطيته.
4. قد يندر استعمال عبارة **الزمن الدوري** في الحياة اليومية. بم توجي إليك هذه العبارة؟ بم توجي إليك عبارة **دالة دورية**؟
5. ما النتيجة التي تتوقع أن تحصل عليها عند استعمال **مصفوفة دوران**؟

في المستقبل

يُمكنك استعمال مهارات هذا الفصل

- في صفوف أعلى عند دراسة الحساب التفاضلي والتكامل.
- في دروس المواد الأخرى، كالفيزياء والأحياء والاقتصاد.
- خارج المدرسة لدراسة الظواهر الدورية.

الرياضيات

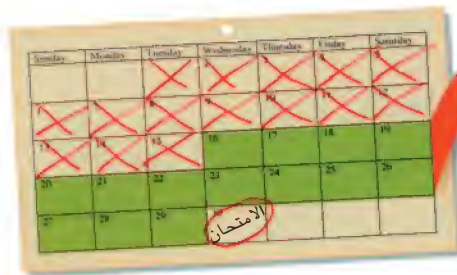
قراءة

وكتابة



استراتيجية للدرس: الاستعداد لامتحان النهائي

الرياضيات مادة تراكمية. لذا قد يشمل الامتحان النهائي لهذه المادة كل ما تعلّمته فيها منذ بداية العام الدراسي. من هنا تنشأ ضرورة الاستعداد لاجتياز هذا الامتحان بنجاح. قد يكون مفيداً لك أن تخطّط لتحضير هذا الامتحان كما هو وارد أدناه.



أسبوعان قبل الامتحان

- راجع الامتحانات السابقة ومسائل الواجب المنزلي لتحديد الموضوعات التي تتطلب تركيزاً، وحلّ من جديد التمارين التي كان حلّها خطأ أو منقوصاً.
- أنشئ لائحة بالقوانين والمبرهنات التي عليك معرفتها يوم الامتحان.
- ركّب اختباراً تجريبياً من مسائل تشبه مسائل الامتحانات السابقة.



أسبوع قبل الامتحان

- حلّ الامتحان التجريبي الذي ركّبت، وتحقّق من صحة إجاباتك. إذا أخفقت في حل أحد التمارين، ابحث عن تمرينين أو ثلاثة تشبهه، وتمرنّ على حلها.
- اعمل مع زميل لك في الصف، على أن يسأل كل منكما الآخر عن القوانين والمبرهنات الواردة في اللائحة التي تم تحضيرها سابقاً.



اليوم السابق لامتحان

- تحقّق من أنك حضرت لوازِم الامتحان من أقلام ومسطرة وحاسبة (تحقّق من صلاحية بطارية الحاسبة).



يوم
الامتحان

حاول

1. أنشئ مخططاً زمنياً لتحضير الامتحان النهائي.



قانون السايين والكوساين

Law of sines and Law of cosines

1-7

من يستعمل هذا الأمر؟

يمكن للمهندسين أن يستعملوا قانون السايين وقانون الكوساين لحل مسائل البناء.

الأهداف

يستعمل قانون السايين وقانون الكوساين لحل المثلثات.

منذ إنشاء برج بيزا في إيطاليا سنة 1370 م، والمهندسون يتقدمون باقتراحات لتقليل انحنائه. الزاوية التي يُقيمها هذا البرج مع الأرض ليست قائمة كما هي حال العمارات بصورة عامة. لذلك، كان على المهندسين العمل على مثلثات غير قائمة.

تعلّمت في الصف العاشر كيف تستعمل النسب المثلثية لإيجاد قياسات زوايا المثلث القائم وأضلاعه بمعرفة بعضها. تُسمى هذه العملية **حل المثلث القائم**. سوف تتعلم في هذا الدرس حل المثلث مهما يكن نوعه. تحتاج، للقيام بذلك، أن تحسب النسب المثلثية لزوايا يصل قياسها حتى 180° . يُمكنك استعمال الحاسبة لإيجاد تلك القيم.

إيجاد النسب المثلثية للزوايا المنفرجة

مثال 1

استعمل الحاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

ج $\cos 108^\circ$

ب $\tan 98^\circ$

أ $\sin 135^\circ$

$\cos(108)$
-0.3090169944

$\tan(98)$
-7.115369722

$\sin(135)$
0.7071067812

$\cos 108^\circ \approx -0.31$

$\tan 98^\circ \approx -7.12$

$\sin 135^\circ \approx 0.71$

1. استعمل الحاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

ج $\sin 160^\circ$

ب $\cos 92^\circ$

أ $\tan 175^\circ$



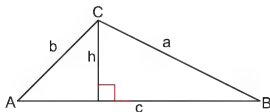
يُمكنك استعمال ارتفاع مثلث لإيجاد علاقة تربط بين أطوال أضلاعه. أنشئ الارتفاع العائد إلى الضلع \overline{AB} والذي يمر في الرأس C . استناداً إلى الرسم المقابل، يُمكنك أن تكتب:

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{a} \quad \sin \hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = a \sin \hat{B} \quad h = b \sin \hat{A}$$

$$a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A} \quad \text{ينتج من ذلك}$$

$$\cdot \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} \quad \text{وبالتالي}$$



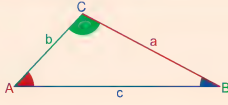
يُمكنك استعمال ارتفاع آخر من ارتفاعات المثلث لتُبين أن النسبتين المتساويتين السابقتين تساويان أيضاً النسبة $\frac{\sin \hat{C}}{c}$.

قانون الجيب

مبرهنة

اعلم

احفظ



أيًا يكن المثلث ABC ، بأضلع أطوالها a ، b ، c

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

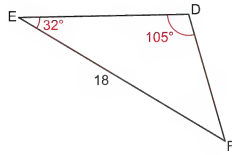
يُمكنك استعمال قانون الساين لحل مثلث إذا عرفت:

- قياس زاويتين من زواياه وطول أحد أضلاعه.
- طول ضلعين من أضلاعه وقياس الزاوية غير الواقعة بينهما

استعمال قانون ساين

2 مثال

جد القياس المطلوب. قَرِّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

أ DF 

قانون الساين.

عوض.

خاصية الضرب القاطري.

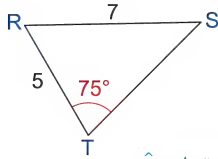
اقسم كل طرف على $\sin 105^\circ$

$$\frac{\sin D}{EF} = \frac{\sin E}{DF}$$

$$\frac{\sin 105^\circ}{18} = \frac{\sin 32^\circ}{DF}$$

$$DF \times \sin 105^\circ = 18 \times \sin 32^\circ$$

$$DF = \frac{18 \times \sin 32^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{18(0.53)}{0.96} \approx 9.9$$

ب $m\hat{S}$ 

قانون الساين.

عوض.

اضرب كل طرف في 5.

استعمل المفتاح \sin^{-1} لحساب قياس \hat{S}

$$\frac{\sin \hat{T}}{RS} = \frac{\sin \hat{S}}{RT}$$

$$\frac{\sin 75^\circ}{7} = \frac{\sin \hat{S}}{5}$$

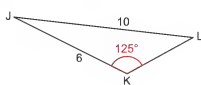
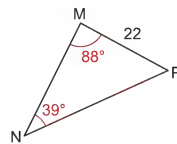
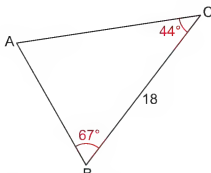
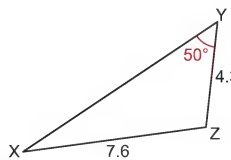
$$\sin \hat{S} = \frac{5 \times \sin 75^\circ}{7}$$

$$m\hat{S} = \sin^{-1} \left(\frac{5 \times \sin 75^\circ}{7} \right) \approx 44^\circ$$

استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس \hat{S} بعد تحويل الحاسبة، لكي تعمل بالدرجة عوضاً عن الراديان. لهذا الهدف، اضغط MODE، ثم حرّك المستطيل الذي يومض حتى يصل إلى Degree، ثم اضغط ENTER. لحساب $m\hat{S}$ ، اضغط على التوالي 2^{nd} ، SIN، 5، ×، ENTER، 5، 7، ÷، 7،)، ENTER.

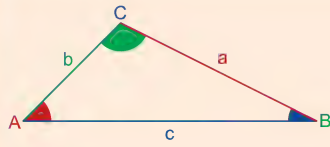
2. جد القياس المطلوب. قَرِّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

نقطة مراقبة

ب $m\hat{L}$ أ NP د AC ج $m\hat{X}$

لا يسمح قانون الساين بحل كل المثلثات. مثلاً، إذا عُرف طول ضلعين وقياس الزاوية الواقعة بينهما، أو إذا عُرف طول الأضلاع الثلاثة، فهذه حالات، ينبغي أن تستعمل فيها الكوساين التمام.

تزييت الأقواس والزوايا



قانون الكوساين

مبرهنة

اعلم

احفظ

أيًا يكن المثلث ABC ، بأضلع أطوالها a ، b ، c ،

فإن:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

يُمكنك استعمال قانون الكوساين لحل مثلث إذا عرفت:

- طولَ ضلعين وقياس الزاوية بينهما.
- طولَ أضلاعه الثلاثة.

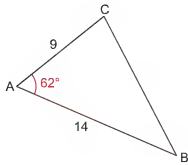
مُساعدة

في قانون الكوساين، الزاوية المستعملة في كل مساواة هي الزاوية التي تواجه الضلع الوارد في الطرف الأول من المساواة.

استعمال قانون الكوساين

مثال 3

جد القياس المطلوب. قَرِّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.

BC أ

$$\text{قانون الكوساين. } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cos \hat{A}$$

عوَض.

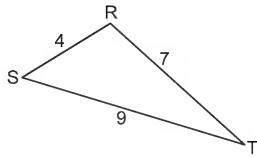
$$= 14^2 + 9^2 - 2(14)(9) \cos 62^\circ$$

بسط.

$$BC^2 \approx 158.6932$$

$$BC \approx 12.6$$

طول BC هو 12.6 تقريبًا.

m\hat{R} ب

$$\text{قانون الكوساين. } ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2(RS)(RT) \cos \hat{R}$$

عوَض.

$$9^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos \hat{R}$$

بسط.

$$81 = 65 - 56 \cos \hat{R}$$

$$16 = -56 \cos \hat{R}$$

حلّ.

$$\cos \hat{R} = -\frac{16}{56}$$

$$m\hat{R} = \cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right) \approx 107^\circ$$

قياس \hat{R} هو 107° تقريبًا.

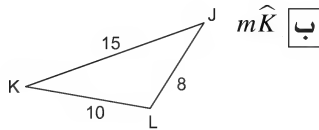
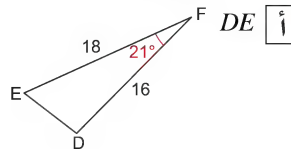
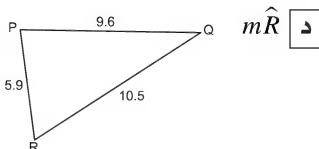
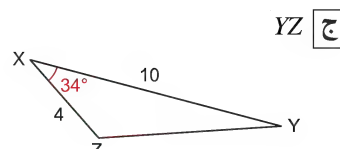
3. جد القياس المطلوب. قَرِّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى

نقطة

مراقبة

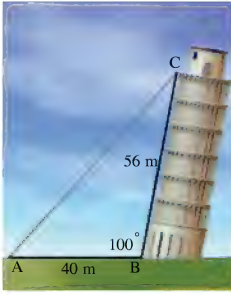


أقرب درجة.

m\hat{K} بDE أm\hat{P} دYZ ج

تطبيق على الهندسة المدنية

مثال 4



يبلغ ارتفاع برج بيزا في إيطاليا 56 m . بلغت زاوية البرج مع مستوى الأرض 100° سنة 1999 م. اقترح أحد المهندسين، لمنع البرج من الوقوع، أن يتم ربطه بسلك معدني قوي يربط رأس البرج بنقطة تبعد 40 m عن قاعدته. كم سيكون طول هذا السلك وقياس زاويته مع مستوى الأرض؟ أعطِ الجواب مقرباً الطول إلى أقرب عُشر من المتر، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 جد طول السلك.

قانون الكوساين. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \hat{B}$

عوض. $= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100^\circ$

بسط. $AC^2 = 5513.9438$

جد الجذر التربيعي. $AC = 74.3$

الخطوة 2 جد قياس زاوية السلك مع مستوى الأرض.

قانون الساين. $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC}$

عوض. $\frac{\sin \hat{A}}{56} = \frac{\sin 100^\circ}{74.2559}$

بسط. $\sin \hat{A} = \frac{56 \times \sin 100^\circ}{74.2559}$

استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد $m\hat{A}$. $m\hat{A} = \sin^{-1} \left(\frac{56 \times \sin 100^\circ}{74.2559} \right) \approx 48^\circ$

زاوية السلك مع الأرض هي 48° تقريباً.

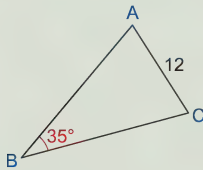
انتبه!

لا تقرب الإجابات قبل أن تصل إلى الجواب النهائي. إذا كانت المسألة من عدة خطوات، احفظ الإجابات المرحلية في ذاكرة الحاسبة.

4. ماذا لو... اقترح مهندس آخر أن يُربط سلك بين رأس البرج ونقطة تبعد 31 m عن قاعدة البرج. كم سيكون طول هذا السلك وقياس زاويته مع مستوى الأرض؟ أعطِ الجواب مقرباً الطول إلى أقرب عُشر من المتر، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.



فكر وناقش



- هل تحتاج إلى معلومات إضافية لكي تحسب BC باستعمال قانون الساين؟ إذ كان الجواب نعم، فما هي؟
- كن منظماً انسخ الجدول أدناه ثم أكمله. حدّد أي قانون تستعمل لحل كل مثلث مُعطى، ثم ارسم مثلاً عليه.

المثال	القانون	المعطى في المثلث
		قياس زاويتين وطول ضلع
		طول ضلعين وقياس زاوية غير التي بينهما
		طول ضلعين وقياس الزاوية بينهما
		طول 3 أضلاع



التمارين

1-7

تمارين موجّهة

1 انظر المثال

استعمل حاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

$\tan 92^\circ$ 3

$\sin 167^\circ$ 2

$\sin 100^\circ$ 1

$\sin 150^\circ$ 6

$\cos 133^\circ$ 5

$\tan 141^\circ$ 4

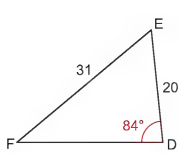
$\cos 156^\circ$ 9

$\tan 164^\circ$ 8

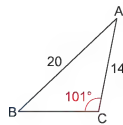
$\sin 147^\circ$ 7

2 انظر المثال

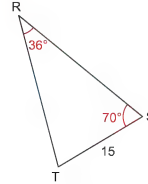
جد كل قياس. قرب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.



$m\hat{F}$ 12



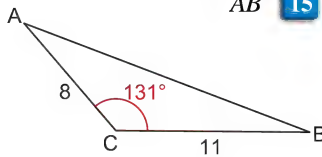
$m\hat{B}$ 11



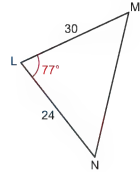
RT 10

3 انظر المثال

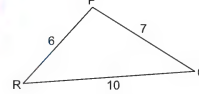
جد كل قياس. قرب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.



AB 15



MN 14



$m\hat{Q}$ 13

4 انظر المثال

16 نجارة صنع النجار إطاراً خشبياً من ثلاث قطع أطوالها 20cm و 24cm و 30cm . ما قياس كل زاوية من زوايا هذا المثلث؟ قرب الإجابات إلى أقرب درجة.

تمارين وحل مسائل

استعمل حاسبة لإيجاد كل نسبة مثلثية، مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة.

$\tan 118^\circ$ 19

$\tan 178^\circ$ 18

$\cos 95^\circ$ 17

$\cos 124^\circ$ 22

$\sin 98^\circ$ 21

$\sin 132^\circ$ 20

$\sin 128^\circ$ 25

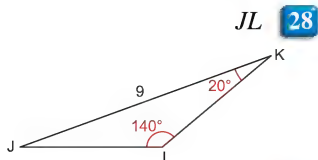
$\cos 145^\circ$ 24

$\tan 139^\circ$ 23

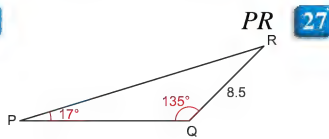
تمارين حرة

انظر المثال	لحل التمارين
1	25-17
2	31-26
3	37-32
4	38

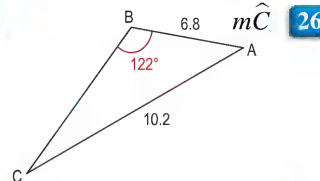
جد كل قياس. قرب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.



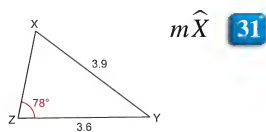
JL 28



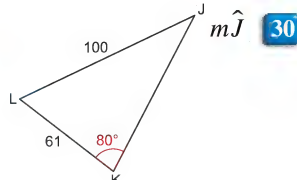
PR 27



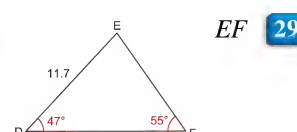
$m\hat{C}$ 26



$m\hat{X}$ 31

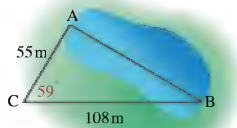
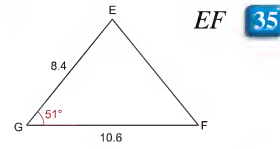
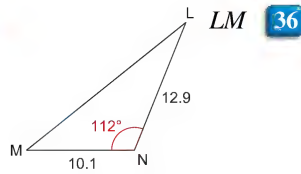
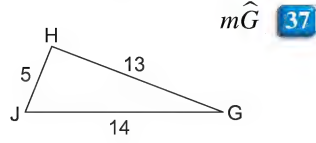
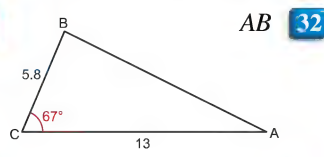
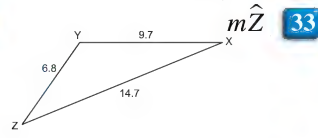
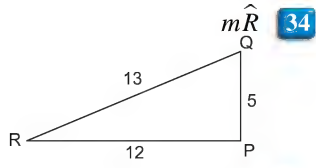


$m\hat{J}$ 30



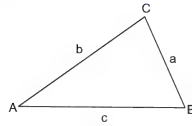
EF 29

جد كل قياس. قَرِّب كل طول إلى أقرب عُشر، وقياس كل زاوية إلى أقرب درجة.



38 **مراقبة** لكي يقيس المراقب طول البحيرة، حدّد 3 نقاط A و B و C كما هو مبيّن في الرسم المقابل. ما طول AB مقرباً إلى أقرب عُشر من المتر؟ وما قياس \hat{B} مقرباً إلى أقرب درجة؟

استعمل المثلث المقابل لحل التمارين من 39 إلى 42. قَرِّب الأطوال إلى أقرب عُشر، والزوايا إلى أقرب درجة.



39 $\hat{A} = 74^\circ$ ، $\hat{B} = 22^\circ$ ، $m\hat{B} = 22^\circ$ ، $m\hat{A} = 74^\circ$ ؛ جد a .

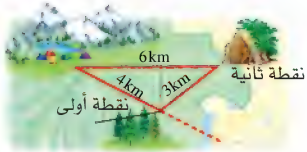
40 $\hat{C} = 100^\circ$ ، $a = 9.5m$ ، $b = 7.1m$ ؛ جد c .

41 $a = 2.2m$ ، $b = 3.1m$ ، $c = 4m$ ؛ جد \hat{B} .

42 $a = 10.3cm$ ، $c = 8.4cm$ ، $\hat{A} = 45^\circ$ ؛ جد \hat{C} .

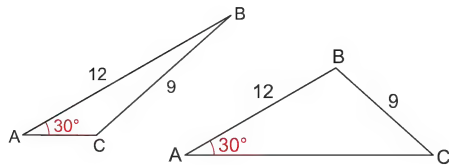
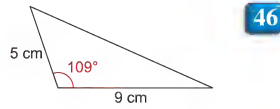
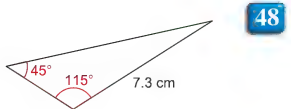
43 **تفكير ناقد** افترض أنك تعرف قياس الزوايا الثلاث لمثلث، وتريد أن تحسب طول أضلاعه. هل يمكنك أن تستعمل قانون السايين أو قانون الكوساين للوصول إلى ما تريد؟ برّر جوابك.

44 **ماذا لو...؟** إلّا يتحوّل قانون الكوساين لو كانت الزاوية قائمة؟



45 **سباق** يُبيّن الرسم المقابل خريطة أحد سباقات الجري. كم درجة على المتباري أن ينعطف بعد وصوله إلى نقطة المراقبة الأولى، لكي يتّجه إلى نقطة المراقبة الثانية؟ أعطِ الجواب مقرباً إلى أقرب درجة.

خطوات متعددة احسب محيط كل مثلث. قَرِّب الجواب إلى أقرب عُشر.



49 هناك حالة ملتبسة من حالات تطبيق قانون السايين. إنها حالة مثلث عُلِمَ قياس إحدى زواياه وطول الضلع المقابل وطول ضلع آخر، غير أن طول الضلع المقابل أقل من طول الضلع الآخر. هناك حالتان لمثل هذه المثلث.

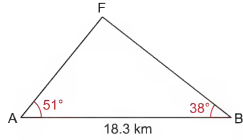
جد قيمتين ممكنتين لـ \hat{C} ، وقَرِّب الجواب إلى أقرب درجة. (مساعدة: عندما تستعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس زاوية عُلِمَ جيها، فإن الحاسبة تُعطيك قياس الزاوية الحادة التي تلبي الشرط. خُذ في الاعتبار هذه الزاوية والزاوية المتكاملة معها).

نافذة

على نظام المراقبة



تتم أغلب عمليات المراقبة اليوم بواسطة نظام المواقع العالمي GPS. يستعمل هذا النظام مجموعة من الأقمار الاصطناعية كوسائل لتحديد المواقع.



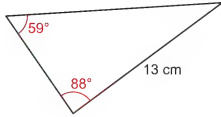
50 تلقّت فرقتان من فرق الدفاع المدني موجودتان في النقطتين A و B، اتصالات تُفيد أن حريقاً شب في النقطة F.

أ جد \widehat{mAFB} .

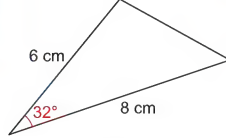
ب احسب المسافة بين كل فريق ومكان النار. قَرِّب إلى أقرب كيلومتر.

ج تطير مروحية الإطفاء بسرعة 150 km/h. ما الزمن الذي تربحه مكافحة النيران بانطلاق المروحية من النقطة A عوضاً عن النقطة B ؟

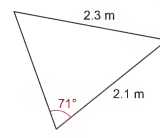
حدّد إن كان عليك استعمال قانون السايين أو قانون الكوساين كخطوة أولى، عند حل كل مثلث.



53



52



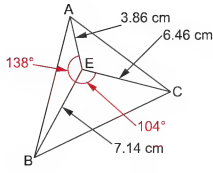
51

54 إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي A(0, 3)، B(3, 1)، C(-3, -1).

أ احسب AB، BC، CA.

ب أي من زوايا المثلث لها القياس الأكبر؟

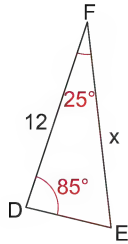
ج جد قياس هذه الزاوية.



55 فنون أنشأت كلارا نمطاً لتلوين الزجاج مبيئاً في المقابل.

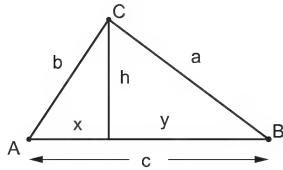
احسب BC و AB ثم \widehat{mABC} . قَرِّب الأطوال إلى أقرب جزء من مئة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

56 خطأ في التحليل طلب إلى متعلّمين إيجاد الطول x في المثلث المقابل. أي من الحلين خطأ؟ أوضح الخطأ.



ب
بالاستناد إلى قانون الكوساين
$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 12.7$

أ
بالاستناد إلى قانون السايين
$x = \frac{12 \times \sin 85^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 28.3$



57 فيما يلي برهان قانون الكوساين في حالة مثلث حاد الزوايا.

المُعطى: مثلث ABC جميع زواياه حادة وطول أضلاعه a، b، c.

المطلوب برهنته: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

البرهان: ارسم الارتفاع النازل من C على AB. ارمز بـ h إلى طول هذا الارتفاع.

يقسم هذا الارتفاع الضلع AB إلى قطعتين مستقيمتين طول الأولى x، وطول الثانية y.

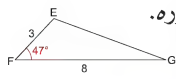
يُمكنك أن تكتب، بالاستناد إلى مبرهنة فيثاغورس، (أ) $a^2 = \text{—}$ و (ب) $a^2 = h^2 + x^2$.

عوّض عن y في المعادلة الأولى بقيمتها c - x لتحصل على (ج) — . أعد تجميع الحدود لكي

تحصل على $a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$. عوّض عن $h^2 + x^2$ بقيمتها لتحصل على (د) — .

يمكنك أن تكتب، بالاستناد إلى رسم المثلث، $\cos \hat{A} = \frac{x}{b}$ مما يستتبع (هـ) $x = \text{—}$. ينتج عما

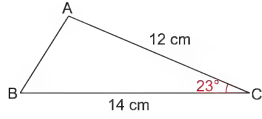
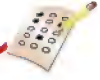
سبق $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.



58 **اكتب** هل تستطيع استعمال قانون الساين لحل المثلث المقابل؟ أوضح جوابك وبرره.



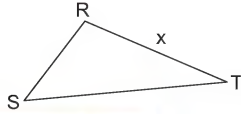
تحضير للاختبار



59 أي مما يلي هو الأقرب إلى طول الضلع \overline{AB} ؟

- 5.5cm (أ) 14.4cm (ب) 7.5cm (ج) 22.2cm (د)

60 أي مجموعة معلومات تجعل حساب x باستعمال قانون الساين ممكنًا؟

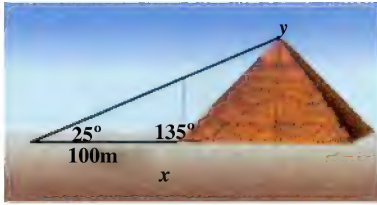


(أ) $ST=15.3$ ، $RS=8.1$ ، $m\hat{T}=38^\circ$

(ب) $ST=9$ ، $m\hat{S}=40^\circ$ ، $RS=4$

(ج) $ST=7$ ، $m\hat{S}=34^\circ$ ، $m\hat{R}=92^\circ$

(د) $m\hat{T}=31^\circ$ ، $m\hat{S}=44^\circ$ ، $m\hat{R}=105^\circ$



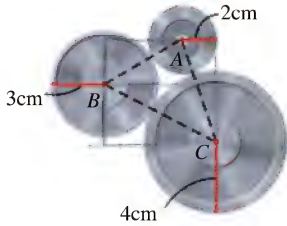
61 وجد أحد المهندسين أن وجه الهرم يُقيم زاوية قياسها 135°

مع مستوي الأرض. كما وجد أن زاوية الارتفاع لرأس الهرم من نقطة تبعد 100m عن قاعدته تساوي 25° . ما طول الضلع

الجانب \overline{XY} ؟

- 48m (أ) 81m (ب) 124m (ج) 160m (د)

تحدّ وتوسّع



62 **خطوات متعددة** وضعت ثلاثة أقراص متلاصقة

كما يُبين الشكل المقابل. أنصاف أقطار الأقراص

هي 2cm و 3cm و 4cm. جد $m\hat{ACB}$ في المثلث

ABC . قرّب الجواب إلى أقرب درجة.

63 يمر المستقيم l في النقطتين $(-1, 1)$ و $(1, 3)$. كما يمر المستقيم m في النقطتين $(-1, 1)$

و $(3, 2)$. احسب، مقربًا إلى أقرب درجة، قياس الزاوية الحادة التي يشكلها المستقيمان.

64 **ملاحظة** يقع الميناء B على مسافة 5km جنوب الميناء A . انطلق مركب من الميناء A باتجاه

شمال - 32° - شرق، وسار بسرعة 6km/h. كم يبعد هذا المركب عن الميناء B بعد 45

دقيقة؟ قرّب الجواب إلى أقرب عُشر من الكيلومتر.

مراجعة لولبية

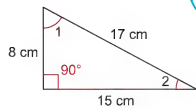
اكتب العدد ذا الرتبة n في كل نمط. (الصفوف السابقة)

4, 6, 8, 10, 12, ... 67

3, 5, 7, 9, 11, ... 66

3, 6, 9, 12, 15, ... 65

استعمل النسبة المثلثية لتحديد، في كل مرة، أي زاوية هي \hat{A} . (الصفوف السابقة)



$\tan \hat{A} = 1.875$ 70

$\sin \hat{A} = \frac{15}{17}$ 69

$\cos \hat{A} = \frac{15}{17}$ 68

استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد قياس الزاوية الحادة A . في كل تمرين. أعط الجواب

مقربًا إلى أقرب جزء من ألف. (الصفوف السابقة)

$\tan \hat{A} = 2.05$ 73

$\cos \hat{A} = 0.89$ 72

$\sin \hat{A} = 0.89$ 71



الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

2-7

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكن تمثيل الظواهر الدورية، مثل الأمواج الصوتية، باستعمال الدوال المثلثية. (انظر مثال 3).

الأهداف

يُميِّز الدوال الدورية.
يُميِّز الدوال المثلثية ويرسم بياناتها.

المفردات

Vocabulary

الدالة الدورية
Periodic function

الدالة المثلثية
Trigonometric function

الدورة
Cycle

الزمن الدوري
Period

السعة
Amplitude

التردد
Frequency

انحراف الطور
Phase shift

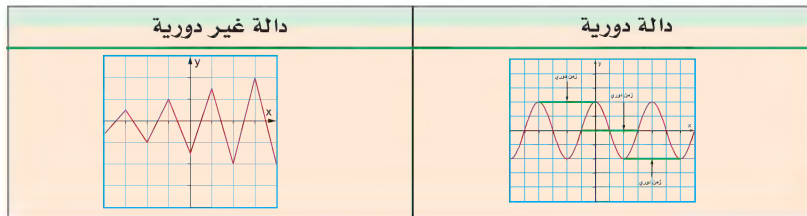
الدالة المثلثية Trigonometric function دالة قاعدتها مقدار مثلثي. الدوال المثلثية

الأساسية ثلاث: دالة السايين Sine function $f(x) = \sin x$ ودالة الكوساين Cosine function $f(x) = \cos x$

بالراديان. تتميز الدوال المثلثية بأن قيمها تتكرّر بشكل دوري. فدالة السايين تحقق $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ما يعني أن هذه الدالة تأخذ القيم نفسها عندما ينتمي x إلى الفترات $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، ...
تعبّر عن ذلك بالقول إن دالة السايين دورية، وأن زمنها الدوري هو 2π .

الدالة الدورية Periodic function دالة تتكرّر قيمها في فترات منتظمة، تُسمى دورات Cycles. لجميع الدورات طول واحد يُسمى الزمن الدوري Period.

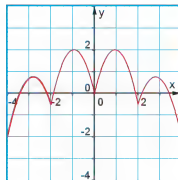
تفحص بيانات دوال دورية وأخرى غير دورية. لاحظ أن بإمكان الدورة أن تبدأ عند أي نقطة من بيان الدالة.



تمييز الدوال الدورية

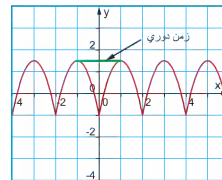
مثال 1

حدّد إن كانت الدالة دورية أم لا. حدّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.



ب

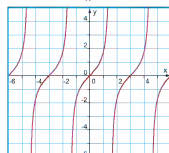
لا يوجد نمط يتكرّر بشكل مضبوط،
بالرغم من تمتّع البيان ببعض التناظر.
الدالة ليست دورية.



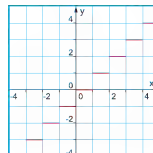
أ

هناك نمط يتكرّر بشكل مضبوط، ما يدل
على أن الدالة دورية.
الدالة دورية وزمنها الدوري 2.

1. حدّد إن كانت الدالة دورية أم لا. حدّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.



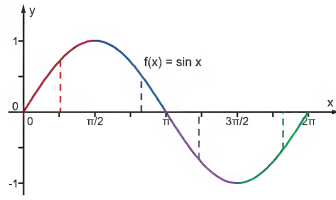
ب



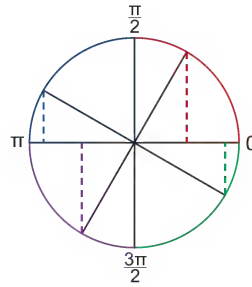
أ

نقطة مراقبة

الدوال المثلثية الأساسية دورية. يمكنك رسم بيان الدالة $f(x) = \sin x$ في المستوي الإحداثي باستعمال الإحداثي y لنقاط تقع على دائرة الوحدة، حيث يمثل x الزاوية θ في الوضع المثالي.



y	$x(=\theta)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



يمكنك رسم بيان $f(x) = \cos x$ باستعمال الإحداثي x لنقاط على دائرة الوحدة.

سعة Amplitude الدالة الدورية هي نصف الفرق بين قيمتها الكبرى وقيمتها الصغرى.

السعة عدد موجب دائماً. سعة كل من دالتي الجيب وجيب التمام هي $1 = \frac{1-(-1)}{2}$. أما سعة دالة الظل فهي غير معروفة.

خصائص بيانات الدوال المثلثية

الدالة	$y = \tan x$	$y = \cos x$	$y = \sin x$
البيان			
المجال	$\{x / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
المدى		$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
الزمن الدوري	π	2π	2π
السعة	غير معرفة	1	1

اعلم
و
احفظ

إضاءة

يُمر بيان دالة السانين ودالة التانجانج في نقطة الأصل، في حين أن التقاطع العمودي لبيان دالة الكوساين هو 1.

يمكنك استعمال بيانات الدوال الأم لرسم بيانات الدوال $y = a \sin bx$ ، $y = a \cos bx$ ، $y = a \tan bx$. تذكر أن a تدل على مط عمودي ($|a| > 1$) أو كبس عمودي ($0 < |a| < 1$) مما يُغيّر السعة. إذا كان a سالباً، يجب تحويل البيان بانعكاس حول المحور الأول. من ناحيته، يدل b على مط أو كبس أفقيين مما يُغيّر الزمن الدوري.

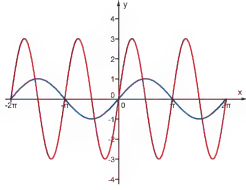
تحويلات بيانات الدوال المثلثية

الدالة	السعة	الزمن الدوري	المحاذيات
$y = a \sin bx$	$ a $	$\frac{2\pi}{ b }$	لامحاذيات
$y = a \cos bx$	$ a $	$\frac{2\pi}{ b }$	لامحاذيات
$y = a \tan bx$	غير معروفة	$\frac{\pi}{ b }$	محاذيات عمودية عند $x = \frac{\pi}{2 b } + \frac{k\pi}{ b }$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

اعلم
و
احفظ

مثال 2 تحويل الدوال المثلثية

أ استعمل بيان دالة السايين لرسم بيان الدالة $g(x) = 3\sin 2x$. حدّد سعة هذه الدالة وزمنها الدوري.



الخطوة 1 حدّد السعة والزمن الدوري.

بما أن $a = 3$ فإن السعة هي $|a| = |3| = 3$.

بما أن $b = 2$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

الخطوة 2 ارسم البيان.

عليك مط بيان الدالة الأم عمودياً بعامل 3، وكبسه أفقياً بعامل $\frac{1}{2}$.

تقع التقاطعات الأفقية للدالة الأم عند مضاعفات π ، بينما تقع

التقاطعات الأفقية للدالة g عند مضاعفات $\frac{\pi}{2}$.

القيمة الكبرى للدالة g هي 3 في حين أن قيمتها الصغرى هي -3.

ب استعمل بيان دالة التانجانت لرسم بيان الدالة $h(x) = \tan 2x$. حدّد الزمن الدوري لهذه الدالة وتقاطعاتها الأفقية ومقارباتها.

الخطوة 1 حدّد الزمن الدوري.

بما أن $b = 2$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$.

الخطوة 2 حدّد التقاطعات الأفقية.

أول هذه التقاطعات عند $x = 0$. بما أن الزمن الدوري للدالة

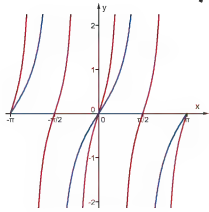
هو $\frac{\pi}{2}$ فإن التقاطعات الأفقية تقع عند $x = k\frac{\pi}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

الخطوة 3 حدّد المحاذيات.

بما أن $b = 2$ فإن للدالة محاذيات عمودية عند

$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

الخطوة 4 ارسم بيان الدالة h بالاستناد إلى كل تلك المعلومات.



2. **أ** استعمل بيان دالة الكوساين لرسم بيان الدالة $g(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$. حدّد سعة هذه الدالة وزمنها الدوري.



ب استعمل بيان دالة التانجانت لرسم بيان الدالة $h(x) = 3\tan \frac{1}{2}x$. حدّد الزمن الدوري لهذه الدالة وتقاطعاتها الأفقية ومحاذياتها.

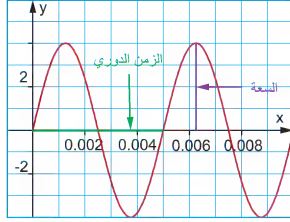


يمكنك استعمال دالتي السايين والكوساين كنماذج لدراسة ظواهر واقعية، مثل موجات الصوت. فالأصوات المختلفة تُنتج موجات مختلفة. تُستعمل الترددات عادة للتمييز بين الأصوات. **التردد Frequency** هو عدد الدورات في وحدة زمن محدّدة، مما يجعلها مقلوب الزمن الدوري. يُستعمل الهيرتز Hz لقياس الترددات. يُمثّل الهيرتز الواحد دورة واحدة في الثانية. فعندما تقول عن صوت أنه بتردد 440 هيرتز مثلاً، هذا يعني أن موجة الصوت تتكرّر 440 مرة في الثانية.

تطبيق على علم الأصوات

مثال 3

استعمل دالة السايين لرسم موجة صوت زمنه الدوري 0.005 S وسعته 4 cm. جد تردد هذه الموجة.



رَقِّم المحور الأفقي بحيث تمثل وحدته 0.001 من الثانية. يُفيدك الزمن الدوري بأن الموجة يلزمها 0.005 ثانية لتتم دورة كاملة. أما القيمتان الكبرى والصغرى فتحددان بالسعة. بما أن التردد يساوي مقلوب الزمن الدوري، فإن قيمته هي $\frac{1}{0.005} = 200 \text{ Hz}$ تردد الصوت هو 200 هيرتز.

3. استعمل دالة السايين لكي ترسم موجة صوت زمنه الدوري 0.004 s، وسعته 3 cm. جد تردد موجة هذا الصوت.



من الممكن أيضًا تحويل دالتي السايين والكوساين بالسحب للحصول على $y = \sin(x-h) + k$ أو $y = \cos(x-h) + k$. تذكر أن سحب بيان عمودياً k وحدة، يكون إلى أعلى إذا كان k موجباً وإلى أسفل إذا كان سالباً.

انحراف الطور Phase Shift لدالة دورية هو سحب أفقي لبيانها. يسحب انحراف الطور h البيان إلى اليمين، إذا كان h موجباً، وإلى اليسار إذا كان سالباً.

تحديد انحراف الطور لدالتي السايين والكوساين

مثال 4

استعمل بيان الدالة $f(x) = \sin x$ لكي ترسم بيان الدالة $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. حدد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

الخطوة 1 حدّد السعة والزمن الدوري.

بما أن $a = 1$ فإن السعة هي $|a| = 1$.

بما أن $b = 1$ فإن الزمن الدوري هو $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

الخطوة 2 حدّد انحراف الطور.

$$h \text{ حدّد } x + \frac{\pi}{2} = x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

بما أن $h = -\frac{\pi}{2}$ فإن انحراف الطور هو $\frac{\pi}{2}$ نحو اليسار. ينتج من ذلك سحب

جميع التقاطعات الأفقية للبيان $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليسار.

الخطوة 3 حدّد التقاطعات الأفقية.

بما أن التقاطعات الأفقية لبيان الدالة الأم تقع عند $x = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، فإن التقاطعات

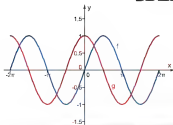
الأفقية للدالة تقع عند $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

الخطوة 4 حدّد القيم الكبرى والصغرى.

تتخذ الدالة قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى عندما يكون x في الوسط بين تقاطعين أفقيين.

تتخذ الدالة قيمتها الكبرى وهي تساوي 1 عند $x = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، وتتخذ

قيمها الصغرى وهي تساوي -1 عند $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.



الخطوة 5 أرسم بيان الدالة بالاستناد إلى المعلومات.

4. استعمل بيان الدالة $f(x) = \cos x$ لكي ترسم بيان الدالة $g(x) = \cos(x - \pi)$. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.



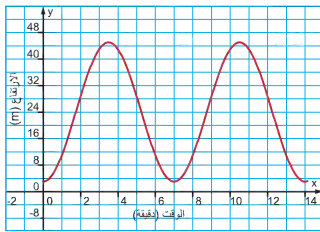
انحراف الطور السعة
 $y = a \sin b(x - h) + k$
 السحب العمودي الزمن الدوري

يُمكنك دمج التحويلات لدالتي الساين والكوساين. استعمل قيم a, b, h, k لتحديد مميزات دالة الساين والكوساين.

مثال 5 تطبيق

دولاب دوار ضخم يُتم دورة كاملة كل 7 دقائق. يُمكن اعتماد الدالة $H(t) = 21 \sin \frac{2\pi}{7}(t - 1.75) + 24$ نموذجاً لحساب الارتفاع عن الأرض (بالمتر) لإحدى مقصورات الركاب، بدلالة الزمن (بالدقائق).

أ. ارسم بياناً لدالة ارتفاع المقصورة على مدى دورتين.



$$k = 24, h = 1.75, b = \frac{2\pi}{7}, a = 21 \quad H(t) = 21 \sin \frac{2\pi}{7}(t - 1.75) + 24$$

الخطوة 1 حدّد المميزات الأساسية للدالة.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$$

السعة 21؛ الزمن الدوري 7

الزمن الدوري هو ما يستغرقه الدولاب ليتم دورة كاملة: يبلغ 7 دقائق.

انزياح الطور: 1.75 دقيقة إلى اليمين؛

السحب العمودي: 24 m إلى أعلى.

ليس للبيان تقاطعات أفقية.

القيمة الكبرى: $24 + 21 = 45$ وتتخذها الدالة عند $t = 3.5$ و $t = 10.5$.

القيمة الصغرى: $24 - 21 = 3$ وتتخذها الدالة عند $t = 0$ و $t = 7$ و $t = 14$.

ب. ما أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة.

أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة هو 45m ($24 + 21$).



5. ماذا لو...؟ افترض أن النموذج هو $H(t) = -5 \cos \frac{\pi}{45}t + 7$ بدلالة t (بالثواني).



أ. ارسم بيان ارتفاع مقصورة على مدى دورتين.

ب. ما أعلى ارتفاع تبلغه مقصورة؟

فكر وناقش

1. ما العلاقة بين تردد دالة دورية وزمنها الدوري؟ كيف يطبق ذلك على دالة الكوساين؟

2. ما العلاقة التي تربط بين القيم الكبرى والقيم الصغرى

والسعة والزمن الدوري لدالتي الساين والكوساين؟

3. كن منظماً. انسخ المخطط المقابل ثم أكمله.

أعط مثلاً على كل تحويل، واذكر الزمن الدوري.

كيس عمودي	مط أفقي
انعكاس	انحراف الطور
دالتا ساين وكوساين	

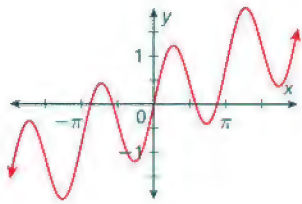


التمارين 2-7

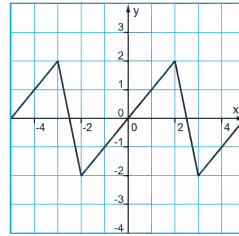
تمارين موجّهة

1 مفردات تتكرّر قيم الدالة الدورية في فترات منتظمة تُسمى ____ . (دورة أو زمن دوري)

1 انظر المثال حدّد إن كانت الدالة دورية أم لا، وحدّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.



3



2

استعمل بيان الدالة الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد السعة والزمن الدوري.

$k(x) = \sin \pi x$ **6**

$h(x) = \frac{1}{4} \cos x$ **5**

$f(x) = \sin \frac{1}{2} x$ **4**

استعمل بيان الدالة الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد الزمن الدوري والتقاطعات الأفقية والمحاذايات.

$k(x) = \tan 2\pi x$ **9**

$h(x) = \tan \frac{1}{4} x$ **8**

$f(x) = 2 \tan 3x$ **7**

3 انظر المثال **10 صوت** استعمل دالة السايين لكي ترسم موجة صوت زمنها الدوري 0.01 ثانية وسعتها 6 سنتيمترات. جد تردد هذه الموجة.

استعمل بيان الدالة الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

$k(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **13**

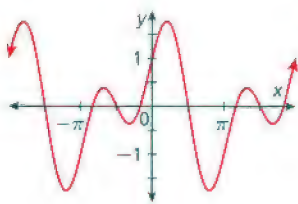
$h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **12**

$f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ **11**

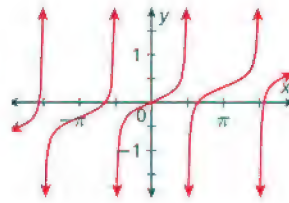
5 انظر المثال **14 تسليّة** يُمكن اعتماد الدالة $H(\theta) = -4 \cos \theta + 6$ لحساب ارتفاع راكب الأرجوحة (بالأقدام) بدلالة الزاوية θ التي تُشكّلها الأرجوحة مع مستقيم عمودي يمر في رأسها. ارسم بياناً يُمثّل ارتفاع الراكب حيث $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. ما ارتفاع الراكب عندما $\theta = 60^\circ$ ؟

تمارين وحلّ مسائل

حدّد إن كانت الدالة دورية أم لا. وحدّد زمنها الدوري إذا كانت دورية.



16



15

استعمل بيان الدالة الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد السعة والزمن الدوري.

$\ell(x) = 6 \sin \frac{1}{3} x$ **20**

$k(x) = -\cos 4x$ **19**

$h(x) = \frac{3}{2} \sin x$ **18**

$f(x) = 4 \cos x$ **17**

21 صوت استعمل دالة السايين لكي ترسم موجة صوت زمنها الدوري 0.025 ثانية وسعتها 5 cm. جد تردد هذه الموجة.

تمارين حرة

أنظر المثال	لحل التمارين
1	16-15
2	20-17
3	21
4	28-22
5	29

استعمل بيان الدالة الأم لرسم بيان كل دالة. جد الزمن الدوري والتقاطعات الأفقية والمحاذايات.

$$k(x) = -2 \tan \frac{\pi}{2} x \quad 24$$

$$h(x) = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 23$$

$$f(x) = \tan \frac{3}{2} x \quad 22$$

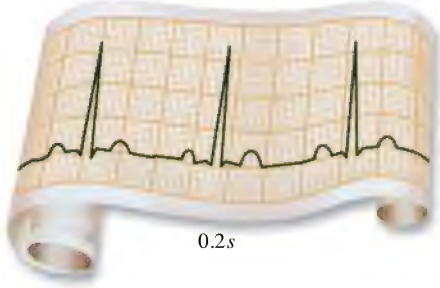
$$h(x) = \cos(x - 3\pi) \quad 26$$

$$f(x) = \sin(x + \pi) \quad 25$$

$$g(x) = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad 28$$

$$k(x) = \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \quad 27$$

29 علوم البحار يُمكن اعتماد الدالة $d(t) = \frac{3}{2} \sin \left(\frac{5\pi}{31} t \right) + 23$ نموذجاً لحساب عمق مياه أحد الخلجان بالأمتار، بدلالة الزمن بالساعات. ارسم بيان هذه الدالة، وحدد العمق الأكبر والعمق الأصغر.



30 طب يُظهر الشكل المقابل تخطيطاً لقلب إنسان عادي.

كل دورة تمثل نبضة من نبضات القلب.

أ ما الزمن الدوري لنبضات القلب؟

ب معدل نبضات القلب هو عددها في الدقيقة الواحدة. ما

معدل نبضات القلب الذي يُبينه التخطيط المقابل؟

ج ما هو تردد هذا التخطيط؟

د ما العلاقة بين تردد التخطيط ومعدل نبضات القلب؟

جد السعة والزمن الدوري لكل دالة ثم حدد التحويلات التي تسمح بالوصول إليها انطلاقاً من الدالة الأم.

$$g(x) = \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{4} x \quad 32$$

$$f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \quad 31$$

$$\ell(x) = -3 \sin 3x \quad 34$$

$$k(x) = \cos(2\pi x) - 2 \quad 33$$

تقدير استعمل بيان دالة السايين أو الكوساين لتقدير قيمة كل مقدار.

$$\cos 95^\circ \quad 38$$

$$\sin 15^\circ \quad 37$$

$$\cos 50^\circ \quad 36$$

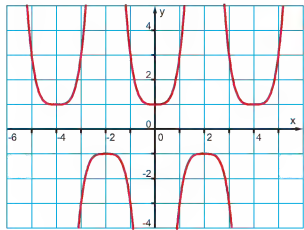
$$\sin 160^\circ \quad 35$$

اكتب دالة سايين ودالة كوساين لتمثيل ما هو محدد.

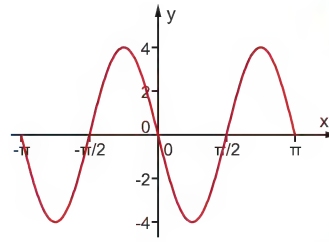
40 السعة $\frac{1}{4}$ وانحراف الطور $\frac{3}{2}\pi$ إلى اليسار

39 السعة 6 والزمن الدوري π

اكتب دالة سايين ودالة كوساين يُمكن أن تتمثل بالبيان.



42



41

43 يبلغ الحد الأعلى لارتفاع المد في أحد الخلجان 3 m ، والحد الأدنى 0. يستغرق المد 6.1 ساعات لينحسر، و 6.1 ساعات ليعود. يُمكن تمثيل ارتفاع المد بدالة h بدلالة الزمن t .

أ ما سعة هذه الدالة؟ وما زمنها الدوري؟ ما قيمتها الكبرى؟ وما قيمتها الصغرى؟

ب افترض أن المد بلغ حده الأعلى عند $t = 0$. ما قيمة $h(0)$ وما قيمة $h(6.1)$ ؟

ج اكتب الدالة h على صورة $h(t) = a \cos bt + k$.

نافذة

على الطب



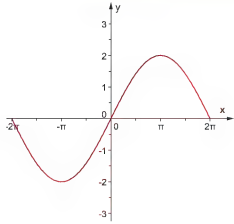
تُستعمل آلة تخطيط القلب لقياس التيار الكهربائي الذي يتحكم بنبضات قلب الإنسان بغية تشخيص أمراض القلب.

44 تفكير ناقد إذا عرفت سعة دالة ساين وزمنها الدوري، فهل تستطيع أن تجد قيمتها الكبرى وقيمتها الصغرى، وأن تحدّد قيم x حيث تتخذ الدالة هذه القيم القصوى؟ إذا لم يكن ذلك ممكناً، فماذا ينقصك من معلومات لتقوم بذلك؟ وكيف تستعملها؟

45 اكتب ماذا يحدث للزمن الدوري للدالة $f(x) = \sin bx$ إذا كان $b > 1$ ؟ $b < 1$ ؟



تحضير للاختبار

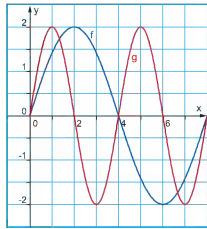


46 أي دالة مثلثية تناسب الرسم البياني المقابل؟

- (أ) $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ (ب) $f(x) = 2 \sin x$
(ج) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ (د) $f(x) = 2 \sin \frac{1}{2} x$

47 ما سعة الدالة $f(x) = -4 \cos 3\pi x$ ؟

- (أ) -4 (ب) 3 (ج) 4 (د) 3π



48 استعمل الرسم البياني المقابل لتحديد العلاقة بين f و g .

- (أ) سعة f ضعف سعة g
(ب) تردد f ضعف تردد g
(ج) الزمن الدوري لـ f ضعف الزمن الدوري لـ g
(د) دورة f ضعف دورة g

49 جواب مختصر استعمل بيان الدالة $f(x) = \sin x$ لكي ترسم بيان الدالة $g(x) = -4 \sin 2(x - \pi)$ على الفترة $[0, 2\pi]$ ، وحدّد التحويلات التي تستعملها.

تحدّ وتوسّع

استعمل الدالتين $f(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$ و $g(\theta) = 2 \cos \theta$ حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

50 ارسم بيان الدالتين في المستوي الإحداثي نفسه.

51 جد قيمة تقريبية لإحداثيي كل نقطة تقاطع بين البيانيين.

52 متى يتحقّق التباين $f(\theta) > g(\theta)$ ؟

مراجعة لولبية

اكتب كل مجموعة أعداد على صورة فترة. (الصفوف السابقة)

- 53** $-7 < x \leq 5$ **54** $x \leq -2$ أو $1 \leq x$ **55** $0 \leq x \leq 9$

7	3		6	ورد
	5	8		زنبق
13		15	11	قرنفل

56 أزهار مع لافين 100 000 دينار لشراء مجموعة من باقات الورد

والزنبق والقرنفل. ثمن باقة الورد 6000 دينار وثمان باقة الزنبق

2000 دينار وثمان باقة القرنفل الواحدة 4000 دينار. (الدرس 2)

(أ) اكتب معادلة خطية بثلاثة مجاهيل لتمثيل الحالة.

(ب) أكمل الجدول المقابل.

استعمل المعطيات لحل المثلث ABC . (الدرس 1-7)

- 57** $m\hat{A} = 165^\circ$ ، $c = 11$ ، $b = 20$ **58** $c = 20.2$ ، $b = 11.4$ ، $a = 9.2$

المتطابقات المثلثية بيانياً

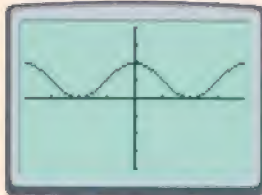
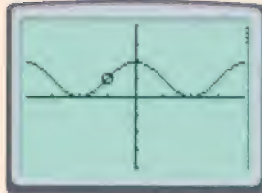


يُمكنك استعمال الحاسبة البيانية للمقارنة بين الرسوم البيانية وصياغة مقولات حول المتطابقات المثلثية.

نشاط

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=sin(X)^2/(1-c
os(X))
Y2=1+cos(X)
Y3=
```

```
ZOOM MEMORY
1:ZBox
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
```



حدّد إن كانت المعادلة $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1 + \cos x$ متطابقة مثلثية أم لا.

إذا كانت المعادلة متطابقة، فلن توجد فروق بين بيان الدالة التي قاعدتها الطرف الأول وبيان الدالة التي قاعدتها الطرف الثاني.

1 أدخل $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ أمام Y1 و $1 + \cos x$ أمام Y2. اختر لرسم بيان الدالة الثانية طريقة 0 مع خط يخرقه. فذلك يسمح لك بتتبع رسم البيان.

2 حدّد شاشة الرسم باختيار 7:ZTrig من خيارات ZOOM.

3 حدّد إلى الحاسبة وهي ترسم البيانات. عند قيامها برسم بيان الدالة الثانية، سوف تشاهد دائرة صغيرة تتحرّك على بيان الدالة الأولى، مما يعني أن بيان الدالة الثانية يُرسم فوق بيان الدالة الأولى.

4 عندما تنتهي الدائرة الصغيرة من رسم بيان الدالة الثانية سوف تتحقّق من أن البيانيين متطابقان، مما يوحي بأن المعادلة هي في الأغلب متطابقة. عندها تعمل على التحقّق من ذلك جبرياً.

حاول

1 اكتب مقولة انظر إن كانت المعادلة $\frac{1}{\cos x} - \tan x \sin x = \cos x$ تبدو متطابقة مثلثية.

2 أثبت جبرياً صحّة جوابك أو خطأه في التمرين السابق.

3 اكتب مقولة انظر إن كانت المعادلة $\frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}} = \tan x$ تبدو متطابقة مثلثية.

4 أثبت جبرياً صحّة جوابك أو خطأه في التمرين السابق.



المتطابقات المثلثية الأساسية

Fundamental Trigonometric Identities

3-7

من يستعمل هذا الأمر؟

يستعمل مصنّعو لوازم التزلّج المتطابقات المثلثية لتحديد نوع الشمع الذي ينبغي لهم تشميع المزلاج به. (مثال 3).

الأهداف

يستعمل المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية، وإعادة كتابتها، وللتحقّق من صحة متطابقات أخرى.

يُمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط المقادير المثلثية. تذكّر أن المتطابقة في الرياضيات هي علاقة تصحّ أياً تكن القيم التي تتخذها المتغيّرات الواردة في العلاقة.

فيما يلي استخلاص لمتطابقة مثلثية انطلاقاً من مبرهنة فيثاغورس.

مبرهنة فيثاغورس.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

اقسم كل طرف على r^2 .

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

عوّض عن $\frac{x}{r}$ بقيمته $\cos \theta$ وعن $\frac{y}{r}$ بقيمته $\sin \theta$.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

المتطابقات المثلثية الأساسية		
متطابقات المعكوس	المتطابقات الفيثاغورية	متطابقة التانجانت
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$



لكي تُبرهن أن معادلة تشكّل متطابقة، غير أحد طرفيها عدة مرات، حتى يُصبح كالتطرف الآخر. برر خطواتك باستعمال المتطابقات الأساسية.

مثال 1 إثبات متطابقات مثلثية

أثبت المتطابقة المثلثية.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \\ \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(-\theta)} &= -\frac{1}{\sin \theta} \\ \frac{1}{\sin(-\theta)} &= \\ \frac{1}{-\sin \theta} &= \\ -\frac{1}{\sin \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

اختر الطرف الذي سوف تُغيّره.

استعمل متطابقة التانجانت.

بسّط.

اختر الطرف الذي سوف تُغيّره.

استعمل متطابقة المعكوس.

بسّط.

إضاءة

يُمكنك تغيير أي من الطرفين. إلا أن الأسهل يكون بتغيير الطرف الأعد وتبسيطه وصولاً إلى الطرف الثاني.

1. أثبت المتطابقة المثلثية.



$$1 - \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta - 1}{\cos^2\theta} \quad \text{ب}$$

$$\sin\theta \frac{1}{\tan\theta} = \cos\theta \quad \text{أ}$$

يُمكنك استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية.

مثال 2 استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية.

اكتب المقدار المثلثي بدلالة $\cos\theta$ فقط، وعلى أبسط صورة.

$$\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \sin\theta \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

عوض.
اضرب.
اخرج.
استعمل المتطابقة
الفيثاغورية.
بسط.

$$\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

المتطابقة الفيثاغورية
حلّ فرق المربعين
بسط

$$\frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$\frac{1 - \cos^2\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$\frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{1 - \cos\theta}$$

$$1 + \cos\theta$$

إضاءة

إذا لم تعرف كيف تبسط متطابقة مثلثية، حاول أن تحول كل نسبة مثلثية إلى جيب أو جيب تمام.

2. اكتب المقدار المثلثي بدلالة $\sin\theta$ فقط، وعلى أبسط صورة.



$$\frac{1}{\tan^2\theta} \quad \text{ب}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} \quad \text{أ}$$

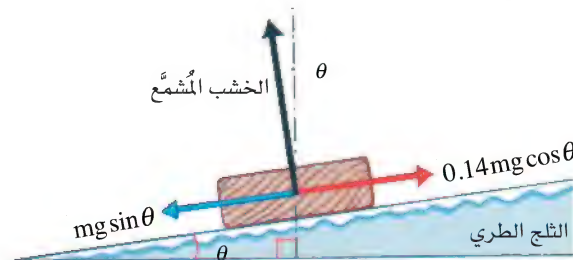
من طالب إلى طالب

تحقق بيانياً من تكافؤ المقادير

أحب استعمال الحاسبة البيانية لأتحقق من تكافؤ مقدارين. فلكي أتحقق من تكافؤ المقدارين $\frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$ و $1 + \cos\theta$ ، أطلب إلى الحاسبة رسم بياني الدالتين $y = 1 + \cos\theta$ و $y = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$ على الشاشة نفسها. بما أن البيانيين يبدوان متطابقين، يمكنني استنتاج تكافؤهما.

تطبيق صناعي

تختبر إحدى الشركات التي تُصنّع لوازم التزلج، احتكاك نوع جديد من الشمع الذي تشمّع به المزالج، عن طريق وضع شبه مكعب خشبي تم تشميّعه بهذا النوع من الشمع على مستوى مائل من الثلج الطري. يتم رفع مستوى الثلج ببطء حتى تبدأ قطعة الخشب بالانزلاق.



عندما تبدأ قطعة الخشب الانزلاق، يتساوى مكوّن الكتلة الموازي لسطح الثلج، $mg \sin \theta$ مع مقاومة الانزلاق $\mu mg \cos \theta$ الناتجة من الاحتكاك، حيث يُمثل μ معامل الاحتكاك. حدّد زاوية الانزلاق θ ، أي الزاوية التي يُشكّلها مستوي الثلج مع مستوٍ أفقي، عند بدء الانزلاق، علماً أنّ $\mu = 0.14$.

$$mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta \quad \text{اكتب أن المكوّن الأفقي للكتلة يساوي قوة الاحتكاك.}$$

$$\sin \theta = \mu \cos \theta \quad \text{اقسم كل طرف على } mg.$$

$$\sin \theta = 0.14 \cos \theta \quad \text{عوّض}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0.14 \quad \text{اقسم كل طرف على } \cos \theta.$$

$$\tan \theta = 0.14 \quad \text{متطابقة الظل.}$$

$$\theta \approx 8^\circ \quad \text{استعمل } \tan^{-1}$$

تبدأ قطعة الخشب بالانزلاق عندما يصبح قياس الزاوية θ ، 8 درجات تقريباً.

قراءة

اقرأ الحرف اليوناني μ كما يلي: ميو.

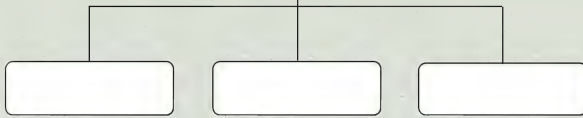
3. استعمل المعادلة $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ لإيجاد زاوية الانزلاق، عندما يكون معامل الاحتكاك $\mu = 0.4$.



فكر وناقش

1. صف كيف تثبت أن معادلة هي في الحقيقة متطابقة.
2. أوضح أي متطابقة تستعمل لإثبات $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$.
3. كن منظماً انسخ المخطط المقابل، ثم أكمله بكتابة المتطابقات الفيثاغورية.

المتطابقات الفيثاغورية



3-7 التمارين

تمارين موجهة

1 انظر المثال أثبت المتطابقة المثلثية.

$$\sin \theta \frac{1}{\cos \theta} = \tan \theta \quad 1$$

$$\cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) = \sin^2 \theta \quad 3$$

$$\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan \theta} \quad 2$$

2 انظر المثال اكتب المقدار بدلالة $\cos \theta$ على أبسط صورة.

$$\frac{1}{\sin \theta} \tan \theta \quad 4$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) (1 - \sin^2 \theta) \quad 5$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \quad 6$$

3 انظر المثال

7 فيزياء استعمل المعادلة $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ لإيجاد زاوية الانزلاق لشبه مكعب من الزجاج موضوع على طاولة سطحها زجاجي، عندما تميل الطاولة ويبدأ المكعب بالانزلاق، علماً بأن معامل الاحتكاك يساوي $\mu = 0.94$.

تمارين وحل مسائل

أثبت المتطابقة المثلثية.

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta} = 1 - \frac{1}{\tan \theta} \quad 9$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \quad 8$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \tan^2 \theta \quad 11$$

$$\tan \theta \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \quad 10$$

اكتب اكتب المقدار بدلالة $\sin \theta$ على أبسط صورة.

$$\tan^2 \theta \quad 13$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \quad 12$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1}{1 + \tan^2 \theta} \quad 15$$

$$\cos \theta \frac{1}{\tan \theta} + \sin \theta \quad 14$$



16 فيزياء استعمل المعادلة $mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$ لإيجاد أعلى ميل ممكن لطريق يسمح لسيارة دواليبها من المطاط أن تقف من دون أن تنزلق.

خطوات متعددة اكتب كل مقدار مثلثي بدلالة دالة مثلثية واحدة.

$$\cos \theta + \sin \theta \tan \theta \quad 19$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \tan \theta \quad 18$$

$$\frac{1}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad 17$$

$$\cos \theta (\tan^2 \theta + 1) \quad 22$$

$$\cos^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 21$$

$$\sin \theta \frac{1}{\sin \theta} - \cos^2 \theta \quad 20$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad 25$$

$$1 - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} \quad 24$$

$$\sin \theta \cos \theta \tan \theta \quad 23$$

$$\cos \theta \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad 28$$

$$\tan \theta \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \quad 27$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \quad 26$$

$$\sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \right) \quad 31$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos^2 \theta \right) \quad 30$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} \quad 29$$

تحقق من كل متطابقة.

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 34$$

$$\sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \right) = \cos^2 \theta \quad 33$$

$$\frac{\cos \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 32$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \quad 37$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\tan \theta} = \sin \theta \cos \theta \quad 36$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \quad 35$$

أثبت المتطابقة الأساسية من دون استعمال أي متطابقة أساسية أخرى (استعمل النسب المثلثية مع r, y, x).

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad 39$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad 38$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad 41$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 40$$

تمارين حرة

انظر المثال	لحل التمارين
1	11-8
2	15-12
3	16

42 يُمكن اعتماد الدالة $y(t) = 5 \sin t$ نموذجاً لحساب تمدد نابض تحت تأثير جسم معلق به، بدلالة الزمن t بالثواني. وتشكل الدالة $z(t) = 2.6 \cos t$ نموذجاً لحساب تمدد نابض آخر تحت تأثير جسم معلق به.

أ تم تعليق الجسمين بالنابضين في اللحظة نفسها ($t=0$). بعد كم ثانية يتساوى تمدد النابضين للمرة الأولى؟

ب كم كان التمدد في هذه اللحظة؟

ج في أي أوقات يتساوى تمدد النابضين؟

حاسبة بيانية استعمل الحاسبة البيانية لتقرر ان كان كل مما يلي متطابقة أم لا.

43 $\left(\frac{1}{\sin \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin \theta} + 1\right) = \tan^2 \theta$

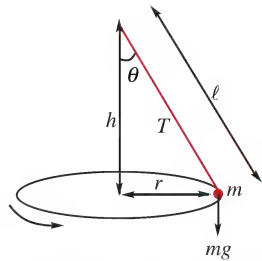
44 $\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \sin \theta$

45 $\cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

46 $\frac{1}{\tan \theta} (\cos \theta + \sin \theta \tan \theta) = \frac{1}{\sin \theta}$

47 $\cos \theta = 0.99 \cos \theta$

48 $\sin \theta \cos \theta = \tan \theta - \tan \theta \sin^2 \theta$



49 **فيزياء** يتشكل البندول المخروطي عندما يتحرك بندول على دائرة عوضاً عن تحركه من جهة إلى الجهة المقابلة، ويرسم في تحركه مخروطاً قاعدته دائرة الحركة. يُمكن استعمال القانون $r = \frac{g \tan \theta}{\omega^2}$ لحساب نصف قطر قاعدة المخروط r ، حيث يرمز g إلى قوة الجاذبية ويرمز ω إلى السرعة الزاوية للبندول.

أ استعمل $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \theta}}$ والمتطابقات المثلثية الأساسية لإعادة كتابة قانون حساب نصف القطر.

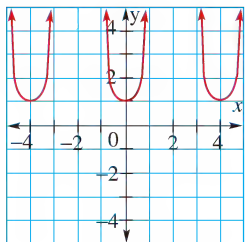
ب جد قاعدة لحساب ℓ بدلالة g و ω ودالة مثلثية واحدة.

تفكير ناقد تقول عن دالة أنها فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ ، وأنها زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$.

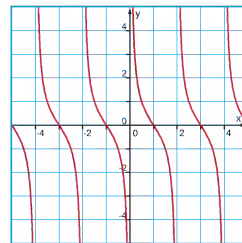
50 صنّف الدوال المثلثية الأساسية الثلاث بين فردية وزوجية.

51 ما الذي يميّز بيان دالة فردية عن بيان دالة زوجية وبيانات غيرها من الدوال؟

حدّد إن كانت كل دالة مما يلي فردية أو زوجية.



53



52

54 **تفكير ناقد** ما عدد الصور المتكافئة التي يُمكنك فيها أن تكتب $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ؟ اكتب ثلاثة منها على الأقل.

55 **اكتب** استعمل $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ و $\cos(-\theta) = \cos \theta$ لتستنتج $\tan(-\theta) = -\tan \theta$.

56 أي مقدار يكافئ المقدار المثلثي $\tan \theta$ ؟

$\sin \theta$ (أ) $\cos \theta$ (ب) $\frac{1}{\cos \theta}$ (ج) $\frac{1}{\sin \theta}$ (د)

57 أي مقدار لا يكافئ المقادير الثلاثة الأخرى ؟

$\frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sin \theta}$ (أ) $\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{\tan \theta}$ (ب) $\frac{\tan \theta}{\sin^2 \theta}$ (ج) $\cos^2 \theta \tan \theta$ (د)

58 أي جملة مثلثية ليست متطابقة ؟

$1 + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ (أ) $\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = \frac{1}{\tan^2 \theta}$ (ب) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ (ج) $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ (د)

59 أي مقدار يكافئ $1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ؟

$\tan^2 \theta$ (أ) $-\tan^2 \theta$ (ب) $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ (ج) $-\frac{1}{\tan^2 \theta}$ (د)

60 **جواب مختصر** تحقق من أن $\frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \cos \theta$. اكتب تبريراً لكل خطوة.

تحدّ وتوسّع

اكتب المقدار على صورة كسر وحيد.

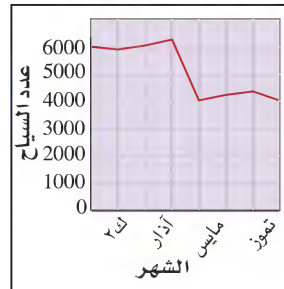
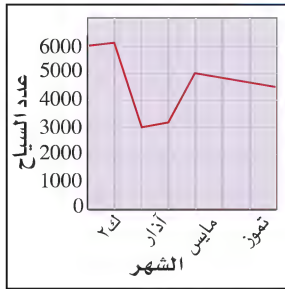
61 $\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}$ 62 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 63 $1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ 64 $\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$

اكتب على أبسط صورة.

65 $\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1$ 66 $\frac{\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}}$ 67 $\frac{\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}}$ 68 $\frac{1 - \frac{1}{\sin \theta}}{1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}}$

مراجعة لولبية

69 **سياحة** دوّن أحد الإحصائيين معطيات عن أعداد السياح الذين أمّوا جزيرة هاواي خلال 6 أشهر. اذكر الرسم البياني الذي يُعبّر عن كل حالة. (الدرس 5-1)



أ تتبّأت مصلحة الأرصاد الجوية بهبوب أعاصير في شهري آذار ونيسان.

ب أدى الارتفاع الشديد في درجات الحرارة خلال الصيف إلى إلغاء الكثير من الحجوز.

جد كل احتمال. (الصفوف السابقة)

70 الحصول على 4 عند رمي حجر نرد، وعلى 4 أيضاً عند رمي حجر نرد آخر.

71 الحصول على الصورة مرتين عند رمي قطعة نقود معدنية مرتين.

جد، لكل دالة مثلثية، 4 قيم للمتغير θ ، تجعل الدالة غير معرّفة. (الدرس 7-2)

74 $y = -\frac{1}{\sin \theta}$

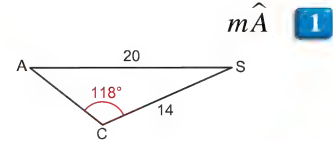
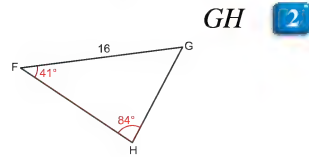
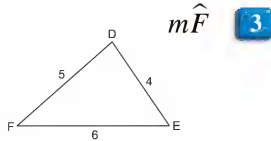
73 $y = \frac{1}{\cos(0.5\theta)}$

72 $y = -\tan \theta$

اختبار جزئي

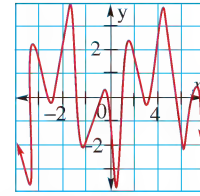
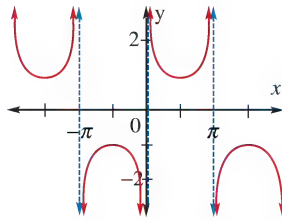
1-7 قانون السايين وقانون الكوساين ✓

جد كل قياس. قَرِّب الأطوال إلى أقرب عُشر وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



2-7 الدوال المثلثية ✓

حدّد إن كانت الدالة دورية. إذا كانت كذلك، جد زمنها الدوري.



استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد السعة والزمن الدوري.

$$h(x) = 0.25 \sin \pi x \quad 8$$

$$g(x) = -3 \sin x \quad 7$$

$$f(x) = \sin 4x \quad 6$$

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) \quad 11$$

$$g(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \quad 10$$

$$f(x) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad 9$$

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان كل دالة. حدّد التقاطعات الأفقية والمقاربات.

$$f(x) = \tan \frac{1}{2} \pi x \quad 14$$

$$f(x) = -2 \tan \frac{1}{2} x \quad 13$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \tan 4x \quad 12$$

3-7 المتطابقات المثلثية الأساسية ✓

اثبت المتطابقة المثلثية.

$$\frac{\frac{1}{\tan^2 \theta} - 1}{\frac{1}{\tan^2 \theta} + 1} = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad 17$$

$$\sin(-\theta) \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\tan \theta} = -1 \quad 16$$

$$\sin^2 \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sin \theta} = \tan \theta \quad 15$$

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلثية واحدة.

$$\frac{\frac{1}{\sin^2 \theta}}{\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}} \quad 20$$

$$\frac{1}{\cos(-\theta)} \quad 19$$

$$\frac{1}{\tan \theta} \frac{1}{\cos \theta} \quad 18$$

4-7

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities



لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال متطابقات المجموع والفرق بالإضافة إلى ضرب المصفوفات لإيجاد صورة شكل بدوران. (مثال 4).

يُشكل ضرب المصفوفات ومتطابقات المجموع والفرق أدوات لتحديد إحداثيات صور النقاط بدوران حول نقطة الأصل في المستوي الإحداثي.

الأهداف

يستعمل متطابقات المجموع والفرق لحساب قيم المقادير المثلثية.
يستعمل مصفوفة الدوران ومتطابقات المجموع والفرق لإجراء دورانات.

المفردات

Vocabulary

مصفوفة الدوران
Rotation Matrix

متطابقات المجموع والفرق	
متطابقات الفرق	متطابقات المجموع
$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$



حساب قيمة مقدار مثلثي باستعمال متطابقات المجموع والفرق

مثال 1

جد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

$$\sin 75^\circ \quad \text{أ}$$

اكتب $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ لأن النسب المثلثية للزاويتين 30° و 45° معروفة.

استعمل متطابقة ساين المجموع $\sin(A + B)$ عوضاً بسطاً.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{ب}$$

اكتب $-\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$ استعمل متطابقة $\cos(A + B)$ عوضاً بسطاً.

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

إضاءة

هناك عدة طرق لكتابة $-\frac{\pi}{12}$ مثلاً: $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ أو $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

1. جد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

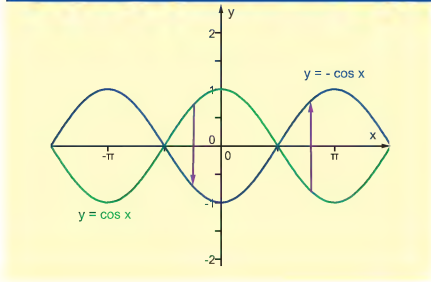
$$\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) \quad \text{أ}$$

$$\tan 150^\circ \quad \text{ب}$$

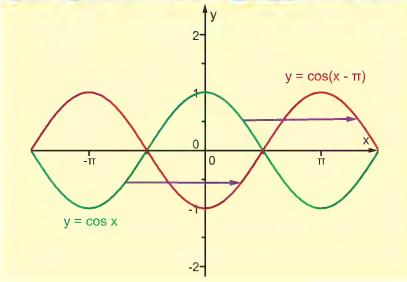


أن تسحب بيان دالة كوساين π راديان إلى اليمين يعادل أن تُحوّله بانعكاس حول المحور الأول.

تحويل بيان دالة التمام بانعكاس حول المحور الأول



سحب بيان دالة جيب التمام π راديان إلى اليمين



سوف تثبت هذا الأمر في المثال 2 باستعمال متطابقات الفرق.

مثال 2 إثبات متطابقة مثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

$$\text{أثبت } \cos(x - \pi) = -\cos x$$

$$\cos(x - \pi) =$$

$$\cos x \cos \pi + \sin x \sin \pi =$$

$$\cos x(-1) + \sin x(0) =$$

$$-\cos x = -\cos x$$

اختر الطرف الأيسر لتغييره.
استعمل متطابقة $\cos(A - B)$.
عوّض.
بسّط.

$$2. \text{ أثبت } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$



استعمال مبرهنة فيثاغوروس مع متطابقات المجموع والفرق

جد قيمة المقدار $\tan(A + B)$ علماً بأن $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$

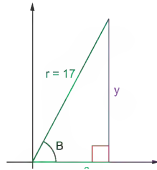
وأن $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0^\circ < B < 180^\circ$.

الخطوة 1 جد $\tan A$ و $\tan B$.

استعمل الزاوية المرجعية وتعريف النسب المثلثية $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$.

ارسم لكل زاوية مثلثاً قائماً في الربع المناسب وعنون x و y و r .

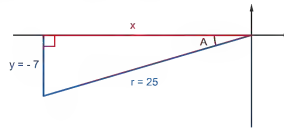
في الربع الثالث، $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$
في الربع الأول، $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0^\circ < B < 180^\circ$.



$$8^2 + y^2 = 17^2$$

$$y = \sqrt{259 - 64} = 15$$

$$\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}, \text{ إذن}$$



$$x^2 + (-7)^2 = 25^2$$

$$x = -\sqrt{625 - 49} = -24$$

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}, \text{ إذن}$$

تذكّر

الزاوية المرجعية لزاوية θ هي الزاوية الحادة الموجبة التي يُشكّلها الضلع النهائي للزاوية θ مع المحور الأول.

الخطوة 2 استعمال متطابقة المجموع.

متطابقة تانجانت المجموع.

عوض.

بسط.

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{7}{24} + \frac{15}{8}}{1 - \frac{7}{24} \cdot \frac{15}{8}}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{52}{24}}{1 - \frac{35}{64}} = \frac{416}{87}$$

3. جد قيمة المقدار $\sin(A-B)$ علماً بأن $\sin A = \frac{4}{5}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ وأن $\cos B = \frac{3}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$.

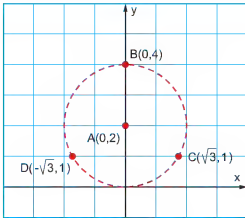


لكي تحصل على صورة نقطة $P(x, y)$ بدوران زاويته θ حول نقطة الأصل، استعمال مصفوفة الدوران.

استعمال مصفوفة الدوران

الدوران حول نقطة الأصل بزاوية θ ، يحوّل كل نقطة $P(x, y)$ إلى النقطة $P'(x', y')$ ، وفق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



استعمال مصفوفة الدوران

مثال 4

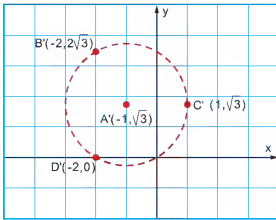
جد إحداثيات صور النقاط التي يبينها الشكل المقابل بدوران زاويته 30° حول نقطة الأصل.

الخطوة 1 اكتب مصفوفة الدوران R_{30} ومصفوفة النقاط S .

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{30} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 اضرب المصفوفتين.

$$R_{30} \cdot S = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$



إحداثيات النقاط - الصور، هي كما يلي $A'(-1, \sqrt{3})$ ، $B'(-2, 2\sqrt{3})$ ، $C'(1, \sqrt{3})$ ، $D'(-2, 0)$.

4. جد إحداثيات النقاط - الصور إذا كانت زاوية الدوران 60° .



فكر وناقش

- صف 3 طرق مختلفة يُمكنك أن تستعمل فيها متطابقات الفرق لإيجاد $\sin 15^\circ$.
- أوضح نقاط التشابه والتباين بين متطابقات السان ومتطابقات الكوساين. كيف ترتبط إشارات الحدود بكون المتطابقة متطابقة مجموع أو متطابقة فرق.
- كن منظمًا انسخ المخطط أدناه ثم أكمله.
اكتب لكل دالة متطابقتي المجموع والفرق مع أمثلة.



4-7 التمارين

تمارين موجّهة

- يتطلب تعريف الدوران تحديد مركزه، وهو النقطة التي يتم الدوران حولها، وزاويته واتجاهه. عند استعمال مصفوفة الدوران، ما مركز الدوران المفترض؟ وما اتجاهه المفترض؟

1 انظر المثال

جد القيمة المضبوطة للمقدار.

$$\cos 105^\circ \quad \sin \frac{11\pi}{12} \quad \tan \frac{\pi}{12} \quad \cos(-75^\circ)$$

2 انظر المثال

أثبت المتطابقة.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \tan(\pi + x) = \tan x \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

3 انظر المثال

جد قيمة المقدار، علمًا بأن $\sin A = \frac{-12}{13}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ ، وأن $\cos B = -\frac{4}{5}$ و $90^\circ < B < 180^\circ$.

$$\sin(A+B) \quad \cos(A-B) \quad \tan(A+B) \quad \tan(A-B)$$

4 انظر المثال

- جد إحداثيات رؤوس صورة المثلث ABC ، حيث $A(0, 2)$ ، $B(0, -1)$ ، $C(3, 0)$ بدوران زاويته 120° ومركزه نقطة الأصل. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

تمارين وحلُّ مسائل

جد القيمة المضبوطة لكل مقدار.

$$\sin \frac{7\pi}{12} \quad \tan 165^\circ \quad \sin 195^\circ \quad \cos \frac{11\pi}{12}$$

أثبت المتطابقة.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x \quad \tan(x - 2\pi) = \tan x$$

تمارين حرة

التمرين	الحل
المثال	التمرين
1	17-14
2	20-18
3	24-21
4	25

جد قيمة المقدار، علماً بأن $\cos A = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ ، وأن $\sin B = -\frac{4}{5}$ و $270^\circ < B < 360^\circ$.

21 $\sin(A+B)$ 22 $\tan(A-B)$ 23 $\cos(A+B)$ 24 $\cos(A-B)$

25 جد إحداثيات رؤوس صورة المثلث ABC ، حيث $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(0, 1)$ بدوران زاويته 45° ومركزه نقطة الأصل. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

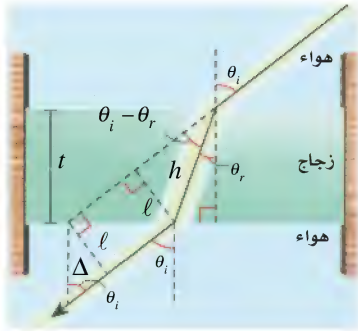
جد القيمة المضبوطة للمقدار.

26 $\sin 165^\circ$ 27 $\tan(-105^\circ)$ 28 $\sin(-15^\circ)$ 29 $\cos \frac{19\pi}{12}$

30 $\tan \frac{5\pi}{12}$ 31 $\sin 255^\circ$ 32 $\tan 195^\circ$ 33 $\cos \frac{\pi}{12}$

جد قيمة θ علماً بأن $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

34 $\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ 35 $\cos(\theta + 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 36 $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$



37 **فيزياء** يعبر الضوء الزجاج بزاوية θ_i ويخرج منه وفق الزاوية نفسها. إلا أن شعاع الضوء الخارج من الزجاج ينسحب من الشعاع الداخل بمسافة $\Delta = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin \theta_i \cos \theta_r} \right) t$ كما في الرسم.

أ اكتب المقدار Δ باستعمال النسبة المثلثية \tan فقط، مستعملاً المتطابقات المثلثية.

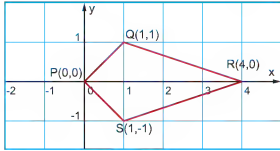
ب استعمل الشكل المقابل لكتابة $\sin(\theta_i - \theta_r)$ بدلالة ℓ و h .

خطوات متعددة جد قيمة كل من $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ في كل حالة.

38 $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ ؛ $\cos B = \frac{12}{13}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$

39 $\sin A = -\frac{1}{3}$ و $270^\circ < A < 360^\circ$ ؛ $\sin B = \frac{4}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$

40 سيتم تحويل الرباعي $PQRS$ عدة مرات لتشكيل شعار لمنتج جديد.



أ اكتب مصفوفات الدوران حول نقطة الأصل لدورانات زواياها 90° و 180° و 270° على التوالي.

ب استعمل المصفوفات لتحديد إحداثيات صورة الرباعي بكل من هذه الدورانات.

ج ارسم، في المستوي الإحداثي نفسه، صور الرباعي بكل من الدورانات الثلاثة.

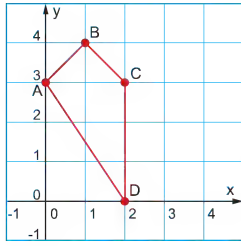
41 **تفكير ناقد** هل تستطيع إيجاد القيمة المضبوطة لـ $\sin \frac{11\pi}{24}$ باستعمال متطابقات المجموع أو الفرق؟ أوضح ذلك.

42 تُستعمل الدالة $y(t) = 4.2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ لإيجاد تمدد نابض تحت تأثير جسم معلق به بدلالة الزمن مقيساً بالثانية.

أ ما سعة هذه الدالة وما زمنها الدوري؟

ب استعمل المتطابقات المثلثية لكتابة هذه الدالة باستعمال كوساين فقط.

ج ما التمدد بعد 8 ثوان؟



هندسة جد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ ، حيث
 $A(0, 3)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(2, 3)$ ، $D(2, 0)$ ، بكل دوران زاويته θ
 ومركزه نقطة الأصل. قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

43 $\theta = 45^\circ$ 44 $\theta = 60^\circ$ 45 $\theta = 120^\circ$ 46 $\theta = -30^\circ$

47 **اكتب** هل $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ أعط مثلاً يدعم جوابك.

تحضير للاختبار

48 أي مما يلي هو قيمة المقدار المثلثي $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ$ ؟

أ $\frac{1}{2}$ ب $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ د $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

49 أي مما يلي هو قيمة x إذا كان $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$ ؟

أ $\frac{\pi}{6}$ ب $\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{3}$ د $\frac{\pi}{2}$

50 جد قيمة $\cos(A-B)$ علماً بأن $\sin A = \frac{1}{2}$ و $0^\circ < A < 90^\circ$ وأن $\cos B = \frac{3}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$.

أ $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ب $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ج $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ د $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

51 **جواب مختصر** جد قيمة $\sin(-15^\circ)$ المضبوطة. بين خطواتك.

تحدّ وتوسّع

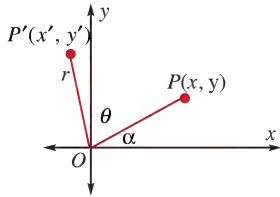
52 تحقق من أن مقلوب مصفوفة الدوران بزاوية θ هو مصفوفة الدوران بزاوية $-\theta$.

53 اثبت مبرهنة تانجانت المجموع $\tan(A+B)$.

54 بين كيف تحصل على مصفوفة الدوران باستعمال متطابقات

ساين المجموع وكوساين المجموع. تذكر من الصف العاشر أنك

تستطيع كتابة كل نقطة $P(x, y)$ على صورة $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ باستعمال زاوية مرجعية.



جد زاوية الدوران حول نقطة الأصل التي تحوّل المثلث ABC ، حيث $A(1, 0)$ و $B(0, 2)$ و $C(-1, 0)$ إلى المثلث $A'B'C'$.

55 $A'(0, 1)$ ، $B'(-2, 0)$ ، $C'(0, -1)$ 56 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

57 $A'(-1, 0)$ ، $B'(0, -2)$ ، $C'(1, 0)$ 58 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

مراجعة لولبية

اقسم مفترضاً أن جميع المقادير معرفة. (الصفوف السابقة)

61 $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

60 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$

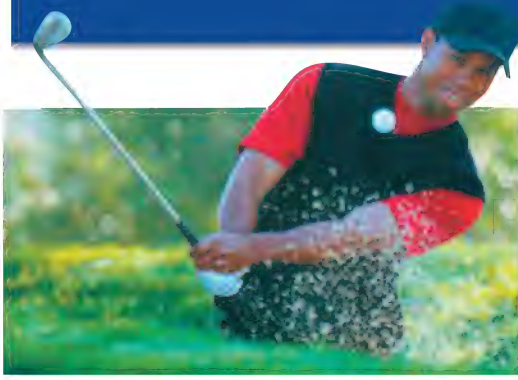
59 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلثية واحدة. (الدرس 3-7)

64 $\cos \theta \sin \theta \tan \theta$

63 $\frac{1}{\tan \theta} \times \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$

62 $\frac{1}{\tan \theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$



متطابقات الضعف والنصف

Double-Angle and Half-Angle Identities

5-7

لماذا نتعلّم هذا الأمر؟

يُمكنك استعمال متطابقة الضعف لحساب المسافة الأفقية لقذيفة مثل كرة الغولف. (تمرين 94)

الأهداف

يستعمل متطابقات الضعف والنصف لحساب قيم المقادير المثلثية وكتابتها على أبسط صورة.

يُمكنك استعمال متطابقات الجمع للوصول إلى متطابقات الضعف. مثلاً:

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) \\ &= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

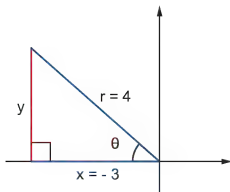
يُمكنك الوصول إلى متطابقات كوساين الضعف وتانجانث الضعف بالطريقة نفسها. لمطابقة كوساين الضعف ثلاث صور يُمكن الوصول إليها باستعمال متطابقة كوساين المجموع والمتطابقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. من الشائع كتابة المقادير المثلثية بدلالة θ .

متطابقات الضعف		
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$



حساب قيمة مقدار مثلثي باستعمال متطابقات الضعف

جد القيمة المضبوطة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ علماً بأن $\cos \theta = -\frac{3}{4}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$.



الخطوة 1 جد $\sin \theta$ لتجد قيمة $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

طريقة أولى استعمل الزاوية المرجعية.

في الربع الثاني، $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، و $\cos \theta = -\frac{3}{4}$.

$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

مبرهنة فيثاغورس.

احسب y .

خذ الجذر الموجب.

$$y = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

طريقة ثانية حلّ

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

عوّض وخذ الجذر الموجب.

بسّط.

مثال 1

انتبه!

تحدد إشارة كل من x و y تبعاً لوقوع الضلع النهائي لـ θ في الوضع المثالي.

الربع	sin	cos
الأول	+	+
الثاني	+	-
الثالث	-	-
الرابع	-	+

الخطوة 2 جد قيمة $\sin 2\theta$.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

متطابقة ساين الضعف.

عوّض.

$$\sin 2\theta = 2 \frac{\sqrt{7}}{4} \left(-\frac{3}{4}\right)$$

بسّط.

$$= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

الخطوة 3 جد قيمة $\cos 2\theta$.

متطابقة كوساين الضعف.

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

1. جد القيمة المضبوطة لـ $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ علماً بأن $\cos \theta = \frac{1}{3}$ و $270^\circ < \theta < 360^\circ$.



يمكنك استعمال متطابقات الضعف لإثبات متطابقات مثلثية.

مثال 2 إثبات المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات الضعف

أثبت المتطابقة.

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

أ

اختر الطرف الأيمن لتغييره.

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

استعمل متطابقة كوساين الضعف.

$$= \frac{1}{2}(1 - (1 - 2\sin^2 \theta))$$

بسّط.

$$= \frac{1}{2}(2\sin^2 \theta)$$

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

اختر الطرف الأيسر لتغييره.

$$(\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$$

ب

انشر المربع الكامل.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta =$$

جمع.

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (2 \cos \theta \sin \theta) =$$

استعمل متطابقة ساين الضعف

$$1 + \sin 2\theta$$

والمطابقة الفيثاغورية.

$$1 + \sin 2\theta = 1 + \sin 2\theta$$

2. أثبت المتطابقة.

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

ب

$$\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = \cos 2\theta$$

أ



يمكنك استعمال متطابقة كوساين الضعف للوصول إلى متطابقات النصف، باستعمال $\frac{\theta}{2}$ عوضاً عن θ .

برهنت في المثال 2 أن $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$. كذلك يمكنك أن تستعمل $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ لتبرهن أن $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$. إذا عوّضت عن θ بـ $\frac{\theta}{2}$ تحصل على متطابقات النصف:

متطابقات النصف		
$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{2}}$	$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$

يتم تحديد الإشارة وفقاً لموقع الضلع النهائي لـ $\frac{\theta}{2}$ في الوضع المثالي.



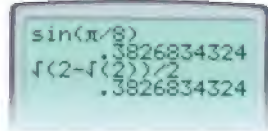
تساعد متطابقات النصف على حساب القيم المضبوطة لكل مقدار.

مثال 3 حساب قيم المقادير المثلثية باستعمال متطابقات النصف

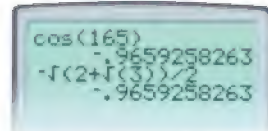
استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

<p>ب $\sin \frac{\pi}{8}$</p> <p>$\sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)$</p> <p>موجب لأن $\frac{\pi}{4}$ في الربع الأول.</p> $= \sqrt{\frac{1-\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2}}$ $= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{2}}$ $= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ $= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	<p>أ $\cos 165^\circ$</p> <p>$\cos \frac{330^\circ}{2}$</p> <p>سالب لأن 165° في الربع الثاني.</p> $= -\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$ $= -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2}}$ $= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ $= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ <p>بسط.</p>
--	---

تحقق باستعمال الحاسبة



تحقق باستعمال الحاسبة



3. استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

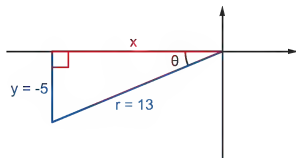
ب $\cos \frac{5\pi}{8}$

أ $\tan 75^\circ$



مثال 4 استعمال مبرهنة فيثاغورس مع متطابقات النصف

جد قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$ علماً بأن $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ و $80^\circ < \theta < 270^\circ$.



الخطوة 1 جد $\cos \theta$ لكي تستعمل متطابقات النصف.

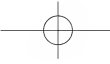
استعمل الزاوية المرجعية.

في الربع الثالث، $180^\circ < \theta < 270^\circ$ و $\sin \theta = -\frac{5}{13}$

مبرهنة فيثاغورس. $x^2 + (-5)^2 = 13^2$

احسب قيمة x . $x = -\sqrt{169 - 25} = -12$

إذن $\cos \theta = -\frac{12}{13}$



الخطوة 2 احسب قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$.

$$\sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \text{ موجب لأن } 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ + \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$$

$$\text{عوض.} \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$$

$$\text{بسط.} \sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{بسط} \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

الخطوة 3 احسب قيمة $\tan \frac{\theta}{2}$.

$$\tan \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} \text{ سالب لأن } 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

$$-\sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}}$$

عوض.

$$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$$

بسط.

$$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$$

$$-\sqrt{25}$$

$$-5$$

انتبه!

كن دقيقاً في تحديد إشارة كل
من $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$.
إذا كان $180^\circ < \theta < 270^\circ$
فإن $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$.

4. جد قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ علماً بأن $\tan \theta = \frac{4}{3}$ و $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

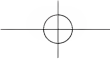


فكر وناقش

1. اوضح أي متطابقة ضعف تستعمل لتبسيط $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta}$.
2. صف كيف تحدّد إشارة $\sin \frac{\theta}{2}$ وإشارة $\cos \frac{\theta}{2}$.
3. كن منظماً انسخ المخطط أدناه ثم أكمله. اكتب في كل إطار متطابقة.



متطابقات كوساين الضعف



5-7 التمارين

تمارين موجّهة

جد قيم $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

$$0^\circ < \theta < 90^\circ : \sin \theta = \frac{4}{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi : \cos \theta = -\frac{5}{13} \quad \boxed{1}$$

انظر المثال 1

أثبت المتطابقة.

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \quad \boxed{4}$$

$$2 \cos 2\theta = 4 \cos^2 \theta - 2 \quad \boxed{3}$$

انظر المثال 2

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \boxed{6}$$

$$\frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\tan \theta} \quad \boxed{5}$$

جد قيمة المقدار باستعمال متطابقات النصف.

$$\sin 112.5^\circ \quad \boxed{10}$$

$$\tan \frac{3\pi}{8} \quad \boxed{9}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \boxed{8}$$

$$\cos 67.5^\circ \quad \boxed{7}$$

انظر المثال 3

جد قيم $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$.

$$270^\circ < \theta < 360^\circ : \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \boxed{12}$$

$$180^\circ < \theta < 270^\circ : \sin \theta = -\frac{24}{25} \quad \boxed{11}$$

انظر المثال 4

تمارين وحلّ مسائل

جد قيم $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} : \tan \theta = \frac{20}{21} \quad \boxed{14}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ : \cos \theta = -\frac{7}{25} \quad \boxed{13}$$

أثبت متطابقة.

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \boxed{16}$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta \quad \boxed{15}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \boxed{18}$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \boxed{17}$$

جد قيمة المقدار باستعمال متطابقات النصف.

$$\tan 15^\circ \quad \boxed{22}$$

$$\sin 22.5^\circ \quad \boxed{21}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} \quad \boxed{20}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \quad \boxed{19}$$

جد قيم $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$.

$$180^\circ < \theta < 270^\circ : \sin \theta = -\frac{3}{5} \quad \boxed{24}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi : \tan \theta = -\frac{12}{35} \quad \boxed{23}$$

خطوات متعددة اكتب المقدار على أبسط صورة، باستعمال النسب المثلثية لـ θ عوضاً

عن مضاعفات θ .

$$\cos 4\theta \quad \boxed{28}$$

$$\cos 3\theta \quad \boxed{27}$$

$$\sin 4\theta \quad \boxed{26}$$

$$\sin 3\theta \quad \boxed{25}$$

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta} \quad \boxed{32} \quad \tan 2\theta \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \quad \boxed{31}$$

$$\cos 2\theta + 1 \quad \boxed{30}$$

$$\cos 2\theta + 2 \sin^2 \theta \quad \boxed{29}$$

$$\frac{\cos 2\theta - 1}{\sin^2 \theta} \quad \boxed{34}$$

$$\frac{\cos \theta \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \boxed{33}$$

تمارين حرة

انظر المثال	لحل التمارين
1	14-13
2	18-15
3	22-19
4	24-23

35 تُشكّل الدالة $y(t) = 3.1 \sin 2t$ نموذجاً لقياس تمدّد نابض تحت تأثير جسم معلق به بدلالة الزمن t مقيساً بالثواني.

أ اكتب هذه الدالة بدلالة النسب المثلثية لـ t بدلاً من $2t$ باستعمال متطابقات الضعف.

ب تُشكّل الدالة $w(t) = 3.8 \cos t$ نموذجاً لقياس تمدّد نابض آخر تحت تأثير جسم معلق به. تم تعليق الجسمين بالنابضين في اللحظة نفسها $t = 0$. متى يتساوى تمدّد النابضين للمرة الأولى؟

ج كم يبلغ التمدّد عند هذه اللحظة؟

خطوات متعددة جد قيم $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ و $\sin \frac{\theta}{2}$ و $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\tan \frac{\theta}{2}$.

37 $180^\circ < \theta < 270^\circ$: $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

36 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$: $\cos \theta = -\frac{3}{8}$

39 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$: $\tan \theta = -\frac{1}{2}$

38 $0^\circ < \theta < 90^\circ$: $\sin \theta = \frac{2}{5}$

جد القيمة المضبوطة للمقدار باستعمال متطابقات النصف.

42 $\cos 105^\circ$

41 $\sin \frac{11\pi}{12}$

40 $\cos \frac{7\pi}{8}$

44 $\cos(-135^\circ)$

43 $\sin(-15^\circ)$

اثبت المتطابقة.

47 $\frac{\tan \theta + \sin \theta}{2 \tan \theta} = \cos^2 \frac{\theta}{2}$

46 $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

45 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2 \theta}{2(1 - \cos \theta)}$

48 **حاسبة بيانية** ارسم بيان $y = \frac{\cos x (1 - \cos 2x)}{\sin 2x}$ لتكتشف متطابقة مثلثية. أثبت هذه المتطابقة جبرياً.

49 **خطوات متعددة** قُذفت كرة مضرب بسرعة أصلية v_0 قدم في الثانية، وفق زاوية ارتفاع θ . تُستعمل الدالة $d(\theta) = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{16}$ لحساب المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة.

أ اكتب الدالة السابقة باستعمال النسب المثلثية لـ 2θ .

ب احسب المسافة الأفقية التي تقطعها كرة مضرب قُذفت بسرعة أصلية مقدارها 80 قدماً في الثانية وبزوايا الارتفاع التالية: 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° .

ج إذا كانت السرعة الأصلية ثابتة، فأى زاوية تؤمّن أكبر مسافة أفقية؟

د **ماذا لو ... ؟** لو أن السرعة الأصلية كانت 80 قدماً في الثانية، فبين أي زاويتين يجب أن تكون زاوية الارتفاع لكي لا تقل المسافة الأفقية المقطوعة عن 175 قدماً؟

50 **تفكير ناقد** أوضح كيف تجد القيمة المضبوطة لـ $\sin 7.5^\circ$.

51 **اكتب** كيف تعرف متى تستعمل متطابقات الضعف، ومتى تستعمل متطابقات النصف؟

52 ما قيمة $\sin 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$

- (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 1 (د) -1

53 ما قيمة $\cos 2\theta$ إذا كان $\cos \theta = \sin \theta$

- (أ) 0 (ب) 1 (ج) $2\sin^2 \theta$ (د) $2\cos^2 \theta$

54 ما قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$ علماً بأن $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$

- (أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ (د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 ما القيمة المضبوطة لـ $\sin 157.5^\circ$

- (أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **جواب مختصر** تحقق من صحة $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \cos \theta - \sin \theta$ حيث $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

تحدّ وتوسّع

57 استخلص متطابقة النصف لـ $\tan 2\theta$ ، باستعمال متطابقة التانجانت ومتطابقتي الضعف

للساين والكوساين.

58 استخلص متطابقة النصف لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ باستعمال متطابقة التانجانت ومتطابقتي النصف للساين

والكوساين.

استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة للمقدار.

59 $\tan 7.5^\circ$ 60 $\tan \frac{\pi}{16}$ 61 $\sin \frac{\pi}{24}$ 62 $\cos 11.25^\circ$

63 **اكتب** جد قيم θ التي تحقق $\sin 2\theta = 2\sin \theta$. أوضح الأمر باستعمال الرسم البياني أولاً ،

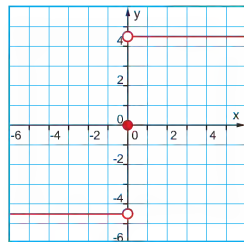
ثم بحل المعادلة.

64 استعمل متطابقات المجموع والفرق لاستخلاص المتطابقتين.

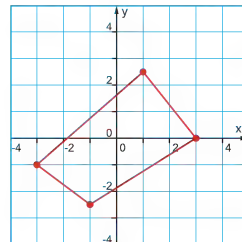
$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ و $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

مراجعة لولبية

استعمل اختبار المستقيم العمودي لتحديد إن كانت العلاقة دالة أم لا . (الصفوف السابقة)



66



65

اجمع أو اطرح. حدّد قيم x التي تجعل المقدار غير معرّف. (الصفوف السابقة)

70 $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

69 $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$

68 $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$

جد القيمة المضبوطة للمقدار. (الدرس 4-7)

74 $\cos 255^\circ$

73 $\cos \frac{7\pi}{12}$

72 $\sin 105^\circ$

71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

الفصل

7

دليل الدراسة: مراجعة

أحياء في عملية البناء الضوئي، تُحوّل النباتات ثاني أكسيد الكربون CO_2 والماء إلى سكر وأوكسجين. تُدرس هذه العملية بقياس كمية الكربون C ، التي تمتصّها النبتة مقيسة بالمايكرومول (Micromole) في المتر المربع في الثانية. تشكّل الدالة $C(t) = 1.2 \sin \frac{\pi}{12}(t-6) + 7$ نموذجاً لقياس هذه الكمية بدلالة الزمن t بالساعات.

15 ارسم بيان الدالة على مدى دورتين.

16 ما الزمن الدوري لهذه الدالة؟

17 ما القيمة العظمى لهذه الدالة ومتى تتحقق؟

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالة. حدّد التقاطعات الأفقية والمحاذيات.

$$f(x) = \frac{1}{4} \tan x \quad 18$$

$$f(x) = \tan \pi x \quad 19$$

$$f(x) = \tan \frac{1}{2} \pi x \quad 20$$

أثبت المتطابقة المثلثية.

$$\frac{1}{\cos \theta} \sin \theta - \frac{1}{\tan \theta} = 1 \quad 21$$

$$\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan \theta} = \sin \theta \cos \theta \quad 22$$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right) = \tan^2 \theta \quad 23$$

$$1 + \cos^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 24$$

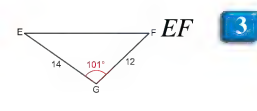
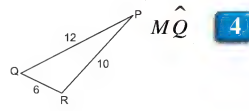
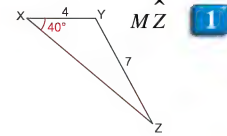
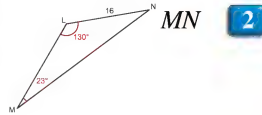
$$\left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad 25$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \quad 26$$

$$\sin^2 \theta \tan \theta = \tan \theta - \sin \theta \cos \theta \quad 27$$

$$\frac{\tan \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \quad 28$$

جد كل قياس. قَرّب الطول إلى أقرب عُشر وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.



استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالة. حدّد السعة والزمن الدوري.

$$f(x) = \cos 3x \quad 5$$

$$g(x) = \cos \frac{1}{2} x \quad 6$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x \quad 7$$

$$f(x) = 2 \sin \pi x \quad 8$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \quad 9$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \sin \pi x \quad 10$$

استعمل بيانات الدوال المثلثية الأم لرسم بيان الدالة. حدّد التقاطعات الأفقية وانحراف الطور.

$$f(x) = \cos(x + \pi) \quad 11$$

$$g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad 12$$

$$h(x) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad 13$$

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \quad 14$$

$$\theta = 60^\circ \quad 45$$

$$\theta = 90^\circ \quad 46$$

جد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ ، حيث
 $A(0, 0)$ ، $B(5, 2)$ ، $C(0, 4)$ ، $D(-5, 2)$ ، بدوران
مركزه نقطة الأصل وزاويته θ . قَرِّب الإجابات إلى
أقرب جزء من مئة.

$$\theta = 120^\circ \quad 47$$

$$\theta = 180^\circ \quad 48$$

$$\theta = 240^\circ \quad 49$$

$$\theta = 270^\circ \quad 50$$

جد قيمة المقدار، علماً بأن $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\tan \theta = \frac{3}{4}$.

$$\sin 2\theta \quad 51$$

$$\cos 2\theta \quad 52$$

$$\tan \frac{\theta}{2} \quad 53$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \quad 54$$

جد قيمة المقدار علماً بأن $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و $\cos \theta = \frac{3}{4}$.

$$\tan 2\theta \quad 55$$

$$\cos 2\theta \quad 56$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \quad 57$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \quad 58$$

استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة
للمقدار.

$$\sin \frac{\pi}{12} \quad 59$$

$$\cos 75^\circ \quad 60$$

اكتب المقدار باستعمال دالة مثلثية واحدة.

$$\frac{1}{\tan \theta \cos \theta} \quad 29$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \sin \theta \tan \theta \quad 30$$

$$\tan(-\theta) \sin(-\theta) \cos(-\theta) \quad 31$$

$$\frac{\cos \theta \frac{1}{\tan \theta}}{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1} \quad 32$$

جد القيمة المضبوطة للمقدار.

$$\sin \frac{19\pi}{12} \quad 33$$

$$\cos 165^\circ \quad 34$$

$$\cos 15^\circ \quad 35$$

$$\tan \frac{\pi}{12} \quad 36$$

جد قيمة المقدار علماً، بأن $0^\circ < A < 90^\circ$ و $\tan A = \frac{3}{4}$
وأن $90^\circ < B < 180^\circ$ و $\tan B = -\frac{5}{12}$

$$\sin(A+B) \quad 37$$

$$\cos(A+B) \quad 38$$

$$\tan(A-B) \quad 39$$

$$\tan(A+B) \quad 40$$

$$\sin(A-B) \quad 41$$

$$\cos(A-B) \quad 42$$

جد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ ، حيث
 $A(0, 0)$ ، $B(3, 0)$ ، $C(4, 2)$ ، $D(1, 2)$ ، بدوران مركزه
نقطة الأصل وزاويته θ . قَرِّب الإجابات إلى أقرب جزء
من مئة.

$$\theta = 30^\circ \quad 43$$

$$\theta = 45^\circ \quad 44$$

الفصل

7

اختبار الفصل

جد قيمة المقدار علماً بأن $0^\circ < A < 90^\circ$ و $\tan A = \frac{3}{4}$ ،
وأن $180^\circ < B < 270^\circ$ و $\tan B = \frac{12}{13}$.

10 $\sin(A+B)$

11 $\cos(A-B)$

12 جد إحداثيات رؤوس صورة الرباعي $ABCD$ حيث
 $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ ، بدوران
حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 30° . قَرِّب
الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

جد قيمة المقدار علماً بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$
و $\tan \theta = -\frac{12}{5}$.

13 $\sin 2\theta$

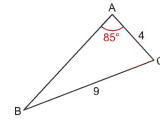
14 $\cos 2\theta$

15 $\cos \frac{\theta}{2}$

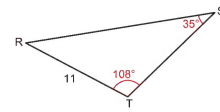
16 استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة
المضبوطة للمقدار $\sin \frac{3\pi}{8}$.

جد كل قياس. قَرِّب الطول إلى أقرب عشر وقياس
الزاوية إلى أقرب درجة.

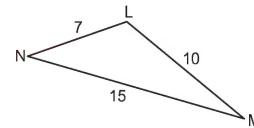
1 $m\hat{B}$



2 RS



3 $m\hat{M}$



4 استعمل بيان الدالة $f(x) = \cos x$ لرسم بيان الدالة
 $g(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$. حدّد السعة والزمن الدوري.

5 استعمل بيان الدالة $f(x) = \sin x$ لرسم بيان الدالة
 $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. حدّد التقاطعات الأفقية
وانحراف الطور.

6 استعمل بيان الدالة $f(x) = \tan x$ لرسم بيان الدالة
 $g(x) = 2 \tan \pi x$. حدّد الزمن الدوري والتقاطعات
الأفقية والمحاذيات.

7 أثبت المتطابقة المثلثية $\frac{1}{\tan \theta} = \cos^2 \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\cos \theta}$.

اكتب المقدار باستعمال نسبة مثلثية واحدة.

8 $\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

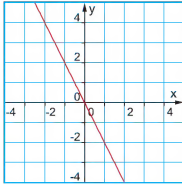
اختبار تراكمي



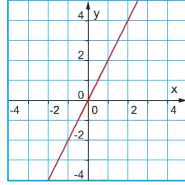
الفصل

7

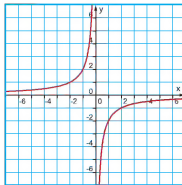
6 أي مما يلي بيان دالة تعبير عكسي، حيث $y=2$ و $x=-1$ ؟



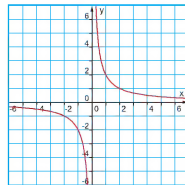
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

7 استعمل متطابقات النصف لإيجاد القيمة المضبوطة لـ $\cos 157.50^\circ$.

(أ) $-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

(ب) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

(ج) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

(د) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$

8 ما إحداثيا رأس بيان الدالة $f(x)=x^2+6x-4$ ؟

(أ) $(0, -4)$

(ب) $(-3, -13)$

(ج) $(-3, 5)$

(د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ خماسي محدب. $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C}$ ، $\hat{D} \equiv \hat{E}$ ، ما قياس $m\hat{A}=2m\hat{D}$ ؟

(أ) 154.3°

(ب) 67.5°

(ج) 225°

(د) 135°

1 ما القيمة المضبوطة للمقدار $\tan 15^\circ$ ؟

(أ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(ب) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(ج) $2-\sqrt{3}$

(د) $2+\sqrt{3}$

2 أين تقع محاذيات الدالة $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ ؟

(أ) $2\pi n$

(ب) $\frac{\pi n}{2}$

(ج) $3\pi n$

(د) $\frac{\pi n}{3}$

3 ما الزمن الدوري للدالة $y=5\cos \frac{1}{3}x$ ؟

(أ) $\frac{2\pi}{5}$

(ب) $\frac{5}{3}$

(ج) $\frac{2\pi}{3}$

(د) 6π

4 يتألف الفيلم من 14 مشهداً حوارياً و 10 مشاهد إيمائية، ولا يتضمن أي شيء آخر. تم اختيار مشهد بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون مشهداً إيمائياً ؟

(أ) $\frac{5}{12}$

(ب) $\frac{7}{12}$

(ج) $\frac{5}{7}$

(د) $\frac{7}{5}$

5 ما قيمة الدالة $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ عندما $x=-2$ ؟

(أ) -12

(ب) -44

(ج) 36

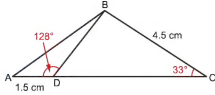
(د) 0

16 استعمال المتتالية ... ، 324 ، 108 ، 36 ، 12 ، 2

أ اكتب تعريفاً معلناً للحد النوني.

ب ما الحد العاشر؟

17 استعمال الرسم لإيجاد كل قياس. قُرب الطول إلى أقرب عُشر من السنتيمتر.



أ طول \overline{DC}

ب طول \overline{AB}

جواب مفصل

18 يُبين الجدول أدناه الدرجات التي حصل عليها طلاب الصف الحادي عشر في مادة الرياضيات.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

أ جِد المتوسط.

ب جِد الوسيط.

ج جِد المنوال.

د جِد التباين.

هـ جِد الانحراف المعياري.

و جِد المدى.

10 أي مما يلي لا يساوي $\sin 60^\circ$ ؟

أ $\cos 30^\circ$

ب $\frac{\sqrt{3}}{2}$

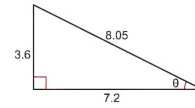
ج $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

د $(\cos 60^\circ)(\tan 60^\circ)$

جواب مختصر

11 ما قيمة x ، حيث $5\sqrt{2x-7}+4=9$ ؟

12 ما قيمة $\cos \theta$ ؟ قُرب الجواب إلى أقرب جزء من ألف.



13 جِد مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^{14} (3k-5)$.

14 في المثلثين ABC و DEF ، $\hat{A} \cong \hat{F}$ و $\hat{B} \cong \hat{D}$. إذا كان $EF=4.5$ و $DF=3$ و $AC=1.5$ ، كم يجب أن يكون طول \overline{AB} لكي يكون المثلثان متشابهين؟

جواب قصير

15 يضم نادي الشطرنج في ثانوية السليمانية 12 عضواً. ينبغي لمدير المدرسة اختيار لاعبين للاشتراك في بطولة العراق للشطرنج.

أ بكم طريقة يُمكنه اختيار اللاعبين؟

ب أوضح لماذا حلت المسألة بالطريقة التي اخترتها.